第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2505-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.6,June,2005

试探方程法及其在非线性发展方程中的应用

刘成仕†

(大庆石油学院数学系,大庆 163318)

(2004 年 8 月 20 日收到;2004 年 10 月 27 日收到修改稿)

提出了一种比较系统的求解非线性发展方程精确解的新方法,即试探方程法. 以一个带 5 阶导数项的非线性发展方程为例,利用试探方程法化成初等积分形式,再利用三阶多项式的完全判别系统求解,由此求得的精确解包括有理函数型解,孤波解,三角函数型周期解,多项式型 Jacobi 椭圆函数周期解和分式型 Jacobi 椭圆函数周期解.

关键词:试探方程法,非线性发展方程,孤波解,Jacobi 椭圆函数,周期解

PACC:0340K

1. 引 言

已经提出了许多求解非线性方程的方法,如齐次平衡法[1—4],试探函数法[5,6],双曲函数展开法[7,8],混合指数法[9,10],椭圆函数展开法[11—15],sine-cosine 方法[16—17]以及分离变量法[18,19]等,对大量的非线性方程得到了丰富的精确解.另一方面,通过化所求方程为初等积分形式可系统求得一些非线性发展方程的精确行波解,有时甚至可求得全部精确行波解. 如 KdV 方程,非线性 Klein-Gordon 方程,Boussinesq 方程,mKdV 方程,对称长波方程,二阶 Benjamin Ono 方程等均可化成初等积分形式.但并不总是能做到这一点的,如 KK 方程,CDGSK 方程等并不能直接化成初等积分形式.本文提出了一种比较系统的求解非线性发展方程精确行波解的新方法,即试探方程法.对许多非线性发展方程,可由此化成初等积分形式,进而求得非常丰富的精确行波解,如 KK 方程,以及耦合 mKdV 方程组,变更 Boussinesq 方程组等,由此方法可求得的精确解包括有理函数型解,孤波解,三角函数型周期解,多项式型 Jacobi 椭圆函数周期解和分式型 Jacobi 椭圆函数周期解. 本文以一个带 5 阶导数项的非线性发展方程为例作了具体计算. 对于 KdV 方程,非线性 Klein-Gordon 方程,Boussinesq 方程,mKdV 方程,对称长波方程,二阶 Benjamin Ono 方程等的应用可类似作出,不再赘述.限于篇幅,对方程组的应用将在另文给出.

2. 试探方程法

考虑非线性发展方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xx},\cdots)=0. \tag{1}$$

求它的行波解

$$u=u(\xi_1),\xi_1=k(x-ct), \tag{2}$$

其中 k 和 c 分别为波数和波速.

试探方程法就是作像下面这样的可求解的试探方程

$$u_{\xi_1\xi_1}=F(u)=a_mu^m+a_{m-1}u^{m-1}+\cdots+a_1u+a_0, \tag{3}$$

将(2)和(3)以及由(3)导出的其他导数项代入(1)式,若能求得 m 和 $a_m,\cdots,a_0$ 的值,则(1),(2)式的求解化成(3)的求解,而(3)可化成初等积分形式,根据 $F(u)$的根的情况可以得到(3)式的精确解.其中 $F(u)$的根的分类可由多项式完全判别系统得到[20].

注 1 试探方程不止局限于(3)式的形式,只要它是可确定的并可求解的即可,当然这需要具体方程的指引.

3. 一类带 5 阶导数项的非线性发展方程

考虑如下方程[21]

†E-mail:chengshiliu-68@126.com

$$u_t = \varepsilon u_{xxxxx} + d_1 u u_{xxx} + d_2 u_x u_{xx} + d_3 u^2 u_x, \quad (4)$$

它包括 KK 方程，CDGSK 方程，五阶 KdV 方程等为特例，分别对应于参数 $\varepsilon, d_1, d_2, d_3$ 取值为 1，10，25，20 和 1，5，5，5 以及 -1，10，20，-30.

将(2)式代入(4)式并积分一次有

$$c_1 - cu = \varepsilon k^4 u^{(4)} + d_1 k^2 u u'' - \frac{1}{2} d_1 k^2 (u')^2 + \frac{1}{2} d_2 k^2 (u')^2 + \frac{1}{3} d_3 u^3, \quad (5)$$

其中 c_1 是积分常数. 对于(4)或(5)式来说，很难看出其可化成初等积分形式. 为此，作试探方程(通过将(3)式代入(5)式知 $m=2$)

$$u'' = Au^2 + Bu + D, \quad (6)$$

对(6)式积分一次有

$$(u')^2 = \frac{2}{3} A u^3 + B u^2 + 2Du + E, \quad (7)$$

这里 E 为积分常数. 对(6)式求导两次并利用(6)式和(7)式，有

$$u^{(4)} = \frac{10}{3} A^2 u^3 + 5ABu^2 + (6AD + B^2) u + 2AE + BD. \quad (8)$$

将(6)，(7)和(8)式代入(5)式，有

$$r_3 u^3 + r_2 u^2 + r_1 u + r_0 = 0, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{3}{10} \varepsilon k^4 A^2 + \frac{1}{3} k^2 A (d_2 + 2d_1) + \frac{1}{3} d_3, \\ r_2 &= 5\varepsilon k^4 AB + \frac{1}{2} k^2 B (d_2 + d_1), \\ r_1 &= \varepsilon k^4 (6AD + B^2) + d_2 k^2 D + c, \\ r_0 &= \varepsilon k^4 (2AE + BD) + \frac{1}{2} k^2 E (d_2 - d_1) - c_1. \end{aligned} \quad (10)$$

为确定 A, B, D, E 令

$$r_i = 0, i = 0, \cdots, 3. \quad (11)$$

由(11)解得

$$A = \frac{-(2d_1 + d_2) \pm \sqrt{(2d_1 + d_2)^2 - 40\varepsilon d_3}}{20\varepsilon k^2},$$

$$B = 0, D = -\frac{c}{6A\varepsilon k^4 + d_2 k^2},$$

$$E = \frac{c_1}{2A\varepsilon k^4 + \frac{1}{2} k^2 (d_2 - d_1)}. \quad (12)$$

在参数 A, B, D, E 满足(12)式的条件下，求方程(7)式的精确解. 为此，令

$$w = \left(\frac{2}{3} A\right)^{1/3} u, \xi = \left(\frac{2}{3} A\right)^{1/3} \xi_1, \quad (13)$$

则(7)式成为

$$w_\xi^2 = w^3 + b_1 w + b_0. \quad (14)$$

这里

$$b_1 = 2D \left(\frac{2}{3} A\right)^{-1/3}, b_0 = E. \quad (15)$$

记(14)式右边的多项式为

$$F(w) = w^3 + b_1 w + b_0, \quad (16)$$

则 $F(w)$ 的判别式为(相差一个正因子)

$$\Delta = -\left(\frac{b_0^2}{4} + \frac{b_1^3}{27}\right) = -\left(\frac{E^2}{4} + \frac{4D^3}{9A}\right). \quad (17)$$

Δ 和 b_1 构成了多项式(16)的一个完全判别系统. 分以下四种情形：

情形 1 $\Delta = 0$，且 $b_1 < 0$，此时 $F(w) = 0$ 有一个二重实根和一个单重实根，设为

$$F(w) = (w - \alpha)^2 (w - \beta), \quad (18)$$

易见其中

$$\alpha = \left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/3}, \beta = -2\alpha = -2\left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/3}. \quad (19)$$

由(14)式知，当 $w > \beta$ 时，有

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{\mathrm{d}W}{(w-\alpha)\sqrt{w-\beta}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} \ln \left| \dfrac{\sqrt{w-\beta} - \sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{w-\beta} + \sqrt{\alpha-\beta}} \right|, (\alpha > \beta), & (20) \\ \dfrac{2}{\sqrt{\beta-\alpha}} \arctan \sqrt{\dfrac{w-\beta}{\beta-\alpha}}, (\alpha < \beta), & (21) \end{cases}$$

利用(19)式，相应(7)式的解为

$$u = \left(\frac{2A}{3}\right)^{-1/3} \left[3\left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/3} \mathrm{th}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{2A}{3}\right)^{1/3} (\xi_1 - \xi_0)\right) - 2\left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/3}\right], \quad (22)$$

$$u = \left(\frac{2A}{3}\right)^{-1/3} \left[3\left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/3} \mathrm{cth}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{2A}{3}\right)^{1/3} (\xi_1 - \xi_0)\right) - 2\left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/3}\right], \quad (23)$$

$$u = \left(\frac{2A}{3}\right)^{-1/3} \left[3\left(-\frac{b_0}{2}\right)^{1/3} \sec^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(-\frac{b_0}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{2A}{3}\right)^{1/3} (\xi_1 - \xi_0)\right) + \left(\frac{b_0}{2}\right)^{1/3}\right]. \quad (24)$$

情形 2　$\Delta = 0$，且 $b_1 = 0$，此时 $F(w) = 0$ 有一个四重根为零，即

$$F(w) = w^4, \tag{25}$$

相应的(7)式的解为

$$u = \frac{6}{A(\xi_1 - \xi_0)^2}. \tag{26}$$

这里(22)和(23)是孤波解，(24)是三角函数型周期解，(26)是有理函数型解.

注 2　(22)—(24)和(26)中的积分常数 ξ_0 已经重新标度了，仍用 ξ_0 表示，下同.

注 3　将(15)中 b_0，b_1 的值代入到(22)—(24)和(26)中，再将(12)中的参数代入，即得用原方程参数表示的解，这里从略.

情形 3　$\Delta > 0$，$b_1 < 0$，此时 $F(w) = 0$ 有三个不同的实根 $\alpha < \beta < \gamma$，当 $\alpha < w < \beta$ 时，作变量代换

$$w = \alpha + (\beta - \alpha)\sin^2\varphi, \tag{27}$$

由(14)有，

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{F(w)}}$$
$$= \int \frac{2(\beta - \alpha)\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\gamma - \alpha}(\beta - \alpha)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\gamma - \alpha}}\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}}, \tag{28}$$

其中 $m^2 = \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$. 由(28)和 Jacobi 椭圆正弦函数的定义[22]，知

$$w = \alpha + (\beta - \alpha)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2}(\xi - \xi_0), m\right), \tag{29}$$

相应的(7)式的解为

$$u = \left(\frac{2A}{3}\right)^{-1/3}\alpha + \left(\frac{2A}{3}\right)^{-1/3}(\beta - \alpha) \times \mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2}\left(\frac{2A}{3}\right)^{1/3}(\xi_1 - \xi_0), m\right). \tag{30}$$

这也恰是方程(4)的多项式型的 Jacobi 椭圆函数周期解.

当 $w > \gamma$ 时，作变换

$$w = \frac{-\beta\sin^2\phi + \gamma}{\cos^2\phi}, \tag{31}$$

类似的得到相应的(7)式的解为

$$u = \left(\frac{2A}{3}\right)^{-1/3}\frac{-\beta\,\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2}\left(\frac{2A}{3}\right)^{1/3}(\xi - \xi_0), m\right) + \gamma}{\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2}\left(\frac{2A}{3}\right)^{1/3}(\xi - \xi_0), m\right)}, \tag{32}$$

这里 $m^2 = \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$.

情形 4　$\Delta < 0$，此时 $F(w) = 0$ 仅有一个实根，令

$$F(w) = (w - \alpha)(w^2 + pw + q), \tag{33}$$

其中 $p^2 - 4q < 0$. 当 $w > \alpha$ 时，作变量代换

$$W = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}\tan^2\frac{\varphi}{2}. \tag{34}$$

由(14)有

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(w - \alpha)(w^2 + pw + q)}}$$
$$= \int \frac{\sqrt{\alpha^2 + p_0\alpha + q_0}\,\dfrac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi}{(\alpha^2 + p_0\alpha + q_0)^{\frac{3}{4}}\dfrac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$
$$= \frac{1}{(\alpha^2 + p_0\alpha + q_0)^{\frac{1}{4}}}\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \tag{35}$$

这里 $m^2 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\alpha + \frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}}\right)$. 由(35)和 Jacobi 椭圆余弦函数的定义[22]，知

$$\mathrm{cn}\left((\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{1}{4}}(\xi_1 - \xi_0), m\right) = \cos\varphi, \tag{36}$$

由(34)有

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}}{w - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}} - 1. \tag{37}$$

由(36)和(37)式知，当 $w > \alpha$ 时，有

$$w = \alpha + \frac{2\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}}{1 + \mathrm{cn}\left((\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{1}{4}}(\xi - \xi_0), m\right)} - \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}, \tag{38}$$

相应的(7)式的解为

$$u = \left(\frac{2A}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\alpha + \frac{2\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}}{1 + \mathrm{cn}\left((\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2A}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi_1 - \xi_0), m\right)} - \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}\right). \tag{39}$$

这也恰是方程(4)的分式型的 Jacobi 椭圆函数周期解.

当取具体的参数值时，可相应得到 KK 方程，CDGSK 方程，五阶 KdV 方程的精确解. 这里从略.

4. 结束语

对于许多非线性发展方程精确行波解的求解问题,例如秩齐次的非线性发展方程,经常可用形如(3)这样的试探方程化成初等积分形式.化成初等积分形式的优点在于我们可以"推导"出精确行波解[23,24],甚至是全部精确行波解[25].当然如果方程本身不能直接化成初等积分的话,利用试探方程法不能得到全部精确行波解.对于本文所处理的这些具体方程,试探方程法得到的结果包含了试探函数法以及椭圆函数展开法等得到的结果,并且包含新结果,如(32)和(39)这两种分式型的 Jacobi 椭圆函数周期解.另一方面,通过试探方程法化所求方程为初等积分形式,再利用多项式完全判别系统来判别根的情况[18]使得很容易确定各个精确解所对应的参数条件[23—25].因此原则上若能化(1)为(3),就能得到(1)的丰富的精确解.对于许多方程组情形,试探方程法同样有效.限于篇幅,这些将在其他文章中给出.

[1] Wang M L,Zhou Y B and Li Z B 1996 *Phys*. *Lett*. A **216** 67

[2] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[3] Fan E G and Zhang H Q 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 1409]

[4] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[5] Zhang W G 2003 *Acta Math-Phys*. *Sci*. **23** A 679(in Chinese)[张卫国 2003 数学物理学报 **23** A 679]

[6] Liu S K,Fu Z T,Liu S D and Zhao Q 2001 *Appl*. *Math*. *Mech*. **22** 326

[7] Li Z B and Zhang S Q 1997 *Acta Math-Phys*. *Sin*. **17** 81(in Chinese)[李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]

[8] Zhang G X,Li Z B and Duan Y S 2000 *Sci*. *China* A **30** 1103(in Chinese)[张桂戌、李志斌、段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]

[9] Xu G Q *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 946(in Chinese)[徐桂琼等 2002 物理学报 **51** 946]

[10] Xu G Q *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1424(in Chinese)[徐桂琼等 2002 物理学报 **51** 1424]

[11] Liu S K,Fu Z T,Liu S D and Zhao Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068(in Chinese)[刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[12] Liu S K,Fu Z T,Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718(in Chinese)[刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 718]

[13] Zhang S Q *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1066(in Chinese)[张善卿等 物理学报 **52** 1066]

[14] Fu Z T,Liu S K and Liu S D 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 43(in Chinese)[付遵涛、刘式适、刘式达 2004 物理学报 **53** 43]

[15] Liu G T and Fan T Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 76(in Chinese)[刘官厅、范天佑 2004 物理学报 **53** 76]

[16] Yan Z Y,Zhang H Q and Fan E G 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1(in Chinese)[闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1998 物理学报 **48** 1]

[17] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1962(in Chinese)[闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[18] Lou S Y and Lu J Z 1996 *J*. *Phys*. A **29** 4029

[19] Lou S Y and Ruan H Y 2001 *J*. *Phys*. A **34** 305

[20] Yang L,Hou X R and Zeng Z B 1996 *Sci*. *China* E **39** 628

[21] Xu B Z *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1946(in Chinese)[徐柄振等 1998 物理学报 **47** 1946]

[22] Wang Z X and Guo D R 2002 *Special Functions*(Beijing:Peking University Press).[王竹溪、郭敦仁 2002 特殊函数概论(北京 北京大学出版社)]

[23] Liu C S 2004 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **21** 2369

[24] Liu C S 2005 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **43** 787

[25] Liu C S and Du X H 2005 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **54** 1039(in Chinese)[刘成仕、杜兴华 2005 物理学报 **54** 1039]

Trial equation method and its applications to nonlinear evolution equations

Liu Cheng-Shi†

(*Department of Mathematics*, *Daqing Petroleum Institute*, *Daqing* 163318, *China*)

(Received 20 August 2004; revised manuscript received 27 October 2004)

Abstract

A new method, that is, trial equation method, was given to obtain the exact traveling wave solutions for nonlinear evolution equations. As an example, a class of fifth-order nonlinear evolution equations was discussed. Its exact traveling wave solutions, which included rational form solutions, solitary wave solutions, triangle function periodic solutions, polynomial type Jacobian elliptic function periodic solutions and fractional type Jacobian elliptic function periodic solutions, were given.

Keywords: trial equation method, nonlinear evolution equation, solitary wave solutions, Jacobian elliptic function, periodic solutions

PACC: 0340K

† E-mail: chengshiliu-68@126.com