

# 用滑模控制方法实现具有扇区非线性输入的主从混沌系统同步\*

王兴元<sup>†</sup> 刘 明

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2004 年 8 月 2 日收到, 2004 年 10 月 27 日收到修改稿)

分析了一个具有扇区非线性输入且含有参数不确定性以及外部噪声干扰的主从混沌系统的同步控制问题. 设计了一类同步滑模变结构控制器, 并从理论上证明了该控制器的有效性. 研究表明该控制器不受受控系统的参数变化和噪声干扰的影响, 具有很强的鲁棒性. 最后通过对主从 Duffing-Holmes 系统的仿真研究, 验证了该控制器的有效性.

关键词: 混沌同步, 滑模变结构控制, 扇区非线性输入, 不确定性

PACC: 0545, 0555

## 1. 引 言

20 世纪 60 年代, Emelyanov, Utkin 和 Itkis 提出了变结构控制理论, 此后该理论被广泛地用于非线性连续系统和离散系统、随机系统以及大系统的控制, 目前变结构控制已成为控制理论的一个重要分支<sup>[1-3]</sup>. 1990 年, Ott, Grebogi 和 Yorke 通过参数微扰法(即 OGY 法)成功地控制了混沌<sup>[4]</sup>, Pecore 和 Carroll 又提出了混沌同步方案<sup>[5]</sup>. 混沌控制及同步, 特别是混沌同步在保密通讯中的潜在应用, 引起了人们的极大兴趣, 科学工作者在理论和实验上都已做了大量的工作<sup>[6-9]</sup>. 由于滑模变结构控制不受受控系统参数变化和噪声干扰的影响, 具有很强的鲁棒性<sup>[8]</sup>. 为此, 基于 Emelyanov, Ott 和 Pecore 等人的思想, 1997 年后 Chen 和 Yau 等先后利用滑模变结构连续控制去消除因控制器的切换而引起的抖振, 并实现了不确定混沌系统的控制<sup>[10, 11]</sup>. 2002 年, Tsai 等利用随时间变化的多动态滑模变结构控制器, 驱动具有外部激励的混沌系统到达任意目标轨道<sup>[12]</sup>. 2004 年, Yau 设计了具有扇区非线性输入的滑模变结构控制器<sup>[13]</sup>, 并利用自适应滑模控制使不确定主从混沌系统达到了同步<sup>[14]</sup>. 在上述研究基础上, 本文研究了一类具有扇区非线性输入的不确定主从混沌系

统的同步问题, 设计了同步滑模变结构控制器, 通过对主从 Duffing-Holmes 系统的仿真研究, 验证了所给控制器的有效性.

## 2. 具有扇区非线性输入的不确定主从混沌系统与同步问题描述

对于如下两个系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + Bu(t), x(0) = x_0 \in R \quad (1)$$

和

$$\dot{y}(t) = g(y(t), t), y(0) = y_0 \in R, \quad (2)$$

其中  $f, g: R^n \times R \rightarrow R^n$ , 且  $f, g \in C^1, B \in R^{n \times m}, x(t), y(t) \in R^n, u(t) \in R^m$ . 其混沌同步的实现方法是寻找一个合适的  $B$  和  $u(t) = \varphi(x(t), y(t), t)$  使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0 \quad (3)$$

成立( $\|\cdot\|$  表示向量的 Euclid 范数). 于是(1)式和(2)式的同步可以化为对误差系统进行研究. 误差系统为

$$\dot{e}(t) = f(x(t), t) - g(y(t), t) + Bu(t),$$

式中  $e(t) = x(t) - y(t)$  为轨道误差. 显然, 由于没有对  $f$  和  $g$  进行限制, 两个混沌系统的同步问题具有一般的意义. 基于该种描述方法, 若能找到一种控

\* 国家自然科学基金(批准号 69974008)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(批准号 20040081)资助的课题.

<sup>†</sup>E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

制方案使(3)式成立,将具有重要的意义.

主从混沌系统

下面考虑两个具有非线性输入的  $n$  维不确定

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t); i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n(t) = f(x, t) \end{cases} \quad (x \in R^n), \quad (4)$$

和

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = y_{i+1}(t); i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{y}_n(t) = f(y, t) + \Delta f(y, t) + \phi(u(t)) + \alpha(t) \end{cases} \quad (x \in R^n), \quad (5)$$

式中  $f(x, t)$  和  $f(y, t)$  是两个参数不同的非线性函数;  $u(t) \in R$  是从系统(5)的控制输入;  $\Delta f(y, t)$  是不确定项;  $\alpha(t)$  是外部噪声干扰;  $\phi(u(t))$  是连续非线性函数且  $\phi(0) = 0$ , 在扇区  $[\beta_1, \beta_2]$  内  $\forall u(t) \rightarrow \phi(u(t)), \exists \phi: R \rightarrow R$ , 即

$$\beta_2 u^2(t) \geq u(t)\phi(u(t)) \geq \beta_1 u^2(t), \quad (6)$$

(6)式中  $\beta_1$  和  $\beta_2$  是非零正常数. 图1给出了扇区  $[\beta_1, \beta_2]$  内  $\phi(u(t))$  的变化曲线. 假定不确定项  $\Delta f(y, t)$  和外部噪声干扰  $\alpha(t)$  是有界的, 即

$$\begin{cases} |\Delta f(y, t)| < \alpha_1 \|Y\|, \\ |\alpha(t)| < \alpha_2, \end{cases} \quad (7)$$

这里  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为给定正数

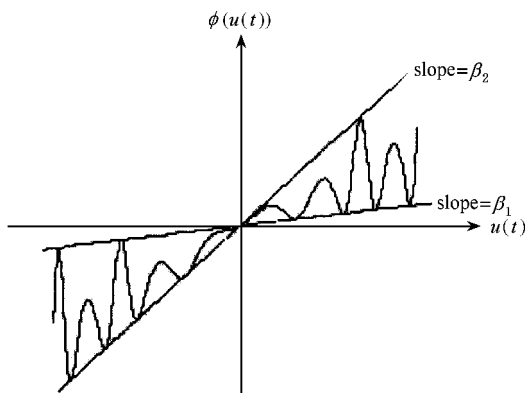


图1 扇区  $[\beta_1, \beta_2]$  内的非线性函数  $\phi(u(t))$  的曲线

主从系统(4)和(5)从不同的初始条件出发,通过非线性输入  $\phi(u(t))$  的控制最终达到同步,即要求

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0.$$

### 3. 滑动曲面的设计和系统在滑动面上运行时的稳定性分析

定义轨道误差向量

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

故由(4)式(5)式和(8)式,可得如下滑模动力学

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = e_{i+1}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \dot{e}_n(t) = g(e, t) + \Delta f(e+x) + \phi(f(t)) + \alpha(t), \end{cases} \quad (9)$$

(9)式中  $g(e, t) = f(e+x, t) - f(x, t)$ .

滑模变结构同步控制的基本思想是通过控制器的来回切换,使受控主从系统达到同步.它的基本步骤是选定一个滑动曲面或者切换函数,并要保证其是渐近稳定的,然后进一步确定控制器,使得受控系统能在有限时间内到达滑动面,从而沿着滑动面向同步平衡点运行.滑模控制的关键是选择合适的稳定的滑动面和确定控制器使系统尽快地趋近滑模面.基本上述思想,定义滑动曲面如下:

$$s(t) = e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t), \quad (10)$$

式中  $s(t) \in R$ ,  $c_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  是设计参数.当系统发生滑动模运动时,需满足如下条件:

$$\dot{s}(t) = \dot{e}_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \dot{e}_i(t) = 0, \quad (11)$$

和

$$s(t) = e_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t) = 0. \quad (12)$$

故由(12)式可得

$$\dot{e}_{n-1}(t) = e_n(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t). \quad (13)$$

根据(9)式,可将(13)式表示为如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ -c_1 & -c_2 & \dots & \dots & \dots & -c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= M \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

令  $\lambda_i(M)$  表示  $M$  的第  $i$  个特征值, 记  $\lambda_{\max}(M) = \max\{\lambda_i(M); i = 1, 2, \dots, n-1\}$ . 显然当  $\lambda_{\max}(M) < 0$  时, 可确定设计参数  $c_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  的值. 一旦  $c_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  值被确定, 则有  $\lambda_{\max}(M) < 0$ , 即可确切地保证 (14) 式的稳定性. 进一步, 由 (12) 式可知  $e_n(t)$  也是稳定的. 同时, 须注意到矩阵  $M$  的特征值与系统的响应速度相关.

由 (14) 式可推知: 当受控系统在滑动面上运动时, 系统对参数的不确定性、外部干扰以及输入的非线性是不敏感的. 换言之, 受控制混沌系统是鲁棒的.

### 4. 同步滑模变结构控制器的设计

在讨论同步滑模变结构控制器的设计之前, 先给出滑模条件如下:

引理 1 若满足下面的条件

$$s(t)\dot{s}(t) < 0, \tag{15}$$

则滑动曲面式 (10) 上的运动趋于稳态.

证明 令 Lyapunov 函数为  $V(t) = 0.5s^2(t)$ . 根据 Lyapunov 稳定性定理 (15) 式保证了

$$\dot{V}(t) = s(t)\dot{s}(t) < 0,$$

因此  $s(t)$  指向滑动曲面且滑动曲面式 (10) 上的运动趋于稳定平衡点.

为了得到引理 1 给出的条件, 给出如下控制策略

$$u(t) = -\gamma\eta \text{sign}(s(t)) \quad (\gamma > 1/\beta_1), \tag{16}$$

式中  $\eta = (\sum_{i=1}^{n-1} |c_i e_{i+1}(t)| + |g(e, t)| + \alpha_1 \|Y\| + \alpha_2 |\text{sign}(s)|)$  是  $s$  的符号函数, 若  $s > 0$ , 则  $\text{sign}(s) = 1$ ; 若  $s = 0$  则  $\text{sign}(s) = 0$ ; 若  $s < 0$ , 则  $\text{sign}(s) = -1$ . 下面证明控制策略式 (16) 可驱动从系统 (5) 与主系统 (4) 同步.

定理 1 考虑具有非线性输入的不确定混沌主从系统 (4) 和 (5), 若满足滑模条件 (15) 式且控制策略  $u(t)$  为 (16) 式, 则主从系统 (4) 和 (5) 的轨道误差将趋于滑动曲面 (10) 上同步平衡点.

证明: 令系统的 Lyapunov 函数为  $V(t) = 0.5s^2(t)$ , 则由 (11) 式和 (7) 式可得

$$\dot{V}(t) = s(t)\dot{s}(t) = s(t) \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i(t) \right) + \dot{e}_n(t) \right]$$

$$= s(t) \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1}(t) + g(e, t) + \Delta f'(e+x, t) + \phi(u(t)) + \delta(t) \right) \leq |s(t)| \left( \sum_{i=1}^{n-1} |c_i e_{i+1}(t)| + |g(e, t)| + \alpha_1 \|Y\| + \alpha_2 \right) + s(t)\phi(u). \tag{17}$$

另外, 根据 (16) 式和 (6) 式可推得

$$u(t)\phi(u(t)) = -\gamma\eta \text{sign}(s(t))\phi(u(t)) \geq \beta_1 \gamma^2 \eta^2 [\text{sign}(s(t))]^2. \tag{18}$$

因为  $s^2(t) \geq 0$  故有

$$\begin{aligned} & -\gamma\eta s^2(t) \text{sign}(s(t))\phi(u(t)) \\ & \geq \beta_1 \gamma^2 \eta^2 s^2(t) [\text{sign}(s(t))]^2 \\ & \Rightarrow -\gamma\eta s(t) |s(t)| \phi(u(t)) \\ & \geq \beta_1 \gamma^2 \eta^2 |s(t)|^2 \Rightarrow s(t)\phi(u(t)) \\ & \leq -\beta_1 \gamma \eta |s(t)|. \end{aligned} \tag{19}$$

将 (19) 式代入 (17) 式, 可得

$$s(t)\dot{s}(t) \leq (1 - \beta_1 \gamma) \eta |s(t)|. \tag{20}$$

由 (16) 式知  $\gamma > 1/\beta_1$ , 因此可断定条件式 (15) 一直被满足, 故命题真.

### 5. 仿真实验结果

为了说明控制器的有效性, 可考虑如下具有非线性输入的不确定主从 Duffing-Holmes 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -p_1 x_1 - p x_2 - x_1^3 + q \cos(\omega t), \end{cases} \tag{21}$$

和

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -p'_1 y_1 - p' y_2 - y_1^3 + \Delta f'(y) + \delta(t) + q' \cos(\omega' t) + \phi(u(t)). \end{cases} \tag{22}$$

虽然系统 (22) 中含有不确定项  $\Delta f'(y)$  和外部噪声干扰  $\delta(t)$ , 但基于控制策略式 (16), 在非线性输入  $\phi(u(t))$  的作用下可使从系统 (22) 与主系统 (21) 同步.

作者已用几种系统混沌的定量判据确认了当选取主系统 (21) 的参数  $p_1 = -1, p = 0.25, q = 0.3$  和  $\omega = 1$ , 从系统 (22) 的参数  $p'_1 = -1.1, p' = 0.3, q' = 0.4$  和  $\omega' = 1.1$  时, 主系统 (21) 和从系统 (22) 处于混沌态.

图 1 为选取上述参数时主系统 (21) 和从系统 (22) 的吸引子. 构造主系统 (21) 和从系统 (22) 的吸

引子,方法是选择一个合适的时间步长,由四阶 Runge-Kutta 法去求解方程(21)和方程(22)。选取初始点为  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  和  $(y_1, y_2) = (2, 2)$ , 计算时方程(21)和方程(22)最初的 2000 次运算被抛弃,以保证系统的轨道已收敛到吸引子上,然后再让方程(21)和方程(22)运算 10 万次,即可构造出主系统(21)和从系统(22)的吸引子。

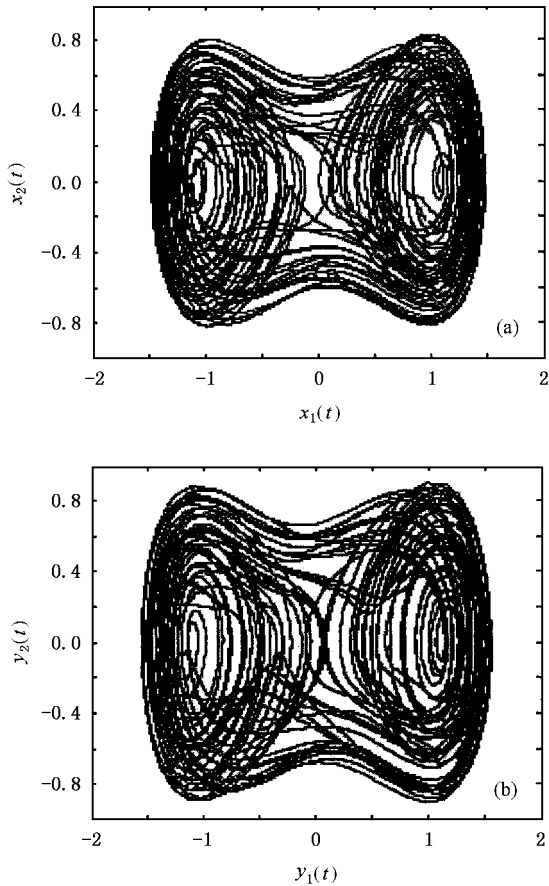


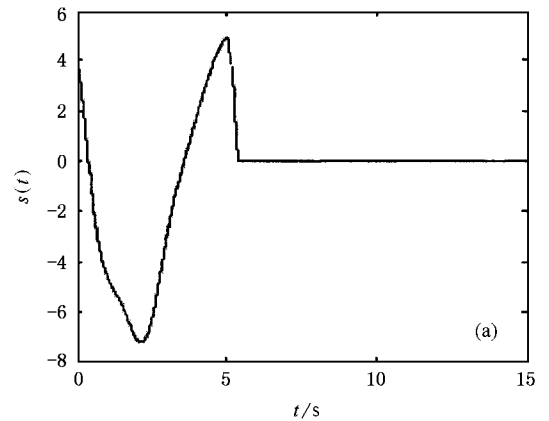
图2 主从 Duffing-Holmes 系统的吸引子

根据 Grassberger 和 Procaccia 所提出关联维数  $D_2$  的算法<sup>[15]</sup>,作者利用主系统(21)和从系统(22)运算 2000 次后所得  $x_1$  和  $y_1$  序列,选取如下参数:采样频率为 1Hz;嵌入维数  $m$  值是经过多次试算,发现所得吸引子的  $D_2$  趋于稳定时得到的;数据总量为 10000。本文计算出图 2 中吸引子的  $D_2$ (见表 1)。本文又采用 Benettin 等人提出的计算微分方程组最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  的方法<sup>[16]</sup>,计算了主系统(21)和从系统(22)吸引子的  $\lambda_1$ ,如表 1 所示。由表 1 可知图 2 所给出主系统(21)和从系统(22)吸引子的关联维数  $D_2$  均为分数、最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  皆为正值,这表明此时主系统(21)和从系统(22)的运动

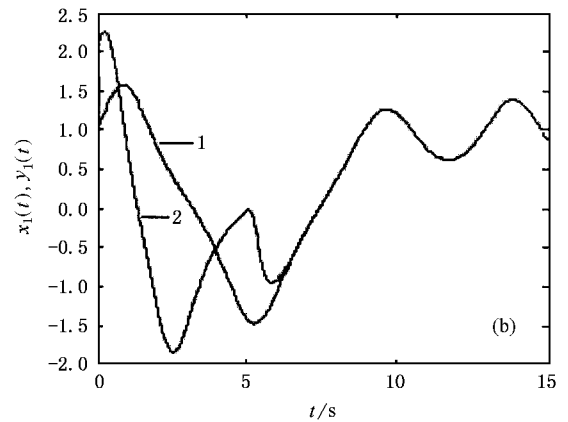
是混沌的,即图 2 给出的是奇怪吸引子。

表 1 主从系统的关联维数  $D_2$  和最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1$

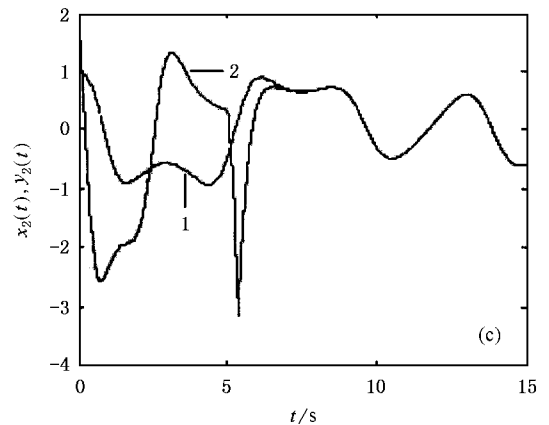
系统	$D_2$	$\lambda_1$
主系统(21)	$1.729 \pm 0.045$	$0.357 \pm 0.002$
从系统(22)	$1.868 \pm 0.055$	$0.385 \pm 0.002$



(a)  $t = 5s$  时控制器打开



(b)  $t = 5s$  时控制器打开: 1— $x_1(t)$  2— $y_1(t)$



(c)  $t = 5s$  时控制器打开: 1— $x_2(t)$  2— $y_2(t)$

图3 滑动曲面  $s(t)$  和系统轨道  $x_i(t), y_i(t) (i=1, 2)$  随时间  $t$  的响应曲线

为了证明滑模控制器的有效性,可选取

$$\begin{cases} |\Delta f(y)| < \alpha_1 \|Y\| = 0.1 \|Y\|, \\ \delta(t) = 0.2 \cos(\pi t). \end{cases}$$

定义非线性输入

$$\mathcal{H}(u(t)) = [0.6 + 0.3 \sin(u(t))]u(t). \quad (23)$$

由(23)式可知  $\beta_1 = 0.3$  和  $\beta_2 = 0.9$ . 这样可选取  $\gamma = 3.5 > 1/0.3$ , 满足定理 1 的要求.

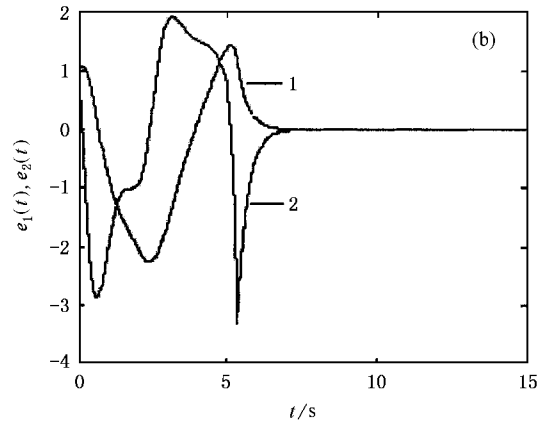
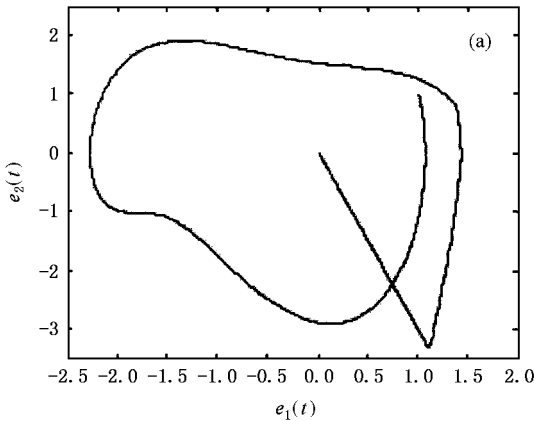
根据(10)式,可知滑动曲面为

$$s(t) = c_1 e_2(t) + e_2(t).$$

根据(13)式,选取  $c_1 = 3$  时将导致稳定的滑动模运动. 选取主从系统(21)和(22)的初始点分别为  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  和  $(y_1, y_2) = (2, 2)$ , 所得仿真结果分别

如图 3 和图 4 所示. 显然,当  $t = 5\text{s}$  时控制器打开后,由图 3 可见滑动曲面  $s(t)$  很快趋于稳定的平衡点(图 3(a)),  $x_1(t)$  和  $y_1(t)$  或  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  很快达到了惊人的一致性(图 3(b), 3(c)),即主从两个混沌系统达到了准确同步.

从主从系统的轨道误差向量的相图和轨道误差向量随时间的响应(图 4),还可进一步验证上述主从混沌系统同步. 从图 4(a)可见轨道误差向量  $e_1(t)$  和  $e_2(t)$  在相空间的运动轨迹趋于不动点——原点,且当  $t = 5\text{s}$  时控制器打开后,  $e_1(t)$  和  $e_2(t)$  很快达到了惊人的一致性——零点(图 4(b)),这再次证明了主从混沌系统达到完全同步.



(a) 相图,  $t = 5\text{s}$  时控制器打开

(b)  $t = 5\text{s}$  时控制器打开: 1— $e_1(t)$  2— $e_2(t)$

图 4 轨道误差向量的相图和随时间  $t$  的响应曲线

## 6. 结 论

本文分析了一个具有扇区非线性输入且含有参数不确定性以及外部干扰的主从混沌系统的同步控制问题. 设计了一类同步滑模变结构控制器, 从理论

上证明了该控制器的有效性, 实现了主从混沌系统的同步控制, 并且克服了受控系统参数的不确定以及外部噪声干扰等不确定因素, 实现了鲁棒控制的目的. 最后通过对两个主从 Duffing-Holmes 系统的仿真研究, 验证了该控制器的有效性.

[1] Hu Y M 2003 *Theoretics and Application of Variable Structure Control* (Beijing: Science Press) Chap. 1 (in Chinese) 胡耀明 2003 变结构控制理论与应用(北京: 科学出版社) 第一章

[2] Gao W B 1990 *Theoretics Foundation of Variable Structure Control* (Beijing: Chinese Science and Technology Press) Chap. 1 (in Chinese) 高为炳 1990 变结构控制理论基础(北京: 中国科学技术出版社) 第一章

[3] Liu F C, Wang J, Shi M and Gao X W 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2707 (in Chinese) 刘福才、王娟、石淼、高秀伟 2002 物理学报 **51** 2707

[4] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196

[5] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[6] Chen G and Dong X 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* (Singapore: World Scientific) Chap. 1

[7] Wang G R, Yu X L and Chen S G 2001 *Chaotic Control, Synchronization and Utilizing* (Beijing: National Defence Industry Press) Chap. 6 (in Chinese) 王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京: 国防工业出版社) 第六章

[8] Guan X P, Fan Z P, Chen C L and Hua C C 2002 *Chaotic Control and its Application on Secure Communication* (Beijing: National Defence Industry Press) Chap. 4 (in Chinese) 关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北

- 京 :国防工业出版社 ]第四章 ]
- [ 9 ] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System*( Beijing : Electronics Industry Press )Chap. 3 ( in Chinese ) 王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌( 北京 :电子工业出版社 ]第三章 ]
- [ 10 ] Chen C L and Lin W Y 1997 *Journal of Systems & Control Engineering* **211** 75
- [ 11 ] Yau H T ,Chen C K and Chen C L 2000 *Int. J. Bifurc. Chaos* **10** 1139
- [ 12 ] Tsai H H ,Fuh C C and Chang C N 2002 *Chaos ,Solitions Fract.* **14** 627
- [ 13 ] Yau H T and Yan J J 2004 *Chaos , Solitions Fract.* **19** 891
- [ 14 ] Yau H T 2004 *Chaos ,Solitions Fract.* **22** 341
- [ 15 ] Wang X Y 2002 *Chinese Sci. Bull.* **47** 2042
- [ 16 ] Wang X Y 2003 *Chinese Journal of Computational Physics* **20** 458 in Chinese ] 王兴元 2003 计算物理 **20** 458 ]

## Sliding mode control for the synchronization of master-slave chaotic systems with sector nonlinear input

Wang Xing-Yuan<sup>†</sup> Liu Ming

( School of Electronic & Information Engineering ,Dalian University of Technology ,Dalian 116024 )

( Received 2 August 2004 ; revised manuscript received 27 October 2004 )

### Abstract

This paper analyses the synchronization control for a class of master-slave chaotic systems with parameter uncertainties , external noise disturbances and sector nonlinear input . It designs a class of sliding mode controllers for chaos synchronization , testifying theoretically that the effectiveness of the controller is beyond the impact from the parameter uncertainties and external noise disturbances of the system under control and thus it is of strong robust nature . Finally ,the effectiveness of this kind of controller is also proved by numerical simulations for the master-slave Duffing-Holmes systems .

**Keywords** : chaos synchronization , sliding mode variable structure control , sector nonlinear inputs , uncertainty

**PACC** : 0545 , 0555

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 69974008 ) and the Superior University Science Technology Research Project of Education Hall of Liaoning Province ,China( Grant No. 20040081 ) .

<sup>†</sup>E-mail : wangxy@dlut.edu.cn