第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2494-11

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.6,June,2005

Beltrami-de Sitter 时空和 de Sitter 不变的狭义相对论*

郭汉英[1)2)†] 黄超光[1)2)‡] 田 雨[2)§] 徐 湛[3)♪] 周 彬[1)2)‖]

1)(中国科学院高能物理研究所,北京 100049)
2)(中国科学院理论物理研究所,北京 100080)
3)(清华大学物理系和高等研究中心,北京 100084)

(2004 年 9 月 15 日收到;2004 年 10 月 14 日收到修改稿)

分析了在相对论体系中狭义相对性原理和宇宙学原理之间的关系以及 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难. 指出可以把狭义相对性原理推广到非零常曲率时空,在具有 Beltrami 度规的 de Sitter/反 de Sitter 时空中建立狭义相对论的运动学和粒子动力学. 在这类狭义相对论中,相对于 Beltrami 坐标同时性,Beltrami 坐标系就是惯性坐标系,相应的观测者为惯性观测者;对于自由粒子和光讯号,惯性定律成立;可以定义可观测量,它们不但守恒而且还满足推广的爱因斯坦关系. 除了 Beltrami 坐标时同时性之外,对于共动观测,还可以取固有时同时性;此时,Beltrami 度规成为 Robertson-Walker 型的度规,其 3 维空间是闭的,对于平坦的偏离为宇宙学常数的量级. 这表明,在这类狭义相对论中,相对性原理与'完美'宇宙学原理之间存在内在联系,并不存在那些问题. 进而,基于最新观测事实,重述了 Mach 原理,指出对于 Beltrami-de Sitter/反 de Sitter 时空,宇宙学常数恰恰给出惯性运动的起源.

关键词:狭义相对性原理,宇宙学原理,de Sitter 不变的狭义相对论,Beltrami-de Sitter 时空,同时性,Mach 原理,惯性运动的起源

PACC:0330,9880D,0240

1. 引 言

我们知道,所有的实验室和天文台,包括人造卫星 COBE,WMAP 等在内,比起宇观尺度而言都是局部的. 我们进行的所有与宇宙结构有关的实验和观测,都是在这类局部'实验室'中进行的. 通常,大体上可以把经典物理实验和天文观测分为三类:第一类是引力可以忽略且与宇观效应无关的那些实验和观测;第二类则是关于孤立引力源系统的实验和观测;第三类是关于宇观效应的实验和观测. 对于第一类的实验和观测,爱因斯坦的狭义相对论及其牛顿近似为物理量的定义与对测量结果的分析提供了非常好的理论框架. 例如钟和尺,以及同时性的定义;质量、能量、动量、角动量和自旋等的定义等等. 而这些基本物理量的定义及对测量结果的分析比较都离不开狭义相对论中的相对性原理和 Poincaré 对称性以及它们的非相对论近似或对应. 所有这些不仅是第一类实验和观测的基础,事实上也是第二、三类实验和观测的基础. 因为,对于第二类实验和观测,我们总要假定远离引力源的时空存在渐近平坦区域,在那里存在渐近 BMS 对称性[1](它可看作 Poincaré 对称性的某种推广),借助这种渐近对称性可近似地定义狭义相对论意义下的惯性观测者,进而定义基本物理量,分析引力以及与它们有关的其他实验和观测. 对于第三类实验和观测,我们已不能假定宇宙中存在渐近平坦区域,这时只能假定在足够小的范围内,时空是足够平坦的,并认为 Poincaré

* 国家自然科学基金(批准号:90103004,10175070,10375087,10373003,10347148,90403023)部分资助的课题.

† Email:hyguo@itp.ac.cn
‡ Email:huangcg@mail.ihep.ac.cn
§ Email:ytian@itp.ac.cn
♪ Email:zx-dmp@mail.tsinghua.edu.cn
‖ Email:zhoub@itp.ac.cn

对称性在这个小范围内能够近似地成立，并以此定义狭义相对论意义下的惯性观测者和基本物理量，进而分析和宇观效应有关的实验和观测. 应该指出，对于第二类实验和观测，我们也可以采用第三类实验和观测所采用的方法来分析某些数据；但如果涉及孤立引力源系统整体性质，就必须在渐近平坦区域进行分析了. 而对于第三类实验和观测，即使我们要讨论宇宙的整体性质，也只能采用局部惯性系的方法来分析数据.

众所周知，爱因斯坦在提出广义相对论时采用了没有挠率的 Riemann 几何. 他当时认为这种几何"在无穷小的区域里"与欧几理德几何相一致"[2]. 其实，严格说来，这种想法并不恰当. 无挠 Riemann 几何在局部并不等价于欧几理德几何，二者的差别在于前者的和乐群不包括平移，而后者具有平移不变性（例如见文献[3]）. 也就是说，在广义相对论的框架内，在引力场中虽然存在局部惯性系，但在这类局部惯性系中只具有局部齐次 Lorentz 不变性、而不具有严格定义的（局部）平移不变性. 应该注意，这些平移不变性与惯性观测者所用的基本物理量有着密切的关系. 因而，在广义相对论中，前面提到的近似只能作为爱因斯坦的相对论体系中的一个重要的工作假定. 基本物理量的定义都是基于这样的工作假定，从狭义相对论中借用来的.

近年来，关于微波背景辐射、Ia 型超新星等的天文观测表明，我们的宇宙在加速膨胀，很可能存在一个数值为正的极小的宇宙学常数. 如果确实如此，我们的宇宙在宇观大尺度上是一个渐近 de Sitter 时空；这对以狭义相对论为基础的现代物理学和以广义相对论为基础的宇宙学，提出了许多值得研究的问题（例如见文献[4,5]）. 事实上，我们的宇宙在宇观尺度上不会是一个渐近闵可夫斯基时空，因而，严格说来，我们不能采用第二类实验和观测所用的分析方法.

其实，在爱因斯坦相对论体系中，本来就存在一些长期没有解决的问题. 一个具有代表性的问题就是狭义相对性原理和宇宙学之间的关系. Bondi 和 Bergmann 等人早就提出了这个问题（例如见文献[6—8]）. 在一定意义上，这个疑难也包括时间箭头疑难和 CMB 作为"光子以太"的疑难. 而且，它与是否存在宇宙学常数无关.

另一个重要的疑难是陆启铿在 1970 年提出的[9]，我们称之为 de Sitter/反 de Sitter 时空中的 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难：在 de Sitter/反 de Sitter 时空中，存在一类坐标系（称为 Beltrami 坐标系），所有测地线在其中都可以表示成线性形式；而且，在 Beltrami 坐标下，de Sitter/反 de Sitter 群表现为具有共同分母的分式线性变换. 在这样的变换下，这些性质保持不变. 如果对于这些常曲率时空，我们采用在狭义相对论中关于坐标系的约定，那么，在这类坐标系中沿测地线运动的检验粒子就是在作坐标速度为常数的匀速直线运动，它们的行为就像不受引力作用的自由粒子. 然而，按照广义相对论，时空的弯曲就解释成引力的存在. 这种在 de Sitter/反 de Sitter 时空中是否存在引力、是否存在匀速直线运动的问题就称为 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难. 陆启铿还提出，在物理上为什么一定要用 Minkowski 度规，而不考虑对于 de Sitter 和反 de Sitter 时空采用 Beltrami 度规的可能性？

1974 年，陆启铿及其合作者建议将狭义相对性原理扩充到具有非零常曲率的 de Sitter/反 de Sitter 时空，并探讨了如何在常曲率时空中建立狭义相对论[9,10]. 最近，在陆启铿等工作的基础上，我们分析了具有 Beltrami 度规的 de Sitter 时空（简称 BdS 时空）的性质[11]. 本文将在此基础上，进一步建立 de Sitter 不变的狭义相对论，主要涉及其运动学理论和粒子动力学. 对于反 de Sitter 时空，也可建立类似的理论. 这类狭义相对论中，存在惯性坐标系和惯性观测者，对于自由粒子和光讯号，惯性定律成立；可以定义可观测量，它们不但守恒而且还满足推广的爱因斯坦关系. 同时，Newton 第二定律也可以推广为 BdS-时空中 dS-不变的粒子动力学方程.

应该指出，这些事实成立首先需要确定同时性. 与狭义相对论类似，Beltrami 坐标时间具有与相对性原理相适应的物理意义——这些事实是相对于 Beltrami 坐标时相同的同时性而言的. 如果在任意给定的 Beltrami 坐标下选用相对于空间坐标原点静止（即 $x^a = \text{const.}$，$a = 1,2,3$）的钟的固有时作为时间坐标，Beltrami 度规就变换为 Robertson-Walker 类型的度规，后者满足"完美"宇宙学原理的要求. 需指出，相对于空间坐标原点静止的观测者就是通常宇宙论中所采用的共动观测者. 如果对于这类观测者都采用这类固有时相同的同时性，就可以对与宇宙学原理有关的观测结果进行分析. 这里，"完美"宇宙学原理是指对于 BdS-时空的 Robertson-Walker 类型的度规，其对称性仍然是 dS 对称性. 因此，如果我们

把狭义相对性原理扩充到 de Sitter 时空的 Beltrami 模型,对于 de Sitter 时空的'完美'宇宙学原理而言,二者之间的关系,就是两类同时性之间的关系.这样,在这个模型中,相对性原理和'完美'宇宙学原理之间并不存在什么问题,Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难也就不再存在.当然,对于没有任何物质的 de Sitter 时空而言,"完美'宇宙学原理中的对称性仍然是具有 10 个参数的 de Sitter 群.不过,这有可能对于如何进一步在具有物质的情形下考虑相对性原理和宇宙学原理的关系有一定的启发.

在本文中,我们还基于最新观测事实重述了 Mach 原理,并且指出,对于 Beltrami-de Sitter/反 de Sitter 时空中的狭义相对论,宇宙学常数恰恰给出惯性运动和惯性坐标系的起源.

我们将在第 2 节中分析狭义相对性原理和宇宙学之间的关系以及 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难.在第 3 节中提出 BdS 时空的狭义相对论.在第 4 节中探讨 de Sitter 不变的狭义相对论的'完美'宇宙学意义,以及在什么意义上宇宙学常数是惯性运动和惯性坐标系的起源.最后,我们以几点评注结束本文.

2. 狭义相对性原理与宇宙学的关系和 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难

2.1. 狭义相对性原理与宇宙学的关系

我们知道,狭义相对性原理要求存在惯性坐标系,与引力无关的物理规律在惯性坐标系之间的 10 个参数的 Poincaré 变换

$$x^i \to x'^i = L^i_j(x^j - a^j), L^i_j \in SO(1,3) \quad (1)$$

下保持不变.对于这些惯性坐标系而言,没有自身优越的速度、时间没有方向性等等.对于我们的实验室而言,只要根本不管引力和宇宙学效应,Minkowski 时空和 Poincaré 不变性就是相对论性物理学的理论和实验分析的框架.所有实验,只要不涉及引力和宇宙学,与此符合得非常好.如在第 1 节中所述,时空测量、同时性的定义以及一些基本的物理量的定义,全都基于狭义相对性原理和 Poincaré 不变性,特别是其中的时空平移不变性.在场论中,不同物理性质的场可以看作是 Poincaré 群的不可约表示,这些表示以 Poincaré 群的两个 Casimir 算子

$$C_1 \coloneqq \eta^{ij} P_i P_j, \quad (2)$$

$$C_2 \coloneqq \eta^{ij} S_i S_j, S_i \coloneqq \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} P^j L^{kl} \quad (3)$$

的本征值来表征,这两个值分别是质量平方 m^2 和质量自旋(平方) $m^2 s(s+1)$.这里 $P^i = \eta^{ij} P_j$, $L^{jk} = \eta^{jr}\eta^{ks} L_{rs}$;$P_i$, L_{jk} 分别是平移群和齐次 Lorentz 群的生成元,它们构成 Poincaré 代数.

然而,如果在这个实验室中又要进行与引力效应有关的实验、进行天文观测或者进行与宇宙背景有相互作用的实验——而且恰恰就是要测量这些相互作用的效应,那么,这类实验室中的观测者就同样会发现:河外星系红移表明宇宙在膨胀,而宇宙膨胀给出了时间箭头;微波背景辐射大体上可以代表宇宙背景空间的性质,不过要扣除我们的实验室相对于微波背景辐射的漂移.对于这类与宇观效应相关的实验和观测的结果的分析必定表明:爱因斯坦的狭义相对性原理对于这类效应不再成立;时间反演和时间平移不变性不再存在;适当扣除我们实验室的'漂移速度",并忽略原初扰动、在一定的近似下,宇宙背景空间是 3 维均匀各向同性的,具有 6 个参数的变换群;这样,宇宙背景时空的度规是 Robertson-Walker 度规:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \quad (4)$$

这里,$k=-1,0,1$,对应的空间对称性分别是 $SO(1,3)$,$E(3)$,$SO(4)$,$R(t)$ 是仅仅依赖于宇宙时 t 的标度因子,k 的值以及 $R(t)$ 的形式由宇宙中物质分布的能量动量张量通过爱因斯坦引力场方程决定.在这样的背景时空里,实际上就有优越速度了.

早在上世纪 60 年代初,微波背景辐射发现之前,Bondi 就根据对于河外星系红移的观测等,指出过优越速度的存在和时间箭头的出现这些问题.他认为:"在宇宙学和通常的物理学之间,看来存在着明显的冲突"[6].微波背景辐射发现之后,这类冲突越发尖锐.Bergmann 更明确地认为,在宇观尺度上,"相对性原理破坏了"[7].然而,我们在分析这类宇观效应时,又不得不用到以狭义相对性原理和 Poincaré 不变性为依据的基本物理量的定义.因此,问题在于这两者之间能否统一?一个局部实验室中的物理学家和天文学家,在什么意义下可以利用 Minkowski 时空和 Poincaré 不变性定义的物理量来分析从局部实验室得到的有关宇宙效应的数据和信息?在相对论体系中如何将二者统一起来?

下表列举了狭义相对性原理和宇宙学之间在一些基本问题上的对应.

狭义相对论	现代宇宙学
狭义相对性原理	宇宙学原理
Minkowski 度规	Robertson-Walker 度规
Poincaré 群	RW 度规的对称性
同时性的相对性	优越的宇宙时
无以太	CMB
物理定律没有时间箭头	宇宙演化作为时间箭头
…	…

通常认为，上面这些对应所反映的不一致，仅仅是对于两类不同的物理问题所引起的，而非本质的冲突——就像其他物理理论一样，常常可以用来研究具有不同对称性的物理系统.然而，必须强调，狭义相对论与现代宇宙学的关系并不那么简单.首先，两者都被看作是关于时空认识的理论，现代宇宙学赖以建立的基础——广义相对论是在狭义相对论的基础上建立起来的，而狭义相对论的一些极为重要的性质又明显与现代宇宙学的观测不相容，这说明在宇观尺度上，狭义相对论以及 Poincaré 不变的理论，失去了严格的概念基础.更重要的是，目前理论物理的一个趋势是将宇观尺度的物理与微观尺度的物理联系起来，并认为是它们由相同的物理规律来描述的.这就必须解决上述狭义相对论与现代宇宙学的冲突.然而，这在爱因斯坦相对论体系中却很难做到.事实上，如果能够把狭义相对性原理推广到常曲率时空，对于常曲率时空就不会存在这些问题；这对于如何进一步解决这些问题，提供了一定的启示[10,11].

2.2. Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难

现在，我们分析 de Sitter 时空中的 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难.我们知道，de Sitter 时空可以看作是在一个度规为 $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$ 的 5 维 Minkowski 时空中的一个 4 维伪球面 S_Λ：

$$S_\Lambda : \eta_{AB}\xi^A\xi^B = -R^2, \tag{5}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{AB}\mathrm{d}\xi^A\mathrm{d}\xi^B, \tag{6}$$

其中 $R^2 := 3\Lambda^{-1}$，$A, B = 0, \cdots, 4$.显然，方程(5)和(6)在 de Sitter 群 $\mathscr{G}_\Lambda = SO(1,4)$ 下不变.

考虑静态 de Sitter 宇宙，取坐标

$$\begin{aligned} \xi^0 &= (R^2 - r^2)^{1/2}\sinh(t_s/R), \\ \xi^4 &= (R^2 - r^2)^{1/2}\cosh(t_s/R), \\ \xi^1 &= r\sin\theta\cos\varphi, \xi^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \\ \xi^3 &= r\cos\theta, \end{aligned} \tag{7}$$

于是(6)变为静态 de Sitter 宇宙的线元

$$\mathrm{d}s^2 = (1 - r^2/R^2)\mathrm{d}t_s^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r^2/R^2} - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{8}$$

de Sitter 宇宙的静态度规显示，它存在视界[12]，视界的表面引力为 $\kappa_s = 1/R = H$，温度为 $T_H = (2\pi R)^{-1}$，视界熵为 $S = \pi R^2$.于是，空无一物、处处齐性的静态 de Sitter 宇宙看上去就像一个黑洞，这是为什么？什么是视界熵的‘微观起源”？这就是所谓 de Sitter 视界熵的佯谬.

陆启铿于 1970 年指出，在 de Sitter 时空中，存在一类特殊坐标(我们称之为 Beltrami 型坐标)[10,13]；如果用(5)式中的坐标 ξ^A 来表示，它们是：

$$x^i = R\frac{\xi^i}{\xi^4}, i = 0, \cdots, 3; \xi^4 \neq 0. \tag{9}$$

由方程(5)不难看出，这些坐标满足条件

$$\sigma(x) = \sigma(x, x) := 1 - R^{-2}\eta_{ij}x^ix^j > 0, \tag{10}$$

同时，de Sitter 时空变为 BdS-时空：

$$\mathrm{d}s^2 = (\eta_{ij}\sigma(x)^{-1} + R^{-2}\eta_{ik}\eta_{jl}x^kx^l\sigma(x)^{-2})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{11}$$

可以证明，它们在 de Sitter 群 $SO(1,4)$ 的具有共同分母的分式线性变换下不变.

陆启铿发现一个重要而有趣的事实：在这类坐标系中，de Sitter 时空中的测地线方程可以积分一次，得到坐标速度为常数的结果：

$$\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}s} = 0, p^i := m_\Lambda\sigma(x)^{-1}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}. \tag{12}$$

也就是说，沿测地线，坐标速度为常数，坐标加速度为零：

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = v^\alpha, \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = 0; \alpha = 1,2,3. \tag{13}$$

对于类光测地线，有类似的结果.

我们在下一节中会看到，在 BdS 时空中，所有这些性质都可以在坐标邻域衔接的意义上，大范围地定义.当 $\Lambda = 0$，即 $R \to \infty$ 时，所有这些都回到爱因斯坦狭义相对论中的相应表达式.这些在 BdS 时空中的性质对广义相对论提出如下问题：如果对于这些常曲率时空，我们仍然采用在狭义相对论中关于坐标系的约定，那么，Beltrami 坐标是否应该具有特殊的意义呢？我们知道，BdS 是具有宇宙学常数的真空爱因斯坦方程的解，其时空是弯曲的，在 BdS 的这类坐标中竟然存在‘匀速直线’类型的运动；而在广义相对论中，时空弯曲表明其中存在引力.这就是陆启铿早在 1970 年发现的问题，我们称之为 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难.

不仅如此，很容易得到 Beltrami 时间和静态 de Sitter 宇宙的宇宙时之间的关系：

$$x^0 = R\tanh(t_s/R). \tag{14}$$

显然，对于虚静态宇宙时 it_s，具有周期并与视界的 Hawking 温度 T_H 成反比．而对于虚 Beltrami 时 ix^0，由于时间轴是直线，因而没有周期，或者周期为无限大．如果有限温度场论仍然成立，那么 BdS-时空的视界的温度就应该是零．值得指出的是，这个时间关系(14)与狭义相对论中的 Minkowski 时间与 Rindler 时间之间的关系非常相似！这是涉及 Beltrami 坐标的另一个问题，也值得考虑．

3．de Sitter 不变的狭义相对论

3.1．基本原理，Beltrami 坐标、度规和 de Sitter 不变性

基于 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难以及 de Sitter 时空的 Beltrami 模型[10,11]，我们提出两条基本原理．狭义相对性原理：在 BdS-时空中存在一类特殊的坐标系，称为惯性坐标系，在其中自由粒子和光信号作匀速直线运动，即惯性运动；除引力以外的所有物理规律，在这类惯性坐标系之间的变换下形式不变．不变普适常数假定：在 BdS 时空中存在两个普适常数，光速 c 和长度 R．如果对于 BdS-时空，我们仍然采用在狭义相对论中关于惯性坐标系的约定，那么，Beltrami 坐标就应该是惯性坐标．第一个原理在形式上与狭义相对论中的狭义相对性原理基本上是一致的．第二个假定是狭义相对论中光速不变假定的推广，即除光速 c 是普适常数外，还有一个具有长度量纲的普适常数 R，即是 BdS-时空的曲率半径．

其实，Fock 等早就证明[14]：在惯性坐标系 S 和 S' 之间，将匀速直线运动变为匀速直线运动的最一般的变换

$$x'^i = f^i(x^j), x^0 = ct, i, j = 0, \cdots, 3, \tag{15}$$

是具有共同分母的分式线性变换．这里，出现了第一个普适常数 c．如果具有这类惯性系的 4-维时空具有度规，那么按照上述狭义相对性原理，这个度规就应该在这类变换下不变；而且这类变换应该具有 10 个任意参数：4 个对应于时空"平移"，3 个对应于推进(boost)，3 个对应于空间旋转．这样，根据最大对称空间的理论(参见文献[15])，这类时空恰恰分别就是时空曲率为正、零和负的 de Sitter 时空、Minkowski 时空和反 de Sitter 时空；于是对于 dS/AdS 时空，必然出现另外一个普适常数：曲率半径 R．

在本文中，我们集中考虑 de Sitter 时空．按照上节中的伪超球面表述(5)，保持其不变的变换是 de Sitter 群的(线性)旋转变换．而表述为 Beltrami 坐标(9)，这些变换恰恰成为具有相同分母的分式线性变换．需要进一步考察的是，Beltrami 坐标以及它们之间的变换是否能够在 BdS-时空中整体定义．

事实上，可以证明 Beltrami 坐标可以一个邻域、一个邻域地覆盖 S_Λ．如上节一样，这样建立的模型记做 $BdS \simeq S_\Lambda$．对于 BdS，至少用 8 个邻域 $U_{\pm\alpha} := \{\xi \in S_\Lambda : \xi^\alpha \gtrless 0\}$，$\alpha = 1, \cdots, 4$．例如，在上一节引进的坐标邻域为 $U_{\pm 4}$，Beltrami 坐标为

$$x^i|_{U\pm 4} = R\frac{\xi^i}{\xi^4}, i = 0, \cdots, 3; \tag{16}$$

$$\xi^4 = \pm\left((\xi^0)^2 - \sum_{a=1}^{3}(\xi^a)^2 + R^2\right)^{1/2} \neq 0. \tag{17}$$

在邻域 $U_{\pm a} = \{\xi^A | \xi^a \gtrless 0\}(a = 1,2,3)$ 中，

$$y^{j'}|_{U\pm a} = R\frac{\xi^{j'}}{\xi^a}, j' = 0, \cdots, \hat{a}, \cdots, 4;$$

$$\xi^a \neq 0, \tag{18}$$

这里 $\hat{a}$ 表示去掉 a．重要的是，在所有的坐标邻域的交集中坐标变换都在 de Sitter 群 $SO(1,4)$ 的具有共同分母的分式线性变换(见后)之中．

类似于上节，在每一个邻域中都有 Beltrami 坐标条件(10)和 Beltrami 度规(11)．在 Beltrami 坐标下，de Sitter 群 $SO(1,4)$ 表现为具有相同分母的分式线性变换

$$\begin{aligned} x^i \rightarrow \tilde{x}^i &= \pm\sigma(a)^{1/2}\sigma(a,x)^{-1}(x^j - a^j)D_j^i, \\ D_j^i &= L_j^i + R^{-2}\eta_{jk}a^k a^l(\sigma(a) \\ &\quad + \sigma(a)^{1/2})^{-1}L_l^i, \\ L &:= (L_j^i)_{i,j=0,\cdots,3} \in SO(1,3), \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\sigma(a,x) = 1 - R^{-2}\eta_{ij}a^i x^j$．该变换把 BdS 时空中的点 $A(a^j)$ 变为坐标原点．在这样的变换下，Beltrami 坐标条件(10)和 Beltrami 度规(11)是不变的．

由于坐标变换也是具有相同分母的分式线性变换，Beltrami 坐标条件和度规以及具有相同分母的分式线性变换(19)在时空 BdS 中是整体定义的．这是狭义相对性原理的基础和要求．此外，$\sigma(x) = 0$ 是 BdS 时空的边界 $\partial(\mathrm{BdS})$，它也是 de Sitter 群 $SO(1,4)$ 下不变的．

3.2．类时、类光和类空间隔，光锥方程

可以证明，对于 BdS 中的一对分离事件 $A(a^i)$

和 $X(x^i)$，

$$\Delta_\Lambda^2(A,X) = R^2[\sigma^{-1}(a)\sigma^{-1}(x)\sigma^2(a,x) - 1] \quad (20)$$

在群 $\mathscr{G}_\Lambda$ 的分式线性变换(19)下是不变的. 于是，一对事件(A，B)称为类时，类光或类空事件对的定义为

$$\Delta_\Lambda^2(A,B) \gtreqless 0. \quad (21)$$

事件 A 和 B 之间的类时或类空的固有长度为 $\mathscr{T}ds$ 对于测地线段$\overline{AB}$的积分：

$$S_{\rm timelike}(A,B) = R\sinh^{-1}(|\Delta_\Lambda(a,b)|/R), \quad (22)$$

$$S_{\rm spacelike}(A,B) = R\arcsin(|\Delta_\Lambda(a,b)|/R), \quad (23)$$

这里，对于类时或类空分别有 $\mathscr{T} = 1, -i$.

可以证明，以事件 A 为固定点，所有与之间隔为类光的事件 X 构成以 A 为顶点的光锥为下式表述的零曲面：

$$\mathscr{F}_\Lambda = R\{\sigma(a,x) \mp [\sigma(a)\sigma(x)]^{1/2}\} = 0. \quad (24)$$

它满足零超曲面条件

$$g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\bigg|_{f=0} = 0,$$

这里 $g^{ij} = \sigma(x)(\eta^{ij} - R^{-2}x^ix^j)$是 Beltrami 度规之逆.

3.3. 粒子和光讯号的匀速直线运动，可观测量和 Einstein 公式

在上节我们已经看到，在 BdS 时空中，沿测地线的运动坐标速度为常数，因而，可以看作是匀速直线运动. 在这一小节中，我们进一步证明这一点，并且给出粒子和光讯号的可观测量.

在 Beltrami 时空中，一个质量为 m_Λ 的粒子应该沿 Beltrami 度规的类时测地线运动. 在上节中已经证明，测地线方程等价于

$$\frac{dp^i}{ds} = 0, p^i := m_\Lambda\sigma(x)^{-1}\frac{dx^i}{ds} = C^i = {\rm const.} \quad (25)$$

这意味着，在初始条件

$$x^i(s = 0) = b^i, \frac{dx^i}{ds}(s = 0) = c^i$$

和约束

$$g_{ij}(b)c^ic^j = 1 \quad (26)$$

下，可以引入一新的参数 $w = w(s)$使得测地线是一直线

$$x^i(w) = c^iw + b^i. \quad (27)$$

这一性质类似于 Lobachevski 平面的 Beltrami 模型中的直线. 参数 w 可以积分出来，为

$$w(s) = \frac{R\sinh\frac{s}{R}}{\frac{\eta_{ij}c^ib^j}{R\sigma(b)}\sinh\frac{s}{R} + \cosh\frac{s}{R}}. \quad (28)$$

在这其中有一个特殊情形，即 $\eta_{ij}c^ic^j = 0$. 由于约束条件(26)总是满足，在此情形下有$\frac{\eta_{ij}c^ib^j}{R\sigma(b)} = \pm 1$，因此上式可以进一步化简为 $w(s) = Re^{\mp s/R}\sinh\frac{s}{R}$.

类似地，一光讯号沿零测地线传播. 形式上，零测地线方程也有首次积分

$$\sigma^{-1}(x)\frac{dx^i}{d\tau} = {\rm const.} \quad (29)$$

此时，条件 $ds = 0$ 成立，τ 是仿射参数. 在初始条件

$$x^i(\tau = 0) = b^i, \frac{dx^i}{d\tau}(\tau = 0) = c^i \quad (30)$$

和约束

$$g_{ij}(b)c^ic^j = 0 \quad (31)$$

下，零测地线同样可以表示为直线

$$x^i = c^iw(\tau) + b^i,$$

这里

$$w(\tau) = \frac{\tau}{1 + \nu_0\tau}, \quad (32)$$

其中

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{|\eta_{ij}c^ic^j|}{R^2\sigma(b)}}.$$

当 $\eta_{ij}c^ic^j = 0$ 即 $\nu_0 = 0$ 时，w 本身正是仿射参数 τ.

于是，对于自由粒子和光讯号而言，坐标速度的分量分别是常数：

$$\frac{dx^a}{dt} = v^a; \frac{d^2x^a}{dt^2} = 0; a = 1,2,3. \quad (33)$$

当然，这些恰恰表明 Beltrami 坐标系的确具有惯性坐标系的物理意义. 同时，惯性定律，即自由粒子保持匀速直线运动，在 BdS 时空中成立.

现在，我们来定义粒子的可观测量. 由(25)式，可自然地将沿测地线的守恒量 p^i 定义为具有质量 m_Λ 的自由粒子的 4-动量及其零分量为能量. 不过，此时的 4-动量不再是 4-矢量，而是一赝矢量. 进而，对于自由粒子按照如下方程定义的 L^{ij}，

$$L^{ij} = x^ip^j - x^jp^i; \frac{dL^{ij}}{ds} = 0 \quad (34)$$

是守恒的，它们可以称为该粒子的 4-角动量，不过它们也不再是一个反对称张量，而是一个反对称赝张量. 不过，在 S_Λ 中，p^i 和 L^{ij}构成自由粒子的 5-维角动量 $\mathscr{L}^{AB}$：

$$\mathscr{L}^{4j} = -\mathscr{L}^{j4} = Rp^j, \mathscr{L}^{ij} = L^{ij}. \quad (35)$$

显然，它们是守恒量. 另一方面，可以验证

$$\mathscr{L}^{AB} := m_\Lambda\left(\xi^A\frac{d\xi^B}{ds} - \xi^B\frac{d\xi^A}{ds}\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}^{AB}}{\mathrm{d}s}=0. \tag{36}$$

这表明,在 de Sitter 伪球面 S_Λ 上,上式定义了沿'大圆'的匀速运动.实际上,Beltrami 坐标的几何意义就是一个推广的'球心'投影:4-维伪球面 S_Λ 上的点 ξ^A 被投影到超平面 $\xi^4=R$ 上以后,得到的对应点就是 ξ^A 的 Beltrami 坐标.按照这样的'球心'投影,匀速"大圆'运动恰恰与 BdS 时空中的匀速直线运动一一对应;只不过,为了保持时空的定向性,伪球面上的对径点不认同为同一点.

相应地,在 BdS 中,自由粒子的著名的爱因斯坦公式应该推广为:

$$-\frac{1}{2R^2}\mathscr{L}^{AB}\mathscr{L}_{AB}=E^2-P^2-\frac{1}{2R^2}L^2=m_\Lambda^2, \tag{37}$$

其中 $\mathscr{L}_{AB}=\eta_{AC}\eta_{BD}\mathscr{L}^{CD}$,上式引入的 m_Λ 为自由粒子的惯性质量.在经典水平上,惯性质量与能量、动量和角动量等都是很好定义的.可以进一步证明,m_Λ^2 是 de Sitter 群 $\mathscr{G}_\Lambda$ 的第一 Casimir 算子的本征值[16].

总之,可以以这种自洽的方式定义自由粒子的惯性可观测量,这些定义与其他 de Sitter 时空中的有关定义均不相同.这些性质显示,与牛顿和爱因斯坦的惯性运动的观念相似,BdS-时空中的自由粒子运动恰好也是具有匀速的惯性的运动.进而,具有 Beltrami 度规的坐标系也是惯性坐标系,位于这类坐标系原点的观测者就是惯性观测者.

3.4. Beltrami 同时性和时空测量

我们知道,在物理测量中,有关时空的测量是最基本的,而为了进行时空测量,我们首先需要对钟即定义同时性.否则,上述内容就难以与实际的物理测量建立联系.

在狭义相对论中,Minkowski 坐标与狭义相对性原理相联系,具有测量意义.即在 Minkowski 坐标系中时间坐标的差表示时间间隔,空间坐标的差表示空间间隔.与爱因斯坦的狭义相对论相似,我们可以定义两个事件 A 和 B 是同时的,当且仅当这两个事件的 Beltrami 时间坐标 x^0 是相同的:

$$a^0:=x^0(A)=x^0(B)=:b^0. \tag{38}$$

正是关于这个同时性,沿测地线运动的自由粒子具有均匀速度.这个同时性所定义的时空度规的 1 + 3 分解为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=N^2(\mathrm{d}x^0)^2-h_{ab}(\mathrm{d}x^a+N^a\mathrm{d}x^0)\\&\quad\times(\mathrm{d}x^b+N^b\mathrm{d}x^0).\end{aligned} \tag{39}$$

延迟函数、位移矢量和在 3 维超曲面 $\sum_c$ 给出诱导度规分别是

$$\begin{aligned}N&=\{\sigma_{\Sigma_c}(x)[1-(x^0/R)^2]\}^{-1/2},\\N^a&=x^0x^a[R^2-(x^0)^2]^{-1},\\h_{ab}&=\delta_{ab}\sigma_{\Sigma_c}^{-1}(x)-[R\sigma_{\Sigma_c}(x)]^{-2}\\&\quad\times\delta_{ac}\delta_{bd}x^cx^d,\end{aligned} \tag{40}$$

其中 $\sigma_{\Sigma_c}(x)=1-(x^0/R)^2+\delta_{ab}x^ax^b/R^2$,$\delta_{ab}$ 是 Kronecker δ-符号,$a,b=1,2,3$.在每一 Beltrami 坐标系原点的邻域内,3 维超曲面 $\sum_c$ 相当于一个 Cauchy 面.特别是当 Beltrami 时间 $x^0=0$ 时,$\sigma_{\Sigma_c}(x)=1+\delta_{ab}x^ax^b/R^2$,值得注意的是,这个超曲面 $\sum_c$ 局部同构于 3 维球.

值得注意的是,BdS-时空存在视界.一般说来,视界为顶点 $A(a)$ 在边界上的光锥(24)式;即 $A(a)\in\partial(\mathrm{BdS})$.这样,以 $A(a)$ 为顶点,$X(x)$ 为动点的视界满足如下方程[17]:

$$\begin{aligned}&\lim_{x'\to a}\sigma(x',x)\to0,\\&\lim_{x'\to a}\sigma(x')\to0.\end{aligned} \tag{41}$$

例如,$|a^0|=R$,$\delta_{\tau s}a^ra^s=0$,则 $x^0=R$ 而 x^i 任意,为 BdS 中过 x' 的观测者的视界.这样,当 $|x^0|>R$ 时,x^0 不再是时间坐标,此时 1 + 3 分解的含义也要相应地变化.不过,只要 x^0 仍然是时间坐标,即便 $x^0\neq0$,3维超曲面 $\sum_c$ 仍然局部同构于 3 维球 S^3.

Beltrami 同时性在每一坐标片中定义了实验室中的同时性.按照狭义相对论和类似于狭义相对性原理的精神,Beltrami 坐标在 BdS 时空的实验室中,以这种方式定义标准钟和标准尺.为了测量一个过程的时间和一个物体的大小,我们可以仅仅需要比较 Beltrami 坐标定义的时间和尺度.

3.5. de Sitter 不变的粒子动力学理论

3.3 节已指出,当粒子作惯性运动时,$\mathscr{L}^{AB}$ 为守恒量.当粒子不作惯性运动时,我们可以引入一个 5-维力矩 $\mathscr{M}^{AB}$ 使

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}^{AB}}{\mathrm{d}s}=\mathscr{M}^{AB}. \tag{42}$$

方程(42)就是 BdS 上粒子运动的动力学方程在 5 维伪超球面上的表示.仿照(35),我们可以定义 4 维力和 4 维力矩,

$$f^i=R^{-1}\mathscr{M}^{4i}=-R^{-1}\mathscr{M}^{i4},M^{ij}=\mathscr{M}^{ij}. \tag{43}$$

于是,BdS 上粒子运动的动力学方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}s} = f^i, \frac{\mathrm{d}L^{ij}}{\mathrm{d}s} = M^{ij}. \qquad (44)$$

需要特别说明的是,在 dS 不变狭义相对论中 p^i 不是矢量,而是权为 2/5 的赝矢量.与 p^i 一样,这里的力也不是一个矢量,而是一个 2/5 的赝矢量.可以证明,上述的力矩与力满足通常的关系

$$M^{ij} = x^i f^j - x^j f^i. \qquad (45)$$

可以证明,BdS 中的粒子力学在 Beltrami 坐标及其分式线性变换(19)下也是形式不变的.

4. 固有时测量,Robertson-Walker 型度规,Mach 原理和宇宙学常数作为惯性起源

4.1. 固有时测量,Robertson-Walker 型度规

在 BdS-时空中的静止观测者(即在 de Sitter 时空中,相对任意给定 Beltrami 坐标系静止的观测者),如果利用其固有时进行测量会如何?这是既有物理意义,又应该探讨的问题.

静止在 Beltrami 坐标系中的钟(x^a = const.,a = 1,2,3,)的固有时 τ 与 Beltrami 坐标时 x^0 的关系为

$$\tau = R\sinh^{-1}(R^{-1}\sigma^{-1/2}(x)x^0). \qquad (46)$$

对于 BdS 时空中的静止观测者,定义其固有时相同的事件为同时发生的事件,我们称之为固有时的同时性.可以证明,这些固有时同时的事件满足

$$x^0\sigma^{-1/2}(x,x) = \xi^0 \doteq R\sinh(R^{-1}\tau) = \mathrm{const}. \qquad (47)$$

此时,3 维同时类空超曲面(记做$\sum_\tau$)上的度规可定义为

$$\mathrm{d}l^2 = -\mathrm{d}s^2_{\Sigma_\tau}, \qquad (48)$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2_{\Sigma_\tau} &= R^2_{\Sigma_\tau}\mathrm{d}l^2_{\Sigma_\tau 0},\\
R^2_{\Sigma_\tau} &\doteq \sigma^{-1}(x,x)\sigma_{\Sigma_\tau}(x,x) = 1 + (\xi^0/R)^2,\\
\sigma_{\Sigma_\tau}(x,x) &\doteq 1 + R^{-2}\delta_{ab}x^b x^b > 0,\\
\mathrm{d}l^2_{\Sigma_\tau 0} &\doteq \{\delta_{ab}\sigma^{-1}_{\Sigma_\tau}(x) - [R\sigma_{\Sigma_\tau}(x)]^{-2}\\
&\quad \times \delta_{ac}\delta_{bd}x^c x^d\}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b. \qquad (49)
\end{aligned}$$

值得注意,$\mathrm{d}l^2_{\Sigma_\tau 0}$ 是半径为 R 的 3 维球的 Beltrami 度规,即$\sum_\tau$ 为具有正曲率的 3 维球.

应该指出,这个同时性的定义与 de Sitter 时空中的'完美'宇宙学原理有密切关系.事实上,一旦惯性观测者采用这类固有时 $\tau_{\Lambda>0}$ 作为时间坐标,并定义相应的同时性,他们的度规就从 Beltrami 度规(11)立即变为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \cosh^2(R^{-1}\tau)\mathrm{d}l^2_{\Sigma_\tau 0}, \qquad (50)$$

这恰恰是具有正空间曲率的 Robertson-Walker 类型的度规,τ 成为'宇宙时",而且这个同时性的定义对于 BdS-时空是整体的.这类观测者也就成为共动观测者.

应该强调,这两类同时性的定义,在不同的测量中具有意义.Beltrami 同时性的定义涉及的是 BdS-时空中一个个坐标邻域中实验室的测量,并与狭义相对性原理密切相关.而固有时同时性的定义涉及与"完美'宇宙学原理相关的观测.显然,Beltrami 度规及其 Robertson-Walker 型度规(50)之间的对应是有意义的.它以明显的方式将实验室中的 Beltrami 坐标时 x^0 和'宇宙时"τ 联系起来.这对于解决(没有时间箭头的)描述与相对性原理密切相关的物理规律的惯性坐标系的时间与具有时间箭头的'宇宙时"之间的关系问题,带来了新的启示.这个问题,其实就是相对性原理和宇宙学原理之间的关系的一种表现.另外,这也表明 3 维宇宙背景空间是 S^3,而不是平坦的.与平坦的偏离很小,仅为宇宙学常数 Λ 的量级.在局部,这与 Beltrami 同时性给出的 Beltrami 度规 1 + 3 分解的结果是一致的.应该指出,关于宇宙空间的闭性是与具有平坦性的标准宇宙模型有所不同的,具有典型意义的性质.

当然,BdS-时空并不是一个真实的宇宙模型,因为这里完全没有考虑物质的引力效应,也给不出大爆炸模型.不过,如果我们的宇宙的渐近行为是 de Sitter 时空的话,这种比较仍然具有定性的意义;并给出一些有趣的暗示.事实上,这个性质多少和 WMAP[4] 关于微波背景辐射的功率谱的暗示是一致的;因而,这一性质也有望经受有关大尺度数据的进一步的检验.

4.2. Mach 原理,以及宇宙学常数作为惯性起源

上述分析表明,在 BdS-时空的 de Sitter 不变的狭义相对论的意义下,惯性观测者只要采用静止在 Beltrami 空间坐标原点的钟的固有时作为新的时间,就可以描述宇宙学意义上的观测结果.在 BdS-时空的 de Sitter 不变的狭义相对论中,狭义相对性原理和'完美'宇宙学原理之间,存在着内在的联系.这类观测者既可以采用 Beltrami 坐标时进行有关惯性运动和可观测量的观测;也可以利用其静止在 Beltrami 空间坐标原点的时钟的固有时作为'宇宙时",对于与'完美'宇宙学原理一致的共动观测的结

果进行描述.

值得指出的是,这暗示着,宇宙学常数起着 BdS-时空中惯性定律的起源或者惯性运动和惯性坐标系的起源(简称'惯性起源')的作用.这是因为,恰恰是由于宇宙学常数的存在,才存在狭义相对性原理和'完美'宇宙学原理之间的关系,因而也就存在 BdS-时空中 Beltrami 度规下的惯性定律,亦即存在惯性坐标系,在其中自由粒子和光讯号进行惯性运动.

我们知道,惯性定律的起源,即惯性运动和惯性坐标系的起源问题一直是一个近代物理学史上没有解决的问题.这个问题与惯性质量的起源既有联系,又有区别.我们指出,在 BdS-时空中的 de Sitter 不变的狭义相对论的框架内,宇宙学常数起着一个非常重要的作用,即提供了狭义相对性原理和宇宙学原理之间的桥梁;也作为 Beltrami 坐标作为惯性定律,或者惯性坐标以及其中惯性运动的起源.而且,由于宇宙学常数的存在,de Sitter 群的第一 Casimir 算子的本征值也给出了惯性质量 m_Λ 的 de Sitter 不变的分类.

当然,惯性起源问题与'局部惯性运动'和'局部惯性系'的起源,也应该有所区别.后者与广义相对论中的等效原理密切相关.广义相对论中的测地线运动,其实是一类'局部惯性运动',即一般说来仅仅在一个时空点或过该时空点的邻域内一条世界线上,可以把联络系数消去,从而使测地线运动相应于自由落体运动.按照 Mach 的想法,惯性的起源应该与远方星体的总和有关.Einstein 曾经提出 Mach 原理[18],按照这一原理,不必再区分惯性运动和局部惯性运动,它们的起源和惯性质量的起源由能量动量张量决定的度规场决定.然而,实验并不支持这一原理.Einstein 在去世前一年,放弃了他所提出的 Mach 原理.

考虑到近来关于 Ia 型超新星和宇宙微波背景辐射的观测结果及其理论分析,并把惯性质量的起源问题以及惯性运动和局部惯性运动的起源问题区分开来,Mach 原理应该重新表述为:惯性运动和局部惯性运动应该主要由暗物质,暗能量和/或宇宙学常数决定,在大尺度范围内,星体和通常的物质仅仅起到很小的作用.作为局部引力场的源,后者的作用应该更为明显.如果这样一个重新表述的 Mach 原理是正确的话,作为其逻辑推论,对于没有任何物质,仅仅存在最简单的暗能量的宇宙学常数的'空'的 de Sitter 时空,如果存在惯性运动,宇宙学常数就应该是其起源.本文关于在 BdS-时空中的 de Sitter 不变的狭义相对论的意义下,宇宙学常数作为惯性的起源的论述,恰恰说明这一重新表述的 Mach 原理的逻辑推论是正确的.

5. 结 语

在这篇文章中,我们分析了爱因斯坦相对论体系中的狭义相对性原理和宇宙学原理之间的关系,以及 de Sitter/反 de Sitter 时空中的 Beltrami-de Sitter-陆启铿疑难.前一关系反映了局部实验室和天文台对于(有关相对性原理的)物理实验数据和与宇观效应有关的数据处理和理论分析之间存在的问题.后一疑难尽管反映的是常曲率时空中的特殊问题,但是却具有普遍意义.我们指出,如果对于这些常曲率时空仍然采用在狭义相对论中关于坐标系的约定,那么,只要把狭义相对性原理推广到这些时空[10],进而在 de Sitter/反 de Sitter 时空的 Beltrami 模型[11]的基础上建立 de Sitter 不变的狭义相对论,这些关系和疑难就在一定意义下迎刃而解.同时,对于自由粒子和光讯号,可以定义一组守恒的可观测量,它们之间满足推广的 Einstein 质量-能量-动量关系.进而,我们给出了 BdS 时空中 dS 不变的粒子动力学方程.

我们指出,对于 BdS 时空中的惯性观测者,可以利用 Beltrami 时间 x^0 和相应的同时性进行与惯性运动与可观测量有关的物理观测.另一方面,也可以利用相对于静止在 Beltrami 空间坐标原点的钟的固有时,以及相应的同时性,进行与'完美'宇宙学相容的共动观测.在 Beltrami 时间和作为'宇宙时'的固有时之间,存在着明确的关系.我们指出,相应于 Beltrami 时间坐标,可以得到 BdS-时空中 Beltrami 度规的 $1+3$ 分解;相应于静止在 Beltrami 空间坐标原点的钟的固有时的时间坐标,Beltrami 度规自然化为 Robertson-Walker 类型的度规.这就从一个新的角度给出了狭义相对性原理和'完美'宇宙学原理的内在联系,从而不存在在相对论体系中狭义相对性原理-宇宙学原理问题.值得注意的是,对于 Robertson-Walker 类型度规而言,3 维(宇宙)空间是闭的,对于平坦的偏离仅仅为 Λ 的量级.作为真实宇宙的渐近行为,这个定性的性质已经多少为 WMAP 第一年的数据[4]所证实,而且应该经受其未来大尺度数据的

进一步检验.

依据最近的观测事实，将惯性质量的起源与惯性的起源和局部惯性的起源加以区分，我们重新表述了 Mach 原理. 作为这个原理的一个逻辑推论，对于没有任何物质的 de Sitter 时空，如果存在惯性运动的话，其起源就应该是宇宙学常数. de Sitter 不变的狭义相对论恰恰表明，在 BdS-时空中，宇宙学常数正是起到这样的作用.

应该指出，BdS-时空中一些重要的性质，在本质上都与爱因斯坦狭义相对论的有关性质类似 而且当 Λ 忽略不计时，回到狭义相对论. 不过，此时狭义相对性原理与宇宙学原理之间的问题和其它疑难，将在爱因斯坦相对论体系的理论框架中重新出现. 有关惯性运动和惯性定律起源的问题，也仍然有待解决.

最后，还应该指出，由于 Beltrami 坐标时 x^0 的定义，前面得到它与静态 de Sitter 宇宙的宇宙时 t_s 之间的关系表明，如果有限温度场论仍然成立的话，那么在 BdS-时空中的场论是零温的，而静态 de Sitter 宇宙中的场论却是有限温度的，其温度恰恰是 Hawking 辐射的温度，与其虚时周期成反比. 这将对于 de Sitter 视界熵的疑难给予新的解释[17]. 这与 de Sitter 不变的狭义相对论的观点是一致的. 对于这个问题，我们将在别处深入探讨.

致谢　感谢陆启铿教授、常哲教授、朱传界教授、潘建中教授和王世坤教授等的有意义的讨论和有价值的意见. 我们也对 G. W. Gibbons 和 J. Nester 教授对于一些问题的讨论和建议表示感谢. 潘建中教授参加了部分工作，特别是关于无挠 Riemann 几何在局部是否等价于欧氏几何的定理，是他告诉我们的. 张元仲教授对于本文的初稿提出了一些有意义的意见，我们也对此表示感谢.

[1] Sachs R 1962 *Phys Rev* **128** 2851；Geroch R P 1977 *Asymptotic Structure of Space-time*，ed. Esposito F P and Witten L（Newk Plenum），p1
Bondi H，van der Burg M G J and Matzner A W K 1962 *Proc. Roy. Soc.* London A **269** 21
Sachs R 1962 *Proc. Roy. Soc.* London A **270** 103
[2] Einstein A 1925 *Neu. Rund.* **1** 16
[3] Kobayashi S and Nomizu K 1963 *Foundations of Differential Geometry* Ⅰ（New York：Wiley，Interscience）p193
[4] Bennett C L *et al* 2003 *Astrophys J. Suppl.* **148** 1
Page L 2003 astro-ph/0306381
[5] Strominger 2002 A Talk at the String Satellite Conference to ICM，Beijing
[6] Bondi H 1962 *Observatory*（London）**82** 133
[7] Bergmann P G 1970 *Found. Phys.* **1** 17
[8] Rosen N 1971 *Phys. Rev.* D **3** 2317
[9] Look K H 1970 *Why the Minkowski metric must be used*？unpublished（in Chinese）[陆启铿 1970 为什么一定要用 Minkowski 度规？未发表]
[10] Look K H，Tsou C L and Kuo H Y 1974 *Acta Phys. Sin.* **23** 225（in Chinese）[陆启铿、邹振隆、郭汉英 1974 物理学报 **23** 225
Kuo H Y 1977 Kexue Tongbao **22** 487（in Chinese）[郭汉英 1977 科学通报 **22** 487]
Tsou C L，Chen C S，Huang P，Zhang L N and Kuo H Y 1979 *Sci. Sin.* 588（in Chinese）[邹振隆、陈建生、黄　硼、张历宁、郭汉英 1979 中国科学 588]
Zhang L N and Tsou C L 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 35（in Chinese）[张历宁、邹振隆 1981 物理学报 **30** 35]
Kuo H Y 1982 *Proc. 2nd Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* ed. by Ruffini R（Amsterdam：North-Holland Pub.）p801
Look K H，Tsou C L and Kuo H Y 1980 *Nature*（Shanghai，Suppl）*Modern Physics* **1** 97（in Chinese）[陆启铿、邹振隆、郭汉英 1980 自然杂志增刊（上海），近代物理，**1** 97]
Guo H Y 1989 *Nucl. Phys.* B（Proc Suppl）**6** 381 and references therein
[11] Guo H Y，Huang C G，Xu Z and Zhou B 2004 *Mod. Phys. Lett.* A **19** 1701
[12] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2738
[13] Beltrami E 1868 *Opere. Mat.* Ⅰ 374
[14] Fock V 1964 *The Theory of Space-Time and Gravitation*（London：Pergamon）
[15] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology：Principles and Applications of the General Theory of Relativity*（Now York：John Wiley & Sons，Inc.）.
[16] Gürsey F 1969 *Introduction to Group Thoery*，*in Relativity*，*Groups and Topology* ed. DeWitt C and DeWitt B，（Glosgow：Blackie and Son Ltd）
[17] Guo H Y，Huang C G and Zhou B 2004 hep-th/0404010
[18] Einstein A 1918 *Annalen der Physik* **55** 240

Beltrami-de Sitter spacetime and de Sitter invariant special relativity*

Guo Han-Ying(Kuo Han-Ying)[1)2)†] Huang Chao-Guang[1)2)‡] Tian Yu[2)§] Xu Zhan[3)♪] Zhou Bin[1)2)‖]

[1)] (*Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

[2)] (*Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

[3)] (*Physics Department and Center for Advanced Study, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

(Received 15 September 2004; revised manuscript received 14 October 2004)

Abstract

The puzzle on the relation between principle of special relativity and cosmological principle, as well as the Beltrami-de Sitter-Lu puzzle on de Sitter/anti-de Sitter spacetimes in Einstein's framework of relativity are analyzed. It is possible to generalize the principle of special relativity to the spacetimes with constant curvature and to establish the kinematics and particle dynamics for the special relativity in de Sitter/anti-de Sitter spacetimes with Beltrami metric. In such a Beltrami system by the Beltrami coordinate simultaneity is just an inertial system, the corresponding observers are inertial observers, the inertial law is valid for test particles and light signals, and observables can be well defined which conserve and satisfy the generalized Einstein's formula. In addition to the Beltrami coordinate simultaneity there is also the proper-time simultaneity for the comoving observations and thus the Beltrami metric is transformed into the Robertson-Walker-like metric which gives a closed 3-dimensional space and its deviation from flatness is of the order of cosmological constant. Therefore, it turns out that in such a kind of special relativity the relativity principle has an intrinsic affiliation with the "perfect" cosmological principle and without any puzzle. Furthermore, based on the recent astronomical observations, the Mach's principle is restated and it is showed that the cosmological constant acts just as an origin of inertial motions in the de Sitter-invariant special relativity on Beltrami-de Sitter spacetime.

Keywords: principle of special relativity, cosmological principle, de Sitter-invariant special relativity, Beltrami-de Sitter spacetime, simultaneity, Mach's principle, origin of inertial motion

PACC: 0330, 9880D, 0240

* Project supported in part by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90103004, 10175070, 10375087, 10373003, 10347148 and 90403023).

† Email: hyguo@itp.ac.cn

‡ Email: huangcg@mail.ihep.ac.cn

§ Email: ytian@itp.ac.cn,

♪ Email: zx-dmp@mail.tsinghua.edu.cn

‖ Email: zhoub@itp.ac.cn