

基于在线最小二乘支持向量机回归 的混沌时间序列预测*

叶美盈¹⁾ 汪晓东²⁾ 张浩然²⁾

¹⁾ 浙江师范大学数理学院, 金华 321004)

²⁾ 浙江师范大学信息科学与工程学院, 金华 321004)

(2004 年 8 月 6 日收到, 2004 年 10 月 20 日收到修改稿)

提出了一种基于在线最小二乘支持向量机(LS-SVM)回归的混沌时间序列的预测方法. 与离线支持向量机相比, 在线最小二乘支持向量机预测方法即使当混沌系统的参数随时间变化时仍然有效. 以 Chen 's 混沌系统、Rössler 混沌系统、Hénon 映射及脑电(EEG)信号四种混沌时间序列为例评估本文提出的预测方法. 结果验证了其混沌时间序列预测的有效性.

关键词: 混沌时间序列, 预测, 在线学习, 支持向量机

PACC : 0545

1. 引 言

混沌系统辨识是混沌系统控制设计的基础, 对于混沌系统控制来说, 建立良好的系统模型非常重要, 它不仅具有重要的理论意义, 而且还具有广泛的应用前景. 目前国内外众多学者已从不同的途径对混沌系统的辨识与预测进行了研究, 其中人工神经网络因其具有较强的非线性映射能力, 在混沌系统的预测与控制中得到了较多的应用^[1-7]. 但因神经网络训练过程遵循经验风险最小化准则, 存在过拟合、训练过程受局部极小点的困扰、网络结构的选择过分依赖于经验等固有的缺陷^[8], 直接影响了混沌系统预测的精度和可靠性. 如何克服这些缺陷一直是神经网络应用中的难题.

Suykens 等人首先提出的最小二乘支持向量机(Least Squares Support Vector Machine, 简称 LS-SVM)^[9]是近年来机器学习领域的重要成果之一, 其训练过程遵循结构风险最小化原则, 结构参数在训练过程中根据样本数据自动确定, 不易发生过拟合现象, 它把支持向量机的学习问题转化为解线性方程组问题, 不存在局部极小值问题. 因此 LS-SVM 可成功克服神经网络的上述缺陷^[9]. 最近, 作者已将 LS-SVM 用于混沌时间序列的辨识、预测及混沌系统

的控制等^[10-12]. 在这些文献中, LS-SVM 的应用实例都是离线式的, 仅采用目前已有的离线式学习算法的 LS-SVM 就可以解决. 但如果混沌系统的参数随时间发生变化, 就必须使用在线学习算法, 使学习机具有在线自适应能力, 能够随着时间而进化. 因此, 本文以 LS-SVM 回归及在线 LS-SVM 分类为基础^[13], 提出一种在线学习的 LS-SVM 回归算法, 并将其用于变参数的混沌时间序列预测. 由于 LS-SVM 把学习问题转化为解线性方程组问题, 因此与用一般的支持向量机的在线学习算法相比^[14, 15], 在线 LS-SVM 回归具有较快运算速度的特点, 易于满足在线学习算法在一个采样时间周期内必须完成一次完整运算的要求, 达到混沌系统实时预测的目的.

2. 在线最小二乘支持向量机回归

训练标准支持向量机需解凸二次规划, 虽然所得的解是唯一的最优解, 但算法的复杂度依赖于样本数据的个数, 样本数据量越大, 计算速度越慢, 占用内存也越大. 一个有效的解决方法是采用 LS-SVM. LS-SVM 通过解一组线性方程组取代标准支持向量机中的二次规划优化, 提高了收敛速度. 下面我们首先简述 LS-SVM 回归算法, 并在此基础上给出在线 LS-SVM 回归方法.

* 浙江省自然科学基金(批准号: 602145)资助的课题.

† E-mail: ymy@mail.zjnu.net.cn

2.1. 最小二乘支持向量机回归

LS-SVM 不同于标准支持向量机在于它把不等式约束改成等式约束,并把经验风险由偏差的一次方改为二次方.回归型的 LS-SVM 提法如下:

对于一个给定的训练数据集 $(x_i, y_i), i = 1, \dots, l, x_i \in R^n, y_i \in R$, 利用高维特征空间里线性函数

$$y(x) = w^T \phi(x) + b \tag{1}$$

来拟合同样本集,其中非线性映射 $\phi(\cdot)$ 把数据集从输入空间映射到特征空间,以便使输入空间中的非线性拟合问题变成高维特征空间中的线性拟合问题.根据结构风险最小化原理,综合考虑函数复杂度和拟合误差,回归问题可以表示为约束优化问题

$$\min_{w, b, e} J(w, e) = \frac{1}{2} w^T w + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^l e_i^2,$$

$$\text{约束条件 } y_i = w^T \phi(x_i) + b + e_i, i = 1, \dots, l. \tag{2}$$

其中 γ 为正则化参数, b 为常值偏差.为了求解上述优化问题,把约束优化问题变成无约束优化问题,建立 Lagrange 函数

$$L(w, b, e, \alpha) = J(w, e) - \sum_{i=1}^l \alpha_i \{w^T \phi(x_i) + b + e_i - y_i\}, \tag{3}$$

其中 α_i 是 Lagrange 乘子.根据 Karush-Kuhn-Tucker (KKT)最优条件,并对于 $i = 1, \dots, l$ 消去 e_i 和 w 后,得到如下线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & e1^T \\ e1 & Q + I/\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中 $y = [y_1, \dots, y_l]^T, e1 = [1, \dots, 1]^T, \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_l]^T, Q_{ij} = \phi(x_i) \cdot \phi(x_j) = K(x_i, x_j), i, j = 1, \dots, l$.有多种核函数 $K(x_i, x_j)$ 可选择,高斯型径向基函数 (RBF) $K(x_i, x_j) = \exp(-\|x_i - x_j\|^2/2\sigma^2)$ 是最常用的核函数之一.

由 (4) 式可知,LS-SVM 的算法优化问题可转化为以最小二乘法求解 (4) 式表示的线性方程组,而不像标准支持向量机那样要求解一个二次型规划问题,解线性方程组比求解二次规划更为简单快速.

最后可得如下回归型 LS-SVM 模型.

$$y(x) = \sum_{i=1}^l \alpha_i K(x, x_i) + b. \tag{5}$$

LS-SVM 与标准支持向量机比较起来,具有的特点如下:LS-SVM 比标准支持向量机具有更小的计算复杂性.

2.2. 在线最小二乘支持向量机回归

对于在线学习来讲,样本是窗式移动的,即样本 $(x_i, y_i), i = k, \dots, k+l-1, x_i \in R^n, y_i \in R$,随着时刻 k 的递进而翻滚,每进来一个新样本,同时就丢掉一个旧样本,样本个数不变.学习的样本集可以表示为 $\{X(k), Y(k)\}$,其中 $X(k) = [x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l-1}]^T, Y(k) = [y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+l-1}]^T, x_k \in R^n, y_k \in R$.因此核函数矩阵 Q 、待求的 Lagrange 乘子 α 和常值偏差 b 都是 k 的函数.即在 k 时刻,它们可分别表示为 $Q_y(k) = K(x_{i+k-1}, x_{j+k-1}), i, j = 1, \dots, l, \alpha(k) = [\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l-1}]^T, b(k) = b_k, y(k) = y_k$.则最小二乘支持向量机的输出 (5) 式变为

$$y(k) = \sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i(k) K(x, x_i) + b(k). \tag{6}$$

设 $U(k) = Q(k) + I/\gamma$, 则 (4) 式可以改写为

$$\begin{bmatrix} 0 & e1^T \\ e1 & U(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k) \\ \alpha(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y(k) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

令 $P(k) = U(k)^{-1}$, 则由 (7) 式可得

$$b(k) = \frac{e1^T P(k) y(k)}{e1^T P(k) e1}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= P(k) \left(y(k) - \frac{e1 e1^T P(k) y(k)}{e1^T P(k) e1} \right) \\ &= P(k) \{ y(k) - e1 b(k) \}, \end{aligned} \tag{9}$$

而

$$\begin{aligned} P(k) &= U(k)^{-1} = [Q(k) + I/\gamma]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} h(k) & H(k)^T \\ H(k) & D(k) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D(k)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\quad + s_h(k) s_h(k)^T c_h(k), \end{aligned} \tag{10}$$

其中 I 为单位阵, $h(k) = K(x_k, x_k) + 1/\gamma, H(k) = [K(x_{k+1}, x_k) + 1/\gamma, \dots, K(x_{k+l-1}, x_k)]^T,$

$$D(k) = \begin{bmatrix} K(x_{k+1}, x_{k+1}) + 1/\gamma & \dots & K(x_{k+l-1}, x_{k+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_{k+1}, x_{k+l-1}) & \dots & K(x_{k+l-1}, x_{k+l-1}) + 1/\gamma \end{bmatrix},$$

$$s_h(k) = [-1, H(k)^T D(k)^{-1}]^T, c_h(k) = 1(H(k) - H(k)^T D(k)^{-1} H(k)).$$

在 $k + 1$ 时刻,新样本 (x_{k+l}, y_{k+l}) 加进来,旧样本 (x_k, y_k) 被抛弃掉,核函数矩阵变为 $Q_{\tilde{y}}(k + 1) = K(x_{i+k}, x_{j+k}), i, j = 1, \dots, l$, 则

$$F(k + 1) = U(k + 1)^{-1} = [Q(k + 1) + I/\gamma]^{-1}. \quad (11)$$

综合上所述,在线学习 LS-SVM 回归的混沌时间序列预测是一个随时间滚动的优化过程,其算法为

- 第 1 步 初始化 $k = 1$;
- 第 2 步 取新的数据,丢弃离当前时刻最远的数据,得到 $(X(k), Y(k))$;
- 第 3 步 计算核函数矩阵 $Q(k)$ 及 $F(k)$;
- 第 4 步 计算 $b(k), \alpha(k)$, 并进行预测 $y(k)$;
- 第 5 步 $k \leftarrow k + 1$, 返回第 2 步.

3. 混沌时间序列的预测

混沌序列预测的基础是状态空间重构理论,假设观测到的混沌时间序列为 $\{x(k), k = 1, 2, \dots, N\}$, 则在状态空间中重构的一点状态矢量可表示为 $X(k) = [x(k), x(k + \tau), \dots, x(k + (m - 1)\tau)]^T$, 其中 m 为嵌入维数, τ 为延迟时间. 由 Takens 定理可知,混沌序列的预测重构本质上是一个动力系统的逆问题. 既通过动力系统的状态反过来去构造系统的模型,对于一步预测也就是建立

$$X(k + 1) = F(X(k)), k = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

其中 $F(\cdot)$ 为重构的预测模型.

下面我们将分别对常见的 Chen's 混沌系统、Rössler 混沌系统、Hénon 映射等混沌时间序列和具有高维混沌特性的脑电 (electroencephalogram, EEG) 信号进行预测,以验证本文提出的用上述在线 LS-SVM 回归进行混沌时间序列预测的有效性. 实验中,Chen's 混沌系统及 Rössler 混沌系统的混沌序列分别用四阶 Runge-Kutta 算法求解获得实验数据. 以预测均方根误差 (Root Mean Squared Error, RMSE) 作为评测标准,其预测的均方根误差定义为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - x'(k))^2}, \quad (13)$$

其中, N 为预测样本数, $x(k)$ 是原始的混沌时间序列,而 $x'(k)$ 则是在线 LS-SVM 回归预测输出. 预测误差定义为 $e(k) = x(k) - x'(k)$. 在本文的以下例子中,核函数均采用高斯型径向基函数 (RBF).

在下面所有表述在线 LS-SVM 回归混沌时间序列预测结果的图中,横坐标 k 为预测样本序号,纵

坐标 $x(k)$ 与 $x'(k)$ 分别为真实值 (用 '○' 表示) 及预测值 (用 '+' 表示).

例 1 Chen's 混沌系统的时间序列预测

Chen's 系统是 Chen 在研究混沌系统的反控制时发现的混沌吸引子,它在拓扑结构上比 Lorenz 和 Rössler 吸引子更为复杂,其表达式为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = (C - A)x - xz + Cy, \\ \frac{dz}{dt} = xy - Bz. \end{cases} \quad (14)$$

在该例子中,我们设定所有系统参数都是固定的, A, B, C 分别为 35, 3, 28, 积分步长为 0.02s, 取嵌入维数 $m = 6$, 核参数 $\sigma = 1$, 正则化参数 $\gamma = 10000$.

图 1(a) 和 (b) 分别给出了用在线 LS-SVM 回归预测 Chen's 系统 x 分量的真实值与预测值的比较及预测误差.

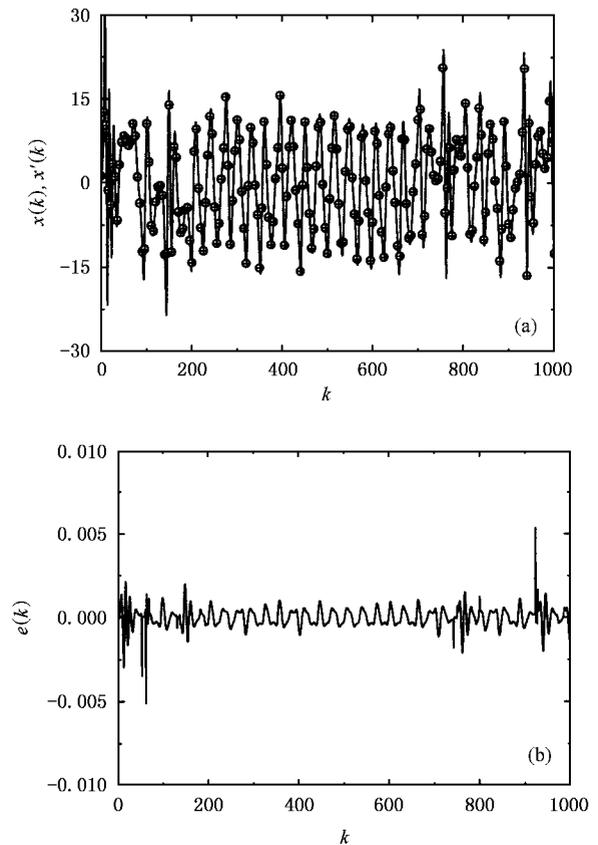


图 1 Chen's 系统的预测结果 (a) 为真实值与预测值的比较 (每隔 10 个样本数取 1 点) (b) 为预测误差 (RMSE = 6.13×10^{-4})

例 2 Rössler 混沌系统的时间序列预测

O. E. Rössler 构造了几个简单但具有混沌行为的非线性方程组,其中最具有代表性的是他在 1976 年提出的如下 Rössler 吸引子:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + Ax, \\ \frac{dy}{dt} = -(x + z), \\ \frac{dz}{dt} = z(y - C) + B, \end{cases} \quad (15)$$

其中,参数 $A = B = 0.2$,而参数 C 常取下列数值之一 2,3,3.5,4.7,5.0,5.7,6,7,8,9,10,11.我们在此假定参数 C 是变化的,即样本数据由不同 C 值的系统产生.取 $C = 5.7$ 产生的数据作为其前 1000 个样本数据 ($0 \leq k \leq 1000$),而取 $C = 4.7$ 产生的数据作为其后 1000 个样本数据 ($100 < k \leq 2000$).参数 C 取这两个数据时,Rössler 吸引子都是混沌的.取积分步长 0.1 秒,取嵌入维数 $m = 6$,核参数 $\sigma = 0.5$,正则化参数 $\gamma = 10000$.

图 2(a)和(b)分别给出了用在线 LS-SVM 回归预测 Rössler 系统 x 分量的真实值与预测值的比较及预测误差.

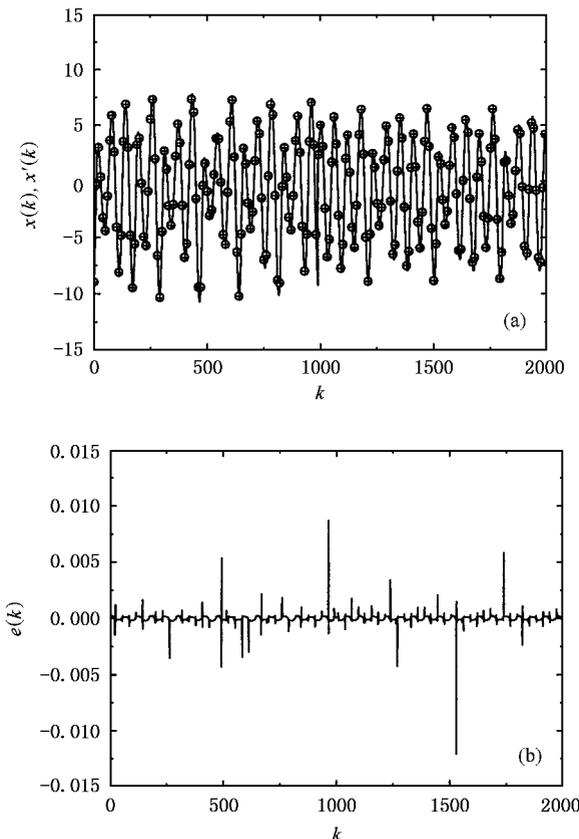


图 2 Rössler 混沌系统的预测结果 (a)为真实值与预测值的比较(每隔 10 个样本数取 1 点)(b)为预测误差(RMSE = 1.40 × 10⁻³)

例 3 Hénon 映射的混沌时间序列预测

Hénon 映射吸引子的迭代方程由下式给出:

$$\begin{cases} x(k+1) = 1 - A(k)(x(k))^2 + y(k), \\ y(k+1) = Bx(k), \end{cases} \quad (16)$$

取系统参数 $B = 0.3$,而 $A(k) = 1.37 + 0.05\sin(k/5)$ 是时变的,当 $A(k)$ 在此范围内变化时,系统仍处于混沌状态,取嵌入维数 $m = 3$,核参数 $\sigma = 1$,正则化参数 $\gamma = 10000$.

预测结果如图 3 所示,图 3(a)和(b)分别为 Hénon 映射吸引子 x 分量的真实值与预测值的比较及预测误差.

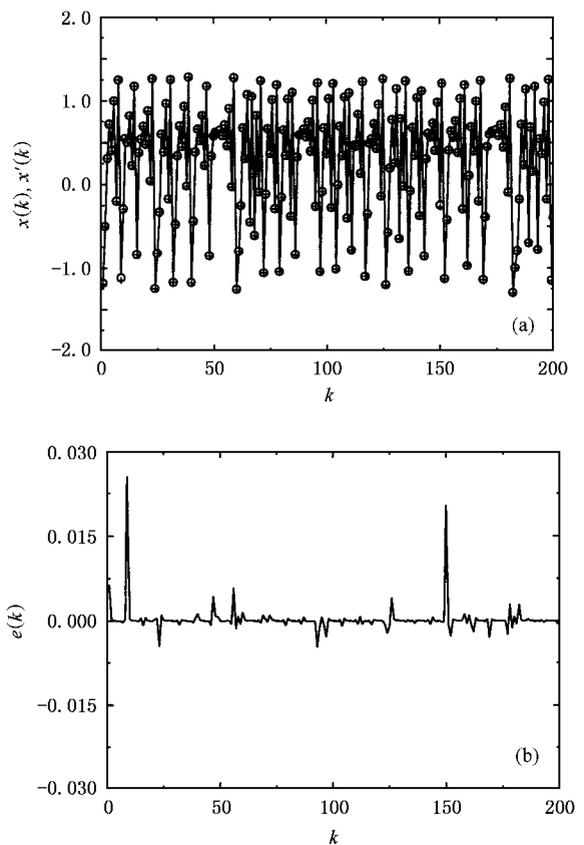


图 3 Hénon 映射混沌时间序列的预测结果 (a)为真实值与预测值的比较 (b)为预测误差(RMSE = 4.40 × 10⁻³)

例 4 EEG 信号的预测

EEG 信号反映了脑神经系统的电生理活动,是生理研究与临床脑疾病诊断的重要依据.大量的研究表明 EEG 信号源于高维混沌系统,具有高维的混沌特性.为了检验本文研究的预测模型对具有高维混沌特性的混沌信号的预测能力,我们对 EEG

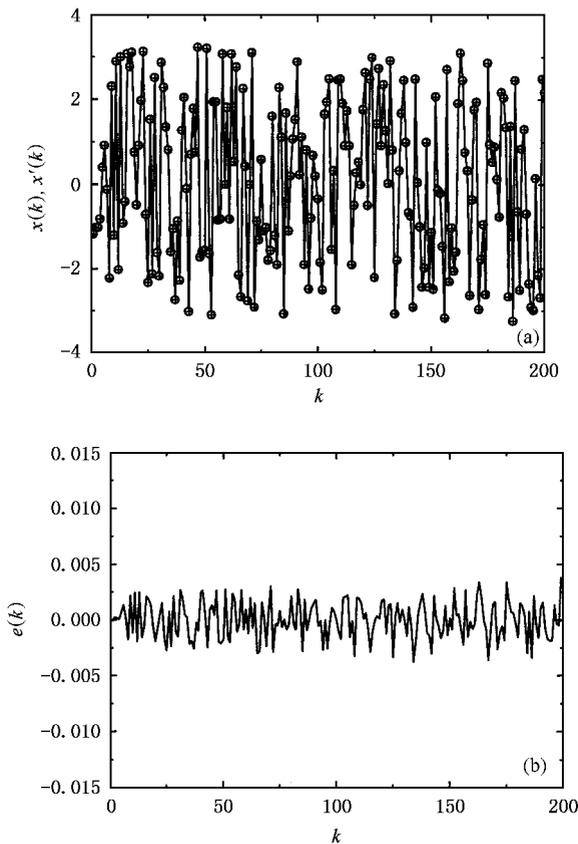


图 4 EEG 信号的预测结果 (a) 为真实值与预测值的比较 (b) 为预测误差 (RMSE = 1.80×10^{-3})

信号进行预测. 预测时取嵌入维数 $m = 6$, 核参数 $\sigma = 1$, 正则化参数 $\gamma = 1000$.

图 4 (a) 和 (b) 为在线 LS-SVM 回归预测 EEG 信号的真实值与预测值的比较及预测误差.

4. 结 束 语

基于在线 LS-SVM 回归的混沌时间序列预测方法有以下特点: 首先, 可以在线修正和调整 LS-SVM 预测模型, 不仅可对参数固定的混沌系统时间序列进行预测, 而且在混沌系统参数时变的情况下也能实现精确预测; 其次, 由于 LS-SVM 把学习问题转化为解线性方程组问题, 因此与标准支持向量机的在线学习算法相比, 在线 LS-SVM 回归具有较快的运算速度, 易于达到混沌系统实时预测的目的. 因而它在具体的工程应用领域具有现实意义.

对于支持向量机可调参数及核参数 (如 γ 、 σ 等) 的选择, 是人们研究支持向量机中一直关注的问题, 虽然一些研究者已对它进行了讨论, 但针对支持向量机的具体应用对象, 这些参数的选择目前仍缺乏明确的理论指导. 如何在混沌时间序列预测中, 合理地选择在线 LS-SVM 的可调参数及核参数将有待我们进一步研究.

- [1] Zhang S, Liu H X, Gao D T and Du S D 2003 *Chin. Phys.* **12** 594
- [2] Guan X P, Tang Y G, Fan Z P and Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2112 (in Chinese) [关新平、唐英干、范正平、王益群 2001 物理学报 **50** 2112]
- [3] Liu D, Ren H P and Kong Z Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531 (in Chinese) [刘 丁、任海鹏、孔志强 2003 物理学报 **52** 531]
- [4] Tan W, Wang Y N, Liu Z R and Zhou S W 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2463 (in Chinese) [谭 文、王耀南、刘祖润、周少武 2002 物理学报 **51** 2463]
- [5] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 88
- [6] Small M and Tse C K 2002 *Phys. Rev. E* **66** 66701
- [7] Freking A and Kinzel W 2002 *Phys. Rev. E* **65** 50903
- [8] Vapnik V N 2000 *The Nature of Statistical Learning Theory* (New York: Springer)
- [9] Suykens J A K 2000 *Neural Network World* **10** 29
- [10] Ye M Y and Wang X D 2004 *Chin. Phys.* **13** 454
- [11] Ye M Y and Wang X D 2004 *Acta. Opt. Sin.* **24** 953 (in Chinese) [叶美盈、汪晓东 2004 光学学报 **24** 953]
- [12] Ye M Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 30 (in Chinese) [叶美盈 2005 物理学报 **54** 30]
- [13] Kuh A 2002 *IEEE Int. Joint Conf. Neural Networks* **3** 2104
- [14] Ma J, Theiler J and Perkins S 2003 *Neural Comput.* **15** 2683
- [15] Kivinen J, Smola A J and Williamson R C 2004 *IEEE Trans. Sig. Proc.* **52** 2165

Chaotic time series forecasting using online least squares support vector machine regression *

Ye Mei-Ying^{1)†} Wang Xiao-Dong²⁾ Zhang Hao-Ran²⁾

¹⁾ College of Mathematics and Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

²⁾ College of Information Science and Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

(Received 6 August 2004 ; revised manuscript received 20 October 2004)

Abstract

A chaotic time series forecasting method based on online least squares support vector machine (LS-SVM) regression is proposed. The difference between the online LS-SVM and offline support vector machine (SVM) is that the online LS-SVM is still effective for the chaotic system with a variation of the system parameter. Four chaotic time series , namely , Chen 's system , Rössler system , Hénon map and chaotic electroencephalogram (EEG) signal , are used to evaluate the performance. The results verify the ability of the method in chaotic time series prediction.

Keywords : chaotic time series , forecasting , online learning , support vector machines

PACC : 0545

* Project supported by the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Grant No. 602145).

† E-mail : ymy@mail.zjnu.net.cn