第 54 卷 第 7 期 2005 年 7 月
1000-3290/2005/54(07)/2971-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.7,July,2005

离散时空中的非塌缩的尘埃球解

陈 光
(东华大学信息学院,上海 200051)

(2004 年 12 月 7 日收到;2005 年 1 月 10 日收到修改稿)

引进了实数的层次性与离散化,将连续函数理论加以改进和推广为离散函数理论,并基于由离散函数理论所表示的经典广义相对论来讨论尘埃物质的引力塌缩问题,指出了关于这个问题的连续体系的 Oppenheimer 和 Snyder 解中的 Friedmann 内解与 Schwarzschild 外解的不完整性并加以拓展和离散化,导出了一种非塌缩的尘埃物质结构,消除了引力奇性并揭示了时空离散化的深刻性质.

关键词:离散实数,离散时空,广义相对论,Oppenheimer 和 Snyder 解,奇性自由
PACC:0230,0420

1. 引 言

早在 1939 年,Oppenheimer 和 Snyder 在关于均匀密度零压星的引力解的著名的经典论文[1]中曾经断言引力塌缩导致引力奇性的形成.在广义相对论的发展史上,这是一个公认的极为重要的理论结果.它一直影响着人们对于引力的最为深奥的性质的认识以及最为重大的问题的探索.然而,当重新探讨 Oppenheimer 和 Snyder 解时,我们发现它实际上是不完整的[2].它并不能正确地连接作为内解和外解的 Friedmann 度规和 Schwarzschild 度规.或换言之,在这个解中由 Friedmann 度规所表示的内部时空特性是共形平直的,而由 Schwarzschild 度规所表示的外部时空特性则是渐近平直的,鉴于具有不同几何性质的这两种时空之间只可能通过一个固定的球面相连接而不可能通过一个变化着的球面进行转换,因此其作为一个引力塌缩解便导致了时空几何上的不完整性.实际上,也正是这种时空几何上的不完整性显示了连续时空理论的不足.进一步的分析揭示了,一个完整的尘埃物质的时空结构一定是离散的,而为了描述离散的时空结构,就必须有一个离散的数学理论.为此,本文首先通过引进实数的层次性与离散化而将已有的连续体系的函数理论加以改进和推广为离散体系的函数理论.接着,基于由离散函数理论所表示的 Einstein 引力理论来研究尘埃物质的引力塌缩问题.通过对于连续体系的 Oppenheimer 和 Snyder 解的拓展与离散化,得到了一个完整的离散体系的引力解.它所表示的是一种非塌缩的奇性自由的尘埃球结构.由此揭示了时空离散化的深刻性质,同时也说明了通过时空的离散化可以消除引力奇性的问题.

2. 实数的层次性与离散化

引进 k 阶实数 $\alpha_{ck}C^k$.其中 C 为一个充分大的正实数;$\alpha_{ck}\in R_s$,$R_s=\{\omega,\omega\in R,-C^{1/2}<\omega<C^{1/2}\}$,$R$ 为实数域;$i\geqslant k\geqslant l$,$i,l\subset\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.定义 α_{ck} 的离散取值 α_k 并构成 i 阶离散实数 $A_i=\sum\limits_{k=l}^{i}\alpha_kC^k$ 使之满足

1) 当 $-C^{-1/2}<\alpha_{ck}<C^{-1/2}$ 时,有 $\alpha_k=0$;

2) 若 $\alpha_k\neq0$,$k=m,n$,且 $m>n$,则有 $\dfrac{|\alpha_mC^m|}{|\alpha_nC^n|}>C$;

3) 一个 i 阶的离散实数 A_i 至少属于它的一个 i' 阶的等价类 $\tilde{A}_{i'}$.所有 i 阶的离散实数 $\{A_i\}$ 构成了 i' 阶的等价类的集合 $\{\tilde{A}_{i'}\}$.在 $\tilde{A}_{i'}$ 中任意的两个 i 阶离散实数 $A_i=\sum\limits_{k=l}^{i}\alpha_kC^k$ 和 $B_i=\sum\limits_{k=l}^{i}\beta_kC^k$,有 $\alpha_i=\beta_i$,且至多相差一个 $i'\leqslant i-1$ 阶的离散实数,并记 $A_i\overset{i'}{\approx}B_i$.

可知,一个 i 阶离散实数的 i' 阶等价类可以表示为 i'' 阶等价类的集合,而一个 i'' 阶等价类可以表示为 i''' 阶等价类的集合等等,其中 $i'\geqslant i''\geqslant i'''\geqslant\cdots$.

另外，由实数的不同的量化形式可以形成不同的 i 阶离散实数及其 i' 阶等价类．我们记 R 上的各阶离散实数或其等价类的全体为 $\tilde{R}$．

3．离散函数理论

定义离散函数，它表示离散自变量与离散因变量之间的映射．离散自变量简称离散变量而离散因变量简称离散函数．离散变量与离散函数均为 $\tilde{R}$ 上的集合．记离散变量的阶数为 j，而离散函数的阶数为 i 或 k 等等，且这些阶数均为整数变量并随着离散变量或离散函数而变化．接着，定义离散函数的极限、连续、导数、微分和积分等运算．

1)极限

设 $f(x)$为一 i 阶离散函数，A 是一个 i 阶离散实数，x_0 是 j 阶离散变量的一个元素，称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 上的极限，如果存在 x_0 的 j' 阶等价类和 A 的 i' 阶等价类，且当 x 属于 x_0 的 j' 阶等价类时，$f(x)$ 属于 A 的 i' 阶等价类

$$f(x) \overset{i'}{\approx} A, \quad x \overset{j'}{\approx} x_0. \tag{1}$$

2)连续

如果 i 阶离散函数 $f(x)$ 在 $\tilde{R}$ 的一个 j 阶离散实数集合上有定义，且对应于该集合中的一个元素 x_0 有 i 阶离散函数值 $f(x_0)$，则称离散函数 $f(x)$ 在该元素 x_0 上连续，如果对应于 x_0 的 j' 阶等价类，存在 $f(x_0)$ 的 i' 阶等价类，且当 x 属于 x_0 的 j' 阶等价类时，$f(x)$ 属于 $f(x_0)$ 的 i' 阶等价类

$$f(x) \overset{i'}{\approx} f(x_0), \quad x \overset{j'}{\approx} x_0. \tag{2}$$

3)导数

定义 i 阶离散实数 $f'(x_0)$ 为 k 阶离散函数 $f(x)$ 的对应于 $\tilde{R}$ 的一个 j 阶离散实数集合上的一个元素 x_0 的导数，如果在该集合上，对应于 x_0 的 j' 阶等价类，存在 k 阶离散实数 $f(x_0)$ 的 k' 阶等价类和 i 阶离散实数 $f'(x_0)$ 的 i' 阶等价类且满足

$$f'(x_0) \overset{i'}{\approx} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f(x) \overset{k'}{\approx} f(x_0), \quad x \overset{j'}{\approx} x_0 \ (x \neq x_0). \tag{3}$$

称 $f'(x)$ 为 x 的离散导函数并简称导数，如果 $f'(x)$ 在 $\tilde{R}$ 的一个离散实数集合中的每一个等价类的离散点集的每一个点上均存在．

4)微分

设 $f(x)$ 为 j 阶离散变量 x 的 k 阶离散函数，且 x 属于它的 j' 阶等价类中的某一 j'' 阶等价类，而 Δx 为 x 所属的 j'' 阶等价类中的任一元素与相邻的 j'' 阶等价类中的任一元素之差，则由(3)式有

$$f(x + \Delta x) - f(x) \overset{k''}{\approx} f'(x)\Delta x,$$
$$k'' \leqslant k' - 1, \quad k' \leqslant k - 1.$$

称

$$\mathrm{d}y \equiv f(x + \Delta x) - f(x) \overset{k''}{\approx} f'(x)\Delta x,$$
$$k'' \leqslant k' - 1, \quad k' \leqslant k - 1 \tag{4}$$

为 k 阶离散函数 $f(x)$ 在 x 处相应于 Δx 的微分．又称 $\mathrm{d}x \overset{j''}{\approx} \Delta x$ 为 j 阶离散自变量 x 的微分．这里，$\mathrm{d}y$ 的阶数为 $k' \leqslant k-1$ 而 $\mathrm{d}x$ 的阶数为 $j' \leqslant j-1$．

5)积分

(a)不定积分

如果 i 阶离散函数 $f(x)$ 在 $\tilde{R}$ 的一个 j 阶离散实数集合上有定义，且 $f(x)$ 是 k 阶离散函数 $F(x)$ 的导数，或 $f(x)\mathrm{d}x$ 是 $F(x)$ 的微分，即

$$f(x) \overset{i'}{\approx} F'(x) \overset{i'}{\approx} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \text{ 或}$$

$$\mathrm{d}F(x) \overset{k''}{\approx} f(x)\mathrm{d}x, \quad k'' \leqslant k' - 1, \quad k' \leqslant k - 1,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数．

易证，如果在 $\tilde{R}$ 的一个集合上，$F(x)$ 是离散函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x) + \eta$ 也是 $f(x)$ 的原函数，这里 $\eta \overset{k''}{\approx} D$，而 D 为任意的实常数．

称 i 阶离散函数 $f(x)$ 的 k 阶原函数 $F(x) + \eta$ 的全体为 i 阶离散函数 $f(x)$ 的不定积分，并记

$$\int^{*} f(x)\mathrm{d}x \overset{k'}{\approx} F(x) + \eta. \tag{5}$$

(b)定积分

设 $f(x)$ 为 $\tilde{R}$ 的一个 j 阶离散实数集合上的 i 阶离散函数，a 和 b 分别为这个集合上的两个离散实数且 $a < b$，又设 $[a, b]$ 为这个集合上的包含 a 和 b 以及所有小于 b 和大于 a 的 j 阶离散实数的 j' 阶等价类的一个子集，这个子集共具有 $\omega + 1$ 个 j' 阶等价类 $\{\tilde{x}_l, l = 0, 1, \cdots, \omega\}$，除了包含 a 和 b 的两个 j' 阶等价类之外，在其他每个 j' 阶等价类中任取一个离散实数 $x_l \in \tilde{x}_l, l = 1, 2, \cdots, \omega - 1$ 并形成一个离散实数点列

$$\Delta_\omega = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_\omega\},$$
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\omega = b.$$

定义 $\Delta x_l = x_l - x_{l-1}, l = 1, 2, \cdots, \omega$，并形成 k 阶和

$$\sum_{l=1}^{\omega} f(x_{l-1})\Delta x_l \text{ 或} \sum_{l=1}^{\omega} f(x_l)\Delta x_l,$$

则如果对于任一点列 Δ_ω,这些和式都是 k' 阶等价的,便称其为 f 在$[a,b]$上的定积分,并记

$$\int_a^{*b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{k'}{\approx} \sum_{l=1}^{\omega} f(x_{l-1})\Delta x_l \overset{k'}{\approx} \sum_{l=1}^{\omega} f(x_l)\Delta x_l. \quad (6)$$

以上定义可以直接推广到多元函数.

4. 离散函数理论与连续函数理论的关系

离散函数理论是通常的连续函数理论的改进和推广.可知,离散函数理论的基本特点在于它包含了一个充分大的标度系数 C 和等价关系 $\overset{i}{\approx}$ 以及由其表示的离散实数的等价类及其运算关系.首先,在一个 i 阶离散实数 $A_i = \sum_{k=l}^{i}\alpha_k C^k$ 中包含了由 C 的不同幂次所标度的各阶量,而且由于离散化的定义使得 $\frac{|\alpha_m C^m|}{|\alpha_n C^n|} > C(\alpha_k \neq 0, k = m, n, m > n)$,于是若当 $k=0$ 时,把 $\alpha_k C^k = \alpha_0$ 看作为基本数,则当 $\alpha_k \neq 0$ 和 $k>0$ 或 $k<0$ 时,可把 $\alpha_k C^k$ 看作为 k 阶的大数或 $-k$阶的小数.从而在这种离散化与相对标度的意义上,一个 i 阶离散实数就统一地表示了基本数和各阶的大数及小数.并且,当 $C\to\infty$ 时,则 $\alpha_k C^k(k=0)$可以在整个实数域上取值,而 $\alpha_k C^k(\alpha_k \neq 0, k>0)$ 或 $\alpha_k C^k(\alpha_k \neq 0, k<0)$也就成为通常意义上的 k 阶无限大或 $-k$ 阶无限小了.不过这时的 C 和 $\alpha_k C^k(k \neq 0)$已不再是数而仅仅是一些数学符号而已.这也反映了连续体系的函数理论并不具有数的统一性.因此,从这种意义上,离散函数理论是连续函数理论的改进.其次,连续体系的函数的定义域和值域均为 R 上的集合,而离散体系的函数的定义域和值域则为 $\tilde{R}$ 上的集合.也就是说,连续函数是定义在连续变量的区间上,而离散函数则是定义在离散变量的等价类的集合上的.可知,对于任一连续函数,可以适当的形式将其连续变量的取值区间分割为以 ω 个取值点为中心的邻域,并使得每一邻域可以离散化为一个 j 阶离散实数的 j' 阶等价类.由此可以得到相应的以这些 j 阶离散实数为离散变量的离散函数,使得离散函数在离散变量的任一点上的值等于连续函数在连续变量的相应点上的值,且离散函数在离散变量的任一点上具有与连续函数在连续变量的相应点上相对应的极限、连续、导数和微分的性质,而离散函数在离散变量的等价类的集合上具有与连续函数在连续变量的取值区间上相对应的积分性质,等等.并且,当 $C\to\infty$ 时,$\omega\to\infty$,该离散函数将退化为相应的连续函数.这就意味着,对于一个连续体系,可以在保持其形式不变的情况下,将其中的函数与变量及其运算符号均赋予离散函数理论的含义,使之成为一个离散体系.或者说,任一连续体系总存在着相应的离散体系 .但反过来说,一个离散体系却未必存在着相应的连续体系.例如后面将要讨论的离散时空的 Einstein 方程的 Oppenheimer 和 Snyder 解.因此,在这个意义上,离散函数理论是连续函数理论的推广,而连续函数理论则是离散函数理论在特定的条件下当 $C\to\infty$ 时的一种近似.当然,这可以推广到包含高阶导数以及多元函数的情况.

还需说明的是关于离散函数的离散性与连续性的概念的含义.前者指的是变量和函数的取值,且离散取值构成了等价类;而后者指的是在变量和函数之间构成了等价类的映射,因此两者之间是不矛盾的.另外,这里所称的连续函数指的是定义域和值域均为连续域的函数,它与通常所称的函数的连续性也不是同一个层次上的概念.

5. 离散时空中的尘埃球解

基于离散函数理论,在不改变已有物理定律的微分方程的条件下,可以把任一物理场变量和任一时空坐标变量都由 R 上的集合变换为 $\tilde{R}$ 上的集合,从而把一个 n 维的物理场的值域由 R^n 上的集合变换为 $\tilde{R}^n$ 上的集合,把该场的定义域即四维时空坐标由 R^4 上的集合变换为 $\tilde{R}^4$ 上的集合,继而把所有连续函数理论的运算变换离散函数理论的运算,由此便可以把通常的连续时空的场理论加以改进和推广为离散时空的场理论.依照这样的方法,就可以将连续时空的 Einstein 引力理论加以离散化.下面我们就基于离散时空的 Einstein 引力理论来讨论尘埃物质的引力塌缩问题.

首先,考虑关于尘埃物质的连续体系的引力塌缩解亦即 Oppenheimer 和 Snyder 解[1].根据这个解,在适当的坐标系中,尘埃物质球的内部时空几何可以表示为 Friedmann 度规[3]

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\bar{t}^2 + b^2(\bar{t}) \times \left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1-k\bar{r}^2} + \bar{r}^2(\mathrm{d}\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}\,\mathrm{d}\bar{\phi}^2)\right], \quad (7)$$

其中 $b(\bar{t})$ 由摆线方程给出

$$\bar{t} = \frac{\eta + \sin\eta}{2\sqrt{k}},\ b = \frac{1}{2}(1 + \cos\eta). \tag{8}$$

(8)式中的参数 η 被限定在 $[0,\pi]$ 的范围之中,而 $\eta = \pi$ 为本性奇点.又根据 Birkhoff 定理[4],尘埃球的外部时空几何必须服从 Schwarzschild 度规[5]

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - 2GM/r} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{9}$$

同样,在(9)式中也存在着本性奇点 $r = 0$,还有坐标奇点 $r = 2GM$.尘埃球的内外部时空度规由下列的坐标变换[6]所联系(其中,$\bar{r} = a$,$k = \frac{2GM}{a^3}$,a 为在共动坐标系中尘埃球的半径,而 M 为尘埃物质的引力质量):

$$r = aR(\eta) = \frac{a}{2}(1 + \cos\eta), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} t = 2GM\Big\{ &\ln\left|\frac{(a/(2GM) - 1)^{1/2} + \tan(\eta/2)}{(a/(2GM) - 1)^{1/2} - \tan(\eta/2)}\right| \\ &+ (a/(2GM) - 1)^{1/2} \\ &\times [\eta + (a/(4GM))(\eta + \sin\eta)]\Big\}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\theta = \bar{\theta}, \tag{12}$$

$$\phi = \bar{\phi}. \tag{13}$$

基于引力塌缩的观点,(10)—(13)式被认为是描述塌缩着的尘埃球面的测地线方程.从而,对于给定的 θ 和 ϕ 而言,这些方程便对应着起始于最大的球面 $r = ab(0) = a$,而终止于本性奇点 $r = ab(\pi) = 0$ 的一根径向测地线.正是由于引力塌缩是一个动态的过程,故在该测地线方程中球径坐标 r 是坐标时 t 的函数.然而,Schwarzschild 度规(9)则是一个静态的度规,其中的球径坐标 r 和坐标时 t 是两个独立的坐标变量.因此,由尘埃物质球的引力塌缩是不可能在其外部形成一个 Schwarzschild 时空的.因为对于给定的 θ 和 ϕ 而言,由该测地线方程所得到的 r-t 平面上的一根测地线与 Schwarzschild 时空中的一个 r-t 平面是不等价的.于是在连续体系的 Friedmann 内解与 Schwarzschild 外解之间是不相连接的.实际上,考虑到 Friedmann 坐标是尘埃物质的共动坐标,从而在尘埃物质的测地线方程之中便仅仅包含着 Friedmann 坐标的 $\mathrm{d}\bar{r} = 0$ $(\bar{r} = a)$ 和相应的 Schwarzschild 坐标的 $\mathrm{d}r = 0(r = a)$ 或 $\mathrm{d}r \neq 0(r \neq a)$ 的情况.而对于一般的时空几何来说,与任一 Friedmann 或 Schwarzschild 坐标点相关的线元则包含着 $\mathrm{d}\bar{r} = 0$ 和 $\mathrm{d}\bar{r} \neq 0$ 或 $\mathrm{d}r = 0$ 和 $\mathrm{d}r \neq 0$ 的情况.诚然,为了使得内外部时空相互连接,就必须考虑一般线元的情况.据此并由(7)—(13)式可知,在且仅在 $r = \bar{r} = a$ 处,尘埃物质球的内外部时空是相互连接的.或从时空几何性质上来看,可知尘埃物质球的内部 Friedmann 时空是共形平直的,而其外部 Schwarzschild 时空则是渐近平直的,因此不可能存在着一个引力塌缩的过程而能够导致这两种不同的时空性质的转换.也就是说,具有开放空间也即存在着外部引力场的尘埃物质一定是非塌缩的.继而,考虑到 Friedmann 内解是一个动态解,而 Schwarzschild 外解则是一个静态解,为了使得内外解之间相互连接,唯一的可能是 Friedmann 内解具有周期性而且时空是离散的.为此,必须去掉对于参数 η 在 $[0,\pi]$ 上的限制而加以扩展并离散化.实际上,不存在任何基于微分方程的理由必须将 η 限制在该范围之中.于是,随着离散的 η 的增加,固有时 $\bar{t}$ 也将单调地增加,而只要标度因子 b 保持不变,则这样扩展和离散化了的 Friedmann 内解便成为一个等价的静态解,如此由(10)—(13)式便可以和相应地离散化了的 Schwarzschild 外解相连接了.如上所述,在连续理论的离散化过程中,所有的场和时空坐标都可以自然地由 R 变换到 $\tilde{R}$ 上,同时为了方便,所有的时空坐标、参量和场及运算符号都保持不变,从而变换后的所有的场方程都将保持原来的形式.由此,我们可以 2π 为一 $i'(i' \leqslant -1)$ 阶等价意义上的基本单位并选择 $\eta = 0$ 为基准值而将参数 η 离散化,亦即令 $\eta = 2n\pi + \sum_{k=l}^{i'}\eta_k C^k$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,并且对于给定的 n,由 $\sum_{k=l}^{i'}\eta_k C^k$ 的变化而形成 η 的一个 i' 阶等价类,再将 $\eta \overset{i'}{\approx} 2n\pi$ 和 $k = \frac{2GM}{a^3}$ 代入(8)式中的第二式,便有

$$\bar{t} \overset{i'}{\approx} n\bar{\tau},\ \bar{\tau} = \pi a\sqrt{\frac{a}{2GM}},\ b \overset{i'}{\approx} 1. \tag{14}$$

又将 $\eta \overset{i'}{\approx} 2n\pi$ 代入(10)和(11)式,则有

$$r \overset{i'}{\approx} a \tag{15}$$

和

$$\begin{aligned} &t \overset{i'}{\approx} n\tau, \\ &\tau \overset{i'}{\approx} 4\pi GM(a/(2GM) - 1)^{1/2}(a/(4GM) + 1). \end{aligned} \tag{16}$$

这里,在 i' 阶等价的意义上,a 为在 $[0,a]$ 实数范围内离散球径坐标 r 的取值,而 τ 为离散坐标时 t 的

基本单位.于是就得到了 Schwarzschild 坐标的离散化.可见,尘埃物质球具有固定的半径 $r \stackrel{i'}{\approx} a$,从而离散化的引力解便不是一个塌缩解,而是一个等价的静态解.这样,相应于 $r < a$ 的是尘埃球的内部时空,它是共形平直的,而相应于 $r > a$ 的则是其外部时空,它是渐近平直的,在 $r \stackrel{i'}{\approx} a$ 上两者相互连接并构成了一个完整的时空几何结构.

接着,当 $\eta \stackrel{i'}{\approx} 2n\pi$ 和 $\bar{r} = a$ 时,由(7)—(9)和(12)及(13)式,可以求得

$$\mathrm{d}\bar{t} \stackrel{i'}{\approx} (1 - 2GM/a)^{1/2}\mathrm{d}t. \tag{17}$$

而由(14)和(16)式则可导出

$$t \stackrel{i'}{\approx} (1 - 2GM/a)^{1/2}(1 + 4GM/a)\bar{t}. \tag{18}$$

于是,只要对(18)式两边微分并与(17)式比较,便可得到

$$a \stackrel{i'}{\approx} 4GM. \tag{19}$$

而将(19)式分别代入(14)—(16)式,则有

$$\bar{t} \stackrel{i'}{\approx} n\bar{\tau}, \quad \bar{\tau} \stackrel{i'}{\approx} 4\sqrt{2}\pi GM \tag{20}$$

和

$$r \stackrel{i'}{\approx} 4GM \tag{21}$$

及

$$t \stackrel{i'}{\approx} n\tau, \quad \tau \stackrel{i'}{\approx} 8\pi GM. \tag{22}$$

最后,若取尘埃物质球的质量为

$$M \stackrel{i'}{\approx} (8\pi G)^{-1/2}, \tag{23}$$

则由(20)—(22)式有

$$r \stackrel{i'}{\approx} \frac{1}{2\pi}(8\pi G)^{1/2} \tag{24}$$

和

$$\tau \stackrel{i'}{\approx} (8\pi G)^{1/2} \tag{25}$$

及

$$\bar{\tau} \stackrel{i'}{\approx} (4\pi G)^{1/2}. \tag{26}$$

可见,M,r 和 τ 及 $\bar{\tau}$ 分别具有 Planck 质量、Planck 长度和 Planck 时间的量级.又注意到,由(20)—(26)式,若取尘埃物质球的质量为 Planck 质量的整数倍,则其等效半径和基本离散时间长度将分别为 Planck 长度和 Planck 时间的整数倍.这意味着可以由一些基本的尘埃物质单元来形成一个大质量的尘埃物质结构.

如此就得到了一种具有离散时空特性的尘埃物质球解.作为拓展了的离散的 Oppenheimer 和 Snyder 解,具有引力质量 M 的这种尘埃物质球有着确定的半径 $r \stackrel{i'}{\approx} 4GM$,并在相应的球面上连接着具有不同几何性质的内外部时空,因此不会由于引力塌缩而形成黑洞,在相关的离散的 Friedmann 内解和 Schwarzschild 外解之中也不存在着本性奇点或坐标奇点,因而是完整和奇性自由的.

6. 结　　论

综上所述, Oppenheimer 和 Snyder 解的 Friedmann 内解和 Schwarzschild 外解在几何上的不完整性预示了具有开放空间的尘埃物质是非塌缩和时空离散的.而描述离散时空的物理过程需要一个离散的数学理论.为此,我们借助一个大标度系数 C 加上等价关系 $\stackrel{i}{\approx}$,建立了实数域上的 i 阶离散实数及其等价类,进而将连续函数理论加以改进和推广为离散函数理论.接着,基于由离散函数理论所表述的 Einstein 引力理论,对连续体系的 Oppenheimer 和 Snyder 解进行了扩展和离散化,消除了这个著名的经典解的不完整性,从而导出了一种离散时空的尘埃球解.由此显示:1)时空的基本结构是离散的并且可以通过 Einstein 方程而由物质的分布加以确定;2)具有离散时空性质的这种尘埃物质是非塌缩的,在其解中排除了所谓的 Friedmann 和 Schwarzschild 奇点;3)这种尘埃物质可以具有由 Planck 质量、Planck 时间和 Planck 长度所表征的基本单元并可以形成大质量的结构.同时也说明了,对于引力现象的完整的描述需要一个离散的数学理论,借助这个数学理论将可以更好地揭示物理世界的更深层次的性质.

本文的数学部分曾与陈苑惠教授和王宗尧教授进行了有益的讨论,谨致以由衷的谢意.

[1] Oppenheimer J R and Snyder H 1939 *Phys. Rev.* **56** 455

[2] Chen G 2002 *Acta Phys. Sin* **51** 179 (in Chinese) [陈　光 2002 物理学报 **51** 179]

[3] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology* (John Wiley)

[4] Birkhoff G 1923 *Relativity and Modern Physics* (Harvard University Press, Cambridge, Mass)

[5] Schwarzschild K 1916 *Sity. Preuss Aksd.* Wiss. 189
[6] Misner C W, Thorne K S and Wheeler J A 1973 *Gravitation* (Freeman, San Francisco)

A non-collapsing solution of a uniform-density ball of dust in the discrete spacetime

Chen Guang
(*College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai* 200051, *China*)

(Received 7 December 2004; revised manuscript received 10 January 2005)

Abstract

A discrete function theory is found based on the continuous function theory and the discretization of real numbers, which is used to express the classical general relativity and analyse the collapse of a uniform-density ball of dust. It is shown that the intrinsic and extrinsic geometrices do not actually match at the join between the Friedmann interior and the Schwarzschild exterior for the Oppenheimer and Snyder solution as a continuum. With the discrete function theory, we can extend and discretize the solution to form a complete non-collapsing solution of the ball of dust, thereby eliminate the gravitational singularity and reveal the deep nature of the discretization of spacetime.

Keywords: discrete real number, discrete spacetime, general relativity, Oppenheimer and Snyder solution, singularity-free
PACC: 0230, 0420