

位相不匹配情形 Fokker-Planck 方程的解及其在 准位相匹配参量放大中的应用*

赵超樱 谭维翰

(上海大学物理系, 上海 200444)

(2004 年 9 月 16 日收到, 2004 年 11 月 18 日收到修改稿)

在前文的基础上求得了简并参量放大系统在位相不匹配情况下的 Fokker-Planck 方程一个新的解析解, 然后通过准位相匹配 (QPM), 计算振幅的量子起伏. 这一结果在不考虑损耗 ($k=0$) 情况下, 与已知的按解 Langevin 方程求得的结果为一致. 对于一般的考虑损耗 ($k \neq 0$) 情况, 我们也得出损耗系数 k 对压缩态特性的影响.

关键词: 简并参量放大, 位相不匹配的 Fokker-Planck 方程, 准位相匹配技术 (QPM 技术)

PACC: 4250, 4265K

1. 引 言

众所周知, 通过参量放大可以获得压缩光. 为了获得高效率的频率转换, 光学晶体必须满足位相匹配条件. 目前人们通常利用各向异性晶体双折射特性的二次折射位相匹配技术 (即 PM 技术) 和人为的在非线性晶体上制备出周期结构的准位相匹配 (QPM) 技术. 但利用各向异性晶体双折射特性实现位相匹配方法有许多难以克服的缺点, 极大地限制了所用晶体范围和能量转换效率. 早在 1962 年, Armstrong 等人首次提出了准位相匹配^[1], 后来又有 Fejer 等人的进一步研究^[2], 使得 QPM 得以实现. QPM 技术要求周期性的改变非线性系数的符号, 实现位相周期性的反转, 就能获得高效率非线性频率转换.

关于 QPM 的理论与实验研究, 较早有 Bencheikh^[3], Noire^[4], 以及最近文献 [5—9] 的工作. 他们主要是通过求考虑相位匹配和忽略损耗情况下的波耦合方程. 但损耗的存在, 一般会降低压缩态光的压缩度是不可忽略的. 这样对这个理论的应用会带来一定的局限性. 特别是, 相位匹配情况 $\Delta k = 0$ 就意味着不考虑色散. 实际上, 介质的色散是不能忽略的, Fokker-Planck 方程应该考虑相位不匹

效应的影响. 因为有效传输距离通常只有几微米的数量级 (相干长度 $l_c = \pi/\Delta k$, 这里 Δk 表示波矢不匹配), 所以不可能获得很大的参量增益. 除非相位补偿得到满足. 其中一个相位补偿的方法是由 Armstrong 等人首次提出的. 每半个相干长度极性就反转一下, 由于这种周期变化补偿了关于抽运场在每个周期通过信号场积累的相位延迟. 这种技术称之为准相位匹配技术. 据我们所知, 参量放大对相位不匹配以及损耗都很敏感. 本文在前文的基础上, 首次提出了同时考虑相位不匹配和损耗情况下的 Fokker-Planck 方程的一般解. 并且立刻把这个解应用于准位相匹配设备后, 计算系统振幅的量子起伏. 结果表明, 经位相匹配后, 压缩度提高很多.

2. 位相不匹配情况下的 Fokker-Planck 方程的解

参照前文^[10,11]与文献 [12], 我们写下位相不匹配情况下的准概率 P 所满足的 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) - \left(\epsilon e^{i\Delta k x} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \epsilon e^{-i\Delta k x} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \right] P$$

* 上海市教育委员会重点学科基金资助的课题.

$$+ \left(\frac{\epsilon}{2} e^{i\Delta kx} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\epsilon}{2} e^{-i\Delta kx} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right) + 2k\bar{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \Big] P, \quad (1)$$

式中 α, α^* 为 P 表示算子 a, a^\dagger 所对应的复参量. k, ϵ 分别表示腔的损耗与非线性介质的增益系数, \bar{n} 标志热起伏的光子简并度. $\Delta k = k_p - k_i - k_s$, 由于色散引起的波矢不匹配, Δkx 为经传播后的位相不匹配. 当 $\Delta k = 0$ 时, 即前文讨论位相匹配的 Fokker-Planck 方程.

将 (1) 式与前文^[10,11]相比, 仅增加了位相不匹配因子 $e^{\pm i\Delta kx}$ ^[12]. 当 $\Delta kx = 0$ 时, 增益 $\epsilon e^{\pm i\Delta kx}$ 是正的, 但当 $\Delta kx = \pi$ 时, 增益 $\epsilon e^{\pm i\Delta kx}$ 就变成负的了. 增益为正时, 信号光与闲置光均能得到放大, 但增益为负时, 便要减小了. 为了有效的进行放大, 进行位相补偿使之不出现增益为负的情形是必要的.

用实变量 $\beta, \tilde{\beta}$ 来表示 α, α^* , 可通过如下的变换实现:

$$\beta = \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\alpha - \alpha^*}{\sqrt{2}i},$$

故有,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - i \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \right),$$

在这个基础上, 我们求得,

$$\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} (\beta - i\tilde{\beta}) \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - i \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \right),$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} = \frac{1}{2} (\beta + i\tilde{\beta}) \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} \right) - i \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \tilde{\beta}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} \right) + i \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \tilde{\beta}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} \right),$$

$$- \epsilon \cos(\Delta kx) \left(\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)$$

$$+ \frac{\epsilon}{2} \cos(\Delta kx) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right)$$

$$= - \epsilon \cos(\Delta kx) \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \right)$$

$$+ \frac{\epsilon}{2} \cos(\Delta kx) \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} \right),$$

$$- i \epsilon \sin(\Delta kx) \left(\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)$$

$$+ i \frac{\epsilon}{2} \sin(\Delta kx) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right)$$

$$= - \epsilon \sin(\Delta kx) \left(\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$$

$$+ \epsilon \sin(\Delta kx) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \tilde{\beta}}. \quad (2)$$

将上面的结果代入方程式 (1) 中, 使得

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \left[(k - \epsilon \cos(\Delta kx)) \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \right. \\ & + (k + \epsilon \cos(\Delta kx)) \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \tilde{\beta} \\ & + \left(\frac{\epsilon}{2} \cos(\Delta kx) + k\bar{n} \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ & - \left(\frac{\epsilon}{2} \cos(\Delta kx) - k\bar{n} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} \\ & - \epsilon \sin(\Delta kx) \left(\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \\ & \left. + \epsilon \sin(\Delta kx) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \tilde{\beta}} \right] P, \quad (3) \end{aligned}$$

假设波沿 x 轴传播. 令 (3) 式中 $t = \frac{x}{c}, \frac{k}{c} \rightarrow k, \frac{\epsilon}{c} \rightarrow \epsilon$. 于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} = & \left[k_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \beta + k_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \tilde{\beta} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - D_2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} \right. \\ & \left. - G \left(\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + G \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \tilde{\beta}} \right] P, \quad (4) \end{aligned}$$

式中

$$k_1 = k - \epsilon \cos(\Delta kx),$$

$$k_2 = k + \epsilon \cos(\Delta kx),$$

$$D_1 = \frac{\epsilon}{2} \cos(\Delta kx) + k\bar{n},$$

$$D_2 = \frac{\epsilon}{2} \cos(\Delta kx) - k\bar{n},$$

$$G = \epsilon \sin(\Delta kx). \quad (5)$$

对准概率 P 作 Fourier 变换:

$$\begin{aligned} \phi = & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) P(\beta, \tilde{\beta}, x | \beta_0, \tilde{\beta}_0, 0) \\ & \times d\beta d\tilde{\beta}, \quad (6) \end{aligned}$$

应用分部积分, 并设 P 在边值处为零. 我们有

$$\begin{aligned} & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \beta \frac{\partial}{\partial \beta} P d \beta d \tilde{\beta} \\ &= -i \frac{\partial}{\partial s} \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \frac{\partial}{\partial \beta} P d \beta d \tilde{\beta} \\ &= -i \frac{\partial}{\partial s} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} [\exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) P] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial \beta} [\exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta})] P \right\} d \beta d \tilde{\beta} \\ &= i \frac{\partial}{\partial s} (i \tilde{s}) \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) P d \beta d \tilde{\beta} \\ &= -\tilde{s} \frac{\partial}{\partial s} \phi. \end{aligned}$$

同样有,

$$\begin{aligned} & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} P d \beta d \tilde{\beta} = -s \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \phi, \\ & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \tilde{\beta}} P d \beta d \tilde{\beta} = -s \tilde{s} \phi, \\ & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \frac{\partial}{\partial \beta} \beta P d \beta d \tilde{\beta} = -s \frac{\partial}{\partial s} \phi, \\ & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \tilde{\beta} P d \beta d \tilde{\beta} = -\tilde{s} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \phi, \\ & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} P d \beta d \tilde{\beta} = -s^2 \phi, \\ & \int \exp(i s \beta + i \tilde{s} \tilde{\beta}) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} P d \beta d \tilde{\beta} = -\tilde{s}^2 \phi. \quad (7) \end{aligned}$$

于是(4)式可变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \ln \phi + (k_1 s - G s) \frac{\partial}{\partial s} \ln \phi \\ & + (k_2 \tilde{s} - G \tilde{s}) \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \ln \phi \\ &= -D_1 s^2 + D_2 \tilde{s}^2 - G s \tilde{s}. \quad (8) \end{aligned}$$

令

$$\ln \phi = A s^2 + \tilde{A} \tilde{s}^2 + i B s + i \tilde{B} \tilde{s} + E s \tilde{s} \quad (9)$$

代入(8)式得 s, \tilde{s} 的方程取如下形式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial x} s^2 + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \tilde{s}^2 + i \frac{\partial B}{\partial x} s + i \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} \tilde{s} \\ & + \frac{\partial E}{\partial x} s \tilde{s} + (k_1 s - G s) (2A s + i B + E \tilde{s}) \\ & + (k_2 \tilde{s} - G \tilde{s}) (2\tilde{A} \tilde{s} + i \tilde{B} + E s) \\ &= -D_1 s^2 + D_2 \tilde{s}^2 - G s \tilde{s}, \quad (10) \end{aligned}$$

等式两边系数分别相等, 方程(10)可表示为两个一阶线性变系数常微分方程组

$$\frac{dA}{dx} = -2k_1 A + GE - D_1,$$

$$\frac{d\tilde{A}}{dx} = -2k_2 \tilde{A} + GE + D_2,$$

$$A(0) = \tilde{A}(0) = E(0) = 0. \quad (11)$$

$$\frac{dE}{dx} = 2G(A + \tilde{A}) - 2kE - G,$$

$$\frac{dB}{dx} = -k_1 B + G\tilde{B}, \quad B(0) = \beta_0,$$

$$\frac{d\tilde{B}}{dx} = -k_2 \tilde{B} + GB, \quad \tilde{B}(0) = \tilde{\beta}_0. \quad (12)$$

上式可用数值方法求解得出 $A, \tilde{A}, E; B, \tilde{B}$ 作为 x 的函数, 代入(9)式得

$$\phi = \phi(x, s, \tilde{s}; \beta_0, \tilde{\beta}_0). \quad (13)$$

现取 $s, \tilde{s} \rightarrow t, \tilde{t}; \beta, \tilde{\beta} \rightarrow \alpha, \tilde{\alpha}$ 的正交变换(注意: 这里的 t, \tilde{t} 不是时间, 实数 $\alpha, \tilde{\alpha}$ 也不是(1)式中的复数 α, α^* , 这里只是为了方便仍用 t, \tilde{t} 与 $\alpha, \tilde{\alpha}$).

设

$$\begin{aligned} s &= t \cos \theta + \tilde{t} \sin \theta, \\ \tilde{s} &= -t \sin \theta + \tilde{t} \cos \theta, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha \cos \theta + \tilde{\alpha} \sin \theta, \\ \tilde{\beta} &= -\alpha \sin \theta + \tilde{\alpha} \cos \theta. \quad (15) \end{aligned}$$

将(14)式代入(9)式, 并且令 \tilde{t} 的系数为零, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= -\frac{E}{A - \tilde{A}}, \\ \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \sin(\Delta k x), \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(\Delta k x)}{2}, \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(\Delta k x)}{2}. \quad (16) \end{aligned}$$

则(9)式可变为

$$\begin{aligned} \ln \phi &= -H t^2 - \tilde{H} \tilde{t}^2 + (\cos \theta B - \sin \theta \tilde{B}) t \\ & + (\sin \theta B + \cos \theta \tilde{B}) \tilde{t} \\ &= -H t^2 - \tilde{H} \tilde{t}^2 + i C t + i \tilde{C} \tilde{t}, \quad (17) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} -H &= A \cos^2 \theta + \tilde{A} \sin^2 \theta - E \sin \theta \cos \theta, \\ -\tilde{H} &= A \sin^2 \theta + \tilde{A} \cos^2 \theta + E \sin \theta \cos \theta, \\ C &= \cos \theta B - \sin \theta \tilde{B}, \\ \tilde{C} &= \sin \theta B + \cos \theta \tilde{B}. \quad (18) \end{aligned}$$

由(11)(12)式得 $x=0$ 时初值 $\theta=0$, 又参照(12), (15)式得到,

$$\alpha(0) = \beta(0) = \beta_0 = \alpha_0,$$

$$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{\beta}_0 = \tilde{\alpha}_0.$$

从(14)(15)式注意到:

$$s\beta + \tilde{s}\tilde{\beta} = t\alpha + \tilde{t}\tilde{\alpha},$$

$$dsd\tilde{s} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} dt d\tilde{t} = dt d\tilde{t}. \quad (19)$$

于是有 Fourier 反变换

$$\int \phi \exp(-is\beta - i\tilde{s}\tilde{\beta}) ds d\tilde{s}$$

$$= \int \exp(-Ht^2 - \tilde{H}\tilde{t}^2 + iCt + i\tilde{C}\tilde{t} - it\alpha - i\tilde{t}\tilde{\alpha}) \times dt d\tilde{t}$$

$$= \int \exp\left[-H\left(t + i\frac{\alpha - C}{2H}\right)^2 - \tilde{H}\left(\tilde{t} + i\frac{\tilde{\alpha} - \tilde{C}}{2\tilde{H}}\right)^2 - \frac{(\alpha - C)^2}{4H} - \frac{(\tilde{\alpha} - \tilde{C})^2}{4\tilde{H}}\right] dt d\tilde{t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi H}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{H}}} \exp\left[-\frac{(\alpha - C)^2}{4H} - \frac{(\tilde{\alpha} - \tilde{C})^2}{4\tilde{H}}\right]. \quad (20)$$

由此得

$$(\Delta\alpha)^2 = \frac{\int (\alpha - C)^2 \exp\left[-\frac{(\alpha - C)^2}{4H}\right] d\alpha}{\int \exp\left[-\frac{(\alpha - C)^2}{4H}\right] d\alpha}$$

$$= \frac{\int x^2 \exp\left[-\frac{x^2}{4H}\right] dx}{\int \exp\left[-\frac{x^2}{4H}\right] dx} = 2H. \quad (21)$$

同理有

$$(\Delta\tilde{\alpha})^2 = 2\tilde{H}. \quad (22)$$

参照(15)式得,

$$(\Delta\beta)^2 = (\Delta\alpha)^2 \cos^2\theta + (\Delta\tilde{\alpha})^2 \sin^2\theta$$

$$= 2H\cos^2\theta + 2\tilde{H}\sin^2\theta$$

$$= -2A + (A - \tilde{A}) \left(\sin^2 2\theta + \frac{E}{A - \tilde{A}} \sin 2\theta \cos 2\theta \right)$$

$$= -2A,$$

$$(\Delta\tilde{\beta})^2 = (\Delta\alpha)^2 \sin^2\theta + (\Delta\tilde{\alpha})^2 \cos^2\theta$$

$$= 2H\sin^2\theta + 2\tilde{H}\cos^2\theta$$

$$= -2\tilde{A} + (\tilde{A} - A) \left(\sin^2 2\theta - \frac{E}{\tilde{A} - A} \sin 2\theta \cos 2\theta \right)$$

$$= -2\tilde{A}. \quad (23)$$

场算子的正规编序方差为:

$$(\Delta x_1)^2 = \left(\Delta \frac{\alpha + \alpha^*}{2} \right)^2 = \frac{(\Delta\beta)^2}{2} = -A,$$

$$(\Delta x_2)^2 = \left(\Delta \frac{\alpha - \alpha^*}{2i} \right)^2 = \frac{(\Delta\tilde{\beta})^2}{2} = -\tilde{A}. \quad (24)$$

量子起伏为:

$$(\Delta x_1)^2 = \frac{1}{4} + (\Delta x_1)^2 = \frac{1}{4} - A,$$

$$(\Delta x_2)^2 = \frac{1}{4} + (\Delta x_2)^2 = \frac{1}{4} - \tilde{A}. \quad (25)$$

由于起初输入信号场的量子振幅起伏为 $(\Delta x_1)^2 = (\Delta x_2)^2 = 1/4$. 因此, 从(25)式可以得到 $A(0) = \tilde{A}(0) = 0$ 这个也就是(11)式所给出的 A, \tilde{A} 的初始条件. 从 E 的解 $E = E(0) \exp(-2kx) + \int_0^x \exp[-2k(x-x')] [2(A + \tilde{A}) - 1] G dx'$ 可以看出, $E(0) \exp(-2kx)$ 相对于 E 随 x 的增加呈指数衰减. 为了方便起见, 我们在计算中令 $E(0) = 0$.

总的来说, 我们是从方程(1)出发经过变换(2)

将复参数 α, α^* 换为实参量 $\beta, \tilde{\beta}$, 相应的含复参量 α, α^* 的 Fokker-Planck 方程换成(4). 又将 P 换为 ϕ , ϕ 的解可表示为不含交叉项 $t\tilde{t}$ 仅含 t^2, \tilde{t}^2 的二次型(17)式, 其中系数 $A, \tilde{A}; C, \tilde{C}$ 作为 x 的函数, 可用数值方法求解两个一阶变系数常微分方程组. 在此基础上进一步求出方差, 然后按(24)(25)式求出量子起伏. 在做这件事之前, 我们还要导出 Langevin 方程与 Fokker-Planck 方程的关系.

3. 参量下转换的 Langevin 方程与解 Fokker-Planck 方程中得出的 B, \tilde{B} 方程

为了弄清楚解 Fokker-Planck 方程(1)时得出的 B, \tilde{B} 方程(12)式的物理意义, 我们先研究参量下转换的 Langevin 方程, 若有位相不匹配, 参照文献[12]通过加入损耗和随机力, 则得,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}a &= -ka + \varepsilon \exp(i\Delta kx)a^\dagger + F, \\ \frac{d}{dx}a^\dagger &= -ka^\dagger + \varepsilon \exp(-i\Delta kx)a + F^\dagger, \end{aligned} \quad (26)$$

式中 $k, \varepsilon, \varepsilon^*$ 分别表示单位长度的损耗与增益, F, F^\dagger 表示无规力算子.

令

$$\begin{aligned} B &= \frac{a + a^\dagger}{2}, & \tilde{B} &= \frac{a - a^\dagger}{2i}, \\ f &= \frac{F + F^\dagger}{2}, & \tilde{f} &= \frac{F - F^\dagger}{2i}, \end{aligned} \quad (27)$$

则得,

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx} &= -kB + \varepsilon \cos(\Delta kx)B + \varepsilon \sin(\Delta kx)\tilde{B} + f, \\ \frac{d\tilde{B}}{dx} &= -k\tilde{B} - \varepsilon \cos(\Delta kx)\tilde{B} + \varepsilon \sin(\Delta kx)B + \tilde{f}. \end{aligned} \quad (28)$$

取 (28) 式求统计平均, 并令 $f = \tilde{f} = 0$ 和 $B =$

$B, \tilde{B} = \tilde{B}$. 则失谐情况下的 Langevin 方程 (28) 便过渡到一阶的变系数常微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx} &= -(k - \varepsilon \cos(\Delta kx))B + \varepsilon \sin(\Delta kx)\tilde{B}, \\ \frac{d\tilde{B}}{dx} &= -(k + \varepsilon \cos(\Delta kx))\tilde{B} + \varepsilon \sin(\Delta kx)B \end{aligned} \quad (29)$$

若将 (5) 式的 k_1, k_2 及 G 代入 (12) 式也得到 (29) 式.

故前面的 B, \tilde{B} 方程 (12) 式与 Langevin 方程求统计平均后的 (29) 式相当.

(29) 式的解可写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} &= -k \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta kx}{2} & \sin \frac{\Delta kx}{2} \\ \sin \frac{\Delta kx}{2} & -\cos \frac{\Delta kx}{2} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta kx}{2} & \sin \frac{\Delta kx}{2} \\ -\sin \frac{\Delta kx}{2} & \cos \frac{\Delta kx}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \\ &= -k \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} C & S \\ S & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \\ &= -k \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} C & S \\ S & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} - \frac{\Delta k}{2} \begin{pmatrix} -S & C \\ -C & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \\ = -k \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} + \frac{\Delta k}{2} \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \quad (31)$$

(31) 式的解析解可采用如下简单的形式:

$$\begin{aligned} C &= e^{-kx} \cos(Kx), \\ S &= e^{-kx} \sin(Kx), \\ \Delta &= \frac{\Delta k}{2K}, & G &= \frac{\varepsilon}{K}, \\ K &= \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2 - \varepsilon^2}, \\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C + GS & \Delta S \\ -\Delta S & C - GS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

当 $k=0$ 时 (32) 式即文献 [3] 中 (11) 式. 实际上我们看到, 简并参量放大^[3-6]的 Langevin 方程与 Fokker-Planck 方程的解一致. 若 $k \neq 0$ 时, 当 $x \rightarrow \infty$, C 与 S 的值均趋近于零. Langevin 方程的上述解不适用, 只能求助于解 Fokker-Planck 方程.

4. 将位相不匹配的 Fokker-Planck 方程的解应用到 QPM 技术上

理想的准位相匹配 QPM, 由文献 [1, 3] 提出, 如图 1 所示. 第一个半周期为正极化, 第二个半周期为负极化, 以后依次类推. 半周期长度为 L , 周期长度 $\Lambda = 2L = \pi/K = 2\pi/\Delta k$. 因此, $\Delta k = \pi/L$. 参照解 (32) 式, 并令其中阻尼 $k=0$. 第一个半周期内传输矩阵为

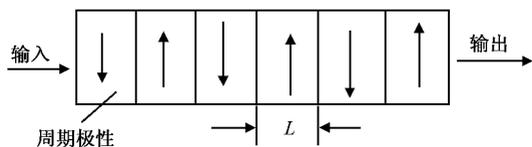


图 1 理想位相匹配示意图

$$\begin{pmatrix} p(L) \\ q(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & \Delta \\ -\Delta & -G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}.$$

第二个半周期内传输矩阵为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(2L) \\ q(2L) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -G & \Delta \\ -\Delta & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(L) \\ q(L) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(G^2 + \Delta^2) & -2\Delta G \\ -2\Delta G & -(G^2 + \Delta^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

依次类推, 得到传播 n 个周期后的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} p(2nL) \\ q(2nL) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(G^2 + \Delta^2) & -2\Delta G \\ -2\Delta G & -(G^2 + \Delta^2) \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} & \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2} \\ \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2} & \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

其中 $\lambda_1 = -(G + \Delta)^2$, $\lambda_2 = -(\Delta - G)^2$.

文献 3 还给出总输出光子数的起伏. 在此基础上, 文献 5 导出了振幅方差的量子起伏如下:

$$\begin{aligned} X &= a + a^\dagger, & Y &= -(a - a^\dagger), \\ \langle \Delta X \rangle^2 &= 1 + \frac{(\lambda_1^n - \lambda_2^n)^2}{2} \\ &\quad + \frac{\lambda_1^{2n} - \lambda_2^{2n}}{2} \times \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \\ \langle \Delta Y \rangle^2 &= 1 + \frac{(\lambda_1^n - \lambda_2^n)^2}{2} \\ &\quad + \frac{\lambda_1^{2n} - \lambda_2^{2n}}{2} \times \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $\phi = \phi_{\text{pump}} - \phi_{\text{signal}} - \phi_{\text{idler}}$ 是抽运光与闲置光, 信号光之间的相对位相. 由上式看出最大压缩出现在 $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$ 是没有压缩的. 实际上, 这些情况可以在无损耗 $k = 0$ 时的 Fokker-Planck 方程的数值解中明显的看出.

参照上述 QPM 技术的理论处理, 我们将位相不匹配的 Fokker-Planck 的解应用到 QPM 上, 只须改变通过每半个周期长度 L 的增益系数的符号即可.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 \times \text{sign}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L} + \phi\right)\right] \\ &= \epsilon_0 \times \text{sign}[\sin(\Delta kx + \phi)], \end{aligned} \quad (35)$$

式中 ϵ_0 为没有 QPM 技术时的增益, ϕ 为相对位相.

5. 数值计算结果与分析

在我们的计算中, 对参数的选取包括以下几点:

(I) 取 LiNbO₃ 晶体作为参量放大晶体, 参照文献 13], 当 $\epsilon_3 = 100\text{esu}$ (相当于 $I = 2.5\text{MW}/\text{cm}^2$), 增益 $g_0 = 0.9 \times 10^{-2} \epsilon_3 \text{cm}^{-1}$ 即我们公式中的 $\epsilon_0 = g_0 = 0.9\text{cm}^{-1} \approx 1\text{cm}^{-1} = 0.1\text{mm}^{-1}$, 这就是我们计算中所取的在没有 QPM 时的增益. 我们假设热库中的参数 $\bar{n} \approx 0$.

(II) QPM 结构参数, 文献 5] 的例子, $\Delta = 2L = 30\mu\text{m} = 3 \times 10^{-2} \text{mm}$ (周期长度). 在我们的计算中取定 $L = (\pi/200)\text{mm}$, 于是有 $K = \pi/2L = [(\Delta k/2)^2 - \epsilon^2]^{1/2} \approx \Delta k/2$, 得 $\Delta k = 200(\text{mm})^{-1}$. 我们又取定 L 为长度单位, 于是便得出 $\Delta k = \pi$, $\epsilon_0 = 0.1 \times \pi/200$, G

$= g_0/K = 0.1/100 = 0.001$, $\Delta = \Delta k/2K \approx 1$.

(III) 根据上述参数及方程 (11) (35) 我们求得图 2, 3 和图 4, 5 分别为当 $\Delta k = \pi$, $k = 0 \times \epsilon_0$, $\epsilon_0 = 0.1 \times \pi/200$ 时和 $\Delta k = \pi$, $k = 0.2, 1, 2, 10 \times \epsilon_0$, $\epsilon_0 = 0.1 \times \pi/200$ 时, $\langle (\Delta\beta)^2 \rangle / 2$, $\langle (\Delta\tilde{\beta})^2 \rangle / 2$ 随传输距离 x (单位长度为 L) 的变化图. 我们只要在正规编序方差 $\langle (\Delta x_1)^2 \rangle$: , $\langle (\Delta x_2)^2 \rangle$: 两边同时加上 1/4 即可以获得相应的量子振幅起伏 $\langle (\Delta x_1)^2 \rangle$: , $\langle (\Delta x_2)^2 \rangle$:. 而 $\langle (\Delta x_1)^2 \rangle$: , $\langle (\Delta x_2)^2 \rangle$: 是变量 $\langle (\Delta\beta)^2 \rangle / 2$, $\langle (\Delta\tilde{\beta})^2 \rangle / 2$ 的一半. 在无损耗 $k = 0$ 的理想情况下, 图 3 代表 $\phi = \pi/2$ 压缩最大的情形, 这个结果与 (34) 的解析式所估算的是一致的. 顺便提一下, $\phi = 0$ 是没有压缩的, 实际计算证明了这一点, 但在图中没有给出. 从图 5 中可以看到, 当损耗很小 $k = 0.2 \times \epsilon_0$ (实线 1)) 的时候, 压缩为 $\langle (\Delta x_2)^2 \rangle = 1/4 - 0.2 = 0.05$ 接近于理想情况. 然而在阈值 $k = \epsilon_0$ (实线 (2)) 处, 压缩 $\langle (\Delta x_2)^2 \rangle = 1/4 - 0.1 = 1/6.7$ 稍小于文

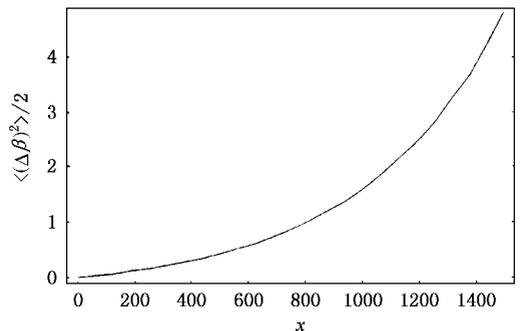


图 2 $\Delta k = \pi$, $k = 0 \times \epsilon_0$, $\epsilon_0 = 0.1 \times \pi/200$ 时, $\langle (\Delta\beta)^2 \rangle / 2$ 随 x 的变化曲线图

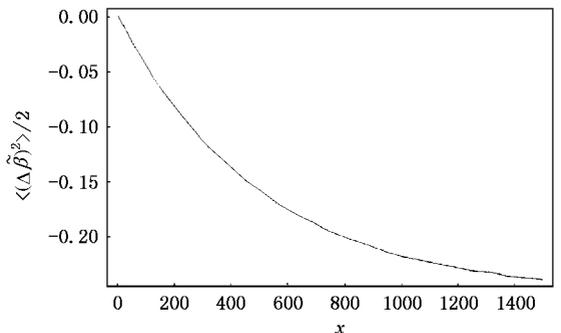


图 3 $\Delta k = \pi$, $k = 0 \times \epsilon_0$, $\epsilon_0 = 0.1 \times \pi/200$ 时, $\langle (\Delta\tilde{\beta})^2 \rangle / 2$ 随 x 的变化曲线图

文献 [2] 给出的阈值附近的结果 $1/8$, 这是由 QPM 的内在性质决定的。由文献 [10, 11] 得到准位相匹配稍逊于位相匹配; 当损耗增大到 $k = 2 \times \epsilon_0$ (点划线)

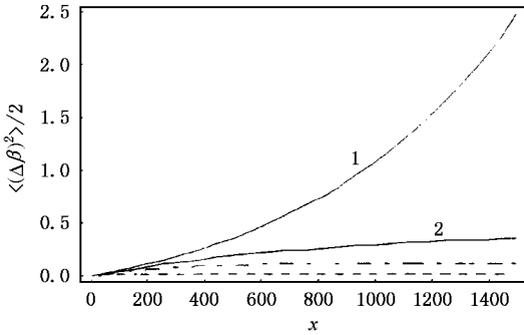


图4 $\Delta k = \pi$, $\epsilon_0 = 0.1 \times \pi/200$ 实线(1)、实线(2)、点划线、虚线分别表示 $k = 0.2 \times \epsilon_0$, $k = 1 \times \epsilon_0$, $k = 2 \times \epsilon_0$, $k = 10 \times \epsilon_0$ 时, $\langle (\Delta\beta)^2 \rangle / 2$ 随 x 的变化曲线图

6. 小 结

众所周知, Langevin 方程和 Fokker-Planck 方程对求解简并光学参量放大和非简并光学参量放大的量子特性均适用, 但在上面已提到应用 Langevin 方程时受 $k = 0$ 的限制。故在一般 $k \neq 0$ 情况下只有采用 Fokker-Planck 方程。我们知道, 抽运损耗和相位不匹配已经构成了在运用 Fokker-Planck 方程求解简并光学参量放大和非简并光学参量放大过程中遇到

时图中的曲线表示了随着损耗逐步增加压缩呈减小的趋势。很显然, 当损耗很大 $k = 10 \times \epsilon_0$ (虚线) 时, 压缩接近于真空起伏。

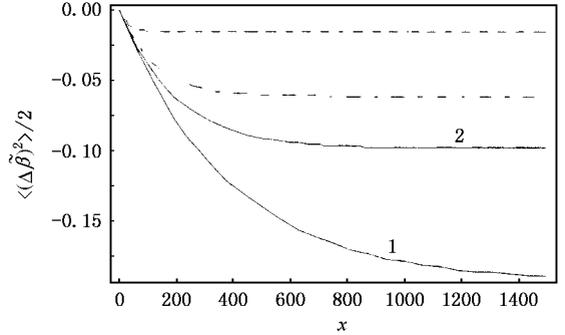


图5 $\Delta k = \pi$, $\epsilon_0 = 0.1 \times \pi/200$ 实线(1)、实线(2)、点划线、虚线分别表示 $k = 0.2 \times \epsilon_0$, $k = 1 \times \epsilon_0$, $k = 2 \times \epsilon_0$, $k = 10 \times \epsilon_0$ 时, $\langle (\Delta\beta)^2 \rangle / 2$ 随 x 的变化曲线图

的两大难题。本文在前文的基础上, 得到相位不匹配情况下 Fokker-Planck 方程的一个新的解析解。并将结果应用于以 LiNbO_3 晶体作为 QPM 参量晶体的装置中, 结果表明: 准位相匹配情况下的 Fokker-Planck 解与 Langevin 方程的解一致。更进一步讨论了一般 $k > 0$ 时的情况。当损耗很小 $k = 0.2 \times \epsilon_0$ 时, 压缩接近于理想压缩; 阈值 $k = \epsilon_0$ 处的压缩为 $1/6.7$ 稍小于位相匹配情况时的 $1/8$; 当损耗很大 $k > \epsilon_0$ 时, 压缩继续减小, 接近于真空起伏。

[1] Armstrong J A, Bloembergen N, Ducuing J and Pershan P S 1962 *Phys. Rev. B* **127** 1918
 [2] Fejer M M, Magel G A, Jundt D H and Byer R L 1992 *IEEE J. Quantum Electron.* **28** 2631
 [3] Bencheikh K, Huntziger E and Levenson J A 1995 *J. Opt. Soc. Am. B* **12** 847
 [4] Noirie L, Vidakovic P and Levenson J A 1997 *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 1
 [5] Li Y M, Wu Y D, Zhang K S, Xie C D and Peng K C 2002 *Chin. Phys. Soc.* **11** 790
 [6] Chickarmane V S and Agarwal G S 1998 *Opt. Lett.* **23** 1132
 [7] Longhi S, Marano M and Laporta P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 033803
 [8] Zhu S N, Zhu Y Y and Ming N B 1997 *Science* **278** 843

[9] Yao J H, Li G G, Xu J J and Zhang G Y 1999 *Chin. J. Quant. Electron.* **16** 289 (in Chinese) [姚江宏, 李冠告, 许京军, 张光寅 1999 量子电子学报 **16** 289]
 [10] Tan W H, Li Y F and Zhang W P 1988 *Acta Phys. Sin.* **37** 396 (in Chinese) [谭维翰, 李宇舫, 张卫平 1988 物理学报 **37** 396]
 Tan W H, Li Y F and Zhang W P 1987 *Opt. Comm.* **64** 196
 [11] Zhao C Y, Tan W H and Guo Q Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2694 (in Chinese) [赵超樱, 谭维翰, 郭奇志 2003 物理学报 **52** 2694]
 [12] Boyd R W 1992 *Nonlinear Optics* (New York: Academic) p75
 [13] Shen Y R 1984 *The Principles of Nonlinear Optics* (John Wiley & Sons Inc) p127

The solution of phase-mismatched Fokker-Planck equation and its application in the QPM device^{*}

Zhao Chao-Ying Tan Wei-Han

(*Department of Physics , Shanghai University , Shanghai 200444 , China*)

(Received 16 September 2004 ; revised manuscript received 18 November 2004)

Abstract

A new analytical solution for the phase-mismatched Fokker-Planck equation of degenerate parametric amplification , and its application in evaluation of the amplitude quantum fluctuation after passing through the quasi-phase-matching(QPM) device is presented. The calculated results for QPM device , agree with that of the Langevin equation in the case of no loss $k = 0$, and give a general solution for $k \neq 0$, from which we can derive the influence of squeezing on the loss coefficient k .

Keywords : degenerate parametric amplification , phase-mismatched Fokker-Planck equation , QPM technique

PACC : 4250 , 4265K

^{*} Project supported by Shanghai leading discipline program of Shanghai Education Committee