

Boiti-Leon-Pempinelli 系统的新变量分离解及其 方形孤子和分形孤子*

方建平^{1)†} 郑春龙^{1)‡} 朱加民¹⁾

¹⁾ 浙江丽水学院物理系, 丽水 323000

²⁾ 上海大学应用数学和力学研究所, 上海 200072

(2004 年 9 月 7 日收到, 2004 年 12 月 16 日收到修改稿)

利用拓展的 Riccati 方程映射法, 得到了(2+1)维 Boiti-Leon-Pempinelli 系统新的变量分离解. 根据得到的分离变量解, 构造出该系统新型的孤子结构——方孤子和分形孤子.

关键词: Boiti-Leon-Pempinelli 系统, 拓展 Riccati 映射, 方形孤子, 分形孤子

PACC: 0340, 0365, 0545

1. 引 言

在物理学的众多领域中, 如流体力学、非线性光学、凝聚态物理等^[1-3], 现代孤子理论扮演了重要角色, 得到了广泛应用, 其中高维孤子系统的局域结构理论, 已引起了相关学者的极大关注. 如, 由 Boiti 等人^[4,5]通过 Bäcklund 变换法发现的 Davaer-Stewartson 系统的 dromion 型的钟状局域孤子, 使人们对(2+1)维的孤子系统产生了新的兴趣. 近 10 年来, 许多学者对高维非线性物理模型进行了广泛的研究, 提出了诸如线孤子、半线孤子、峰孤子、紧致子、环孤子、盘孤子、折叠子和泡孤子等^[6-10]. 随着人们对非线性理论研究的不断深入, 若干求解非线性方程的新方法也被提出, 如多线性分离变量法^[2]、齐次平衡法^[7]和映射法^[11]等. 由于变量分离法得到的解中往往包含若干个任意函数, 使得系统的解相当丰富而且便于构建多种类型的局域结构. 最近, Zhang 等对映射法进行了拓展^[12], 得到的解中也包含有特殊的任意函数. 从中我们得到启发, 用拓展的映射法研究高维非线性系统, 有可能同样得到非线性系统的多种局域结构. 拓展的 Riccati 映射法的基本思想是^[12]对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (1)$$

设它有如下形式的解:

$$u = \sum_{i=0}^n \alpha_i(x) \phi^i(\omega(x)), \quad (2)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma + \phi^2, \quad (3)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\alpha_i(x)$ 和 $\omega(x)$ 为待定的任意函数. 显然, 当 $\omega(x) = ax + by + ct$ 时, 就是通常的行波约化. 将(2)和(3)式代入(1)式就可以得到一组 $\alpha_i(x)$ 和 $\omega(x)$ 的约束方程. 通过约束方程确定求得变量 $\alpha_i(x)$ 和 $\omega(x)$, 再根据 Riccati 方程解

$$\phi = \begin{cases} -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma} \omega), & \sigma < 0, \\ -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma} \omega), & \sigma < 0, \\ \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma} \omega), & \sigma > 0, \\ -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma} \omega), & \sigma > 0, \\ -\frac{1}{\omega}, & \sigma = 0 \end{cases} \quad (4)$$

就可以确定所求系统的精确解.

本文的工作是将扩展的 Riccati 映射法进一步延拓并运用到(2+1)维 Boiti-Leon-Pempinelli (BLP) 系统^[13]

$$u_{yt} = (u^2 - u_x)_{xy} + 2v_{xxx},$$

* 国家自然科学基金(批准号:10172056), 浙江省自然科学基金(批准号:Y604106), 浙江省“新世纪 151 人才工程”基金和丽水学院自然科学基金(批准号:KZ04008)资助的课题.

† E-mail: zjlsfp@yahoo.com.cn

$$v_t = v_{xx} + 2uw_x, \tag{5}$$

求出 BLP 系统具有任意函数的新变量分离解. 然后根据所求的变量分离解, 并选取解中合适的任意函数构建出(2 + 1)维 BLP 系统势函数的二种新型孤子——方形孤子和分形孤子. 文献 [12] 运用映射法得到了上述 BLP 系统的一些特殊的精确解. 文献 [13] 已证明了上述 BLP 系统的可积性. 文中还证明了, 通过适当的变换, BLP 系统可以从著名的 sin-Gordon 方程或 sinh-Gordon 方程导出. 这些方程出现在数学物理的许多分支^[14], 并被广泛地应用于原子物理、分子物理、粒子物理和浅水波模型等实际问题中^[15, 16].

2. (2 + 1) 维 BLP 系统的变量分离解

根据对方程 (5) 的领头项分析, 可设其形式解为

$$u = f + g\phi, v = F + G\phi, \tag{6}$$

这里 $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t), f = f(x, y, t), g = g(x, y, t), F = F(x, y, t), G = G(x, y, t), \phi = \phi(\omega), \omega = \omega(x, y, t)$ 均为待求函数. 将 (6) 式和 (3) 式代入方程 (5) 并按 ϕ 的同次幂合并, 令 $\phi^i (i = 1, 2, \dots)$ 前的系统为零得下列方程组:

$$2Gw_x^2 + 2gGw_x = 0, \tag{7}$$

$$Gw_{xx} - Gw_t + 2fGw_x + 2G_x w_x + 2gGx = 0, \tag{8}$$

$$2gF_x + 2gGw_x\sigma - G_t + 2Gw_x^2\sigma + 2fG_x G_{xx} = 0, \tag{9}$$

$$F_{xx} + 2fGw_x\sigma + 2G_x w_x\sigma - F_t + Gw_{xx}\sigma + 2ff_x - Gw_t\sigma = 0, \tag{10}$$

$$12Gw_x^3 - 6gw_y w_x^2 + 6g^2 w_y w_x = 0, \tag{11}$$

$$-4g_x w_y w_x - 2gw_x w_t + 4fgw_y w_x + 12G_x w_x^2 - 4gw_x w_{xx}) - 2g_y w_x^2 + 2g^2 w_{xy} + 4g_y gw_x - 2gw_y w_{xx} + 4gw_y g_x + 12Gw_x w_{xx} = 0, \tag{12}$$

$$6G_{xx} w_x + 2fg_x w_y + 2f_y gw_x - g_y w_t + 2gw_x f_x - g_{xx} w_y + 2gg_{xy} - 8gw_y w_x^2\sigma + 2g_y g_x - 2g_x w_{xy} + 8g^2 w_y w_x\sigma - gw_{ty} + 16Gw_x^3\sigma - g_y w_{xx} + 2fg_y w_x - gw_{xy} + 2fgw_{xy} + 6G_x w_{xx} + 2Gw_{xxx} - 2g_{xy} w_x - g_t w_y = 0, \tag{13}$$

$$-g_{ty} + 2gf_{xy} + 12G_x w_x^2\sigma + 2G_{xxx} + 12Gw_x w_{xx}\sigma - 4gw_x w_{xy}\sigma + 2gf_x + 2fg_{xy} + 4g_y gw_x\sigma + 4fgw_y w_x\sigma + 2f_y g_x - g_{xy} g + 4gw_y g_x\sigma - 2g_y w_x^2\sigma - 2gw_y w_{xx}\sigma - 4g_x w_y w_x\sigma - 2gw_y w_t\sigma + 2g^2 w_{xy}\sigma = 0, \tag{14}$$

$$-gw_{xy}\sigma + 6G_{xx} w_x\sigma - g_{xx} w_y\sigma - 2g_{xy} w_x\sigma$$

$$-g_y w_{xx}\sigma + 2ff_x + 2ff_{xy} - gw_{ty}\sigma - f_{ty} - f_{xy} - 2g_x w_{xy}\sigma + 2fg_y w_x\sigma - 2gw_y w - x^2\sigma^2 + 2f_y gw_x\sigma + 2gw_y f_x\sigma + 6G_x w_{xx}\sigma + 2F_{xxx} + 2Gw_{xxx}\sigma + \chi(g) w_y w_x\sigma^2 + 2fg_x w_y\sigma - g_y w_t\sigma + 4Gw_x^3\sigma^2 - g_t w_y\sigma + 2fgw_{xy}\sigma = 0. \tag{15}$$

由 (7) 式和 (11) 式可得

$$g = -w_x, G = -w_y. \tag{16}$$

将 (16) 式代入 (8) 式得

$$f = \frac{w_t - w_{xx}}{2w_x}. \tag{17}$$

将 (16) 和 (17) 式代入 (9) 式得

$$F = \int \frac{w_x w_{yt} - w_{xy} w_t + w_{xy} w_{xx} - w_x w_{xxy}}{2w_x^2} dx. \tag{18}$$

再将 (16) (17) 和 (18) 式代入 (10) (13) (14) 和 (15) 式得到两个关于变量为 w 的约束方程

$$2w_x w_{yt} w_{xx} + 2w_x w_{xxy} w_t + w_x w_{xy} w_{xt} - w_x w_{xy} w_{xxx} + w_{xxy} w_x^2 - 4w_{xx} w_{xy} w_t - 3w_{xx} w_{xxy} w_x - w_x^3 \left[(-w_{ty} w_x^2 + w_{yt} w_x w_{xt} - w_{xy} w_{xxt} w_x + w_{xyt} w_t w_x + w_{xy} w_t w_x - w_x w_{xx} w_{xyt} + w_{xxyt} w_x^2 - w_{xxy} w_{xt} w_x - 2w_{xt} w_{xy} w_t + 2w_{xt} w_{xy} w_{xx}) w_x^3 dx + 4w_{xy} w_x^4\sigma + 3w_{xy} w_{xx}^2 - w_{xyt} w_x^2 - w_t w_x w_{yt} + w_{xy} w_t^2 = 0 \tag{19}$$

和

$$4w_x^5 w_{xxy}\sigma + w_{xxy} w_x^3 + w_x^3 w_{ty} - w_x^2 w_{xy} w_{xt} + 2w_x^2 w_{xy} w_{xxt} + 2w_t w_{xxy} w_x^2 + 4w_{xx} w_{xyt} w_x^2 + 12w_{xy} w_t w_{xx} + w_x w_{xxy} w_t^2 + 4w_x^2 w_{xxy} w_{xt} - 4w_x^2 w_{xxy} w_{xxx} + 9w_x w_{xxy} w_{xx}^2 - 3w_{xy} w_t^2 w_{xx} - 2w_x^3 w_{xxyt} - 2w_x^2 w_{yt} w_{xt} + 8w_{xy} w_{xx} w_x w_{xxx} + 4w_{xy} w_{xx}\sigma w_x^4 + 2w_x w_{yt} w_{xx} w_t - 9w_{xy} w_{xx}^3 - 4w_{xy} w_t w_x w_{xxx} - 8w_{xy} w_{xx} w_x w_{xt} - 4w_{xt} w_{xxy} w_x^2 - 2w_t w_{xyt} w_x^2 + 2w_x^2 w_{yt} w_{xxx} + 4w_{xy} w_t w_x w_{xt} - 4w_x w_{yt} w_{xx}^2 - w_x^2 w_{xy} w_{xxxx} - 8w_x w_{xxt} w_{xx} w_t = 0. \tag{20}$$

显然, 要从 (19) 式和 (20) 式中解得 w 的通解是很难的, 但仔细观察它们的特点, 发现存在如下变量分离形式的特解

$$w = \chi(x, t) + \varphi(y), \tag{21}$$

其中 $\chi(x, t) \equiv \chi$ 是关于 x, t 的任意函数 $\varphi(y) \equiv \varphi$ 是关于 y 的任意函数.

现在将 (16) (17) (18) (21) 以及 (4) 式代入 (6) 式, 则得 (2 + 1) 维 BLP 的变量分离解.

情形 1 当 $\sigma < 0$ 时,

$$u_1 = \frac{\chi_t - \chi_{xx} + 2\chi_x^2 \sqrt{-\sigma} \tan(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi))}{2\chi_x}, \quad (22)$$

$$v_1 = \varphi_y \sqrt{-\sigma} \tan(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi)). \quad (23)$$

$$u_2 = \frac{\chi_t - \chi_{xx} + 2\chi_x^2 \sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi))}{2\chi_x}, \quad (24)$$

$$v_2 = \varphi_y \sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi)). \quad (25)$$

情形 2 当 $\sigma > 0$ 时,

$$u_3 = \frac{\chi_t - \chi_{xx} - 2\chi_x^2 \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))}{2\chi_x}, \quad (26)$$

$$v_3 = -\varphi_y \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)). \quad (27)$$

$$u_4 = \frac{\chi_t - \chi_{xx} + 2\chi_x^2 \sqrt{\sigma} \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))}{2\chi_x}, \quad (28)$$

$$v_4 = \varphi_y \sqrt{\sigma} \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)). \quad (29)$$

情形 3 当 $\sigma = 0$ 时,

$$u_5 = \frac{\chi_t - \chi_{xx}}{2\chi_x} + \frac{\chi_x}{\chi + \varphi}, \quad (30)$$

$$v_5 = \frac{\varphi_y}{\chi + \varphi}. \quad (31)$$

3. (2+1) 维 BLP 系统的势函数的特殊孤子结构

由于(22)–(31)式中都包含有任意函数 φ, χ ,

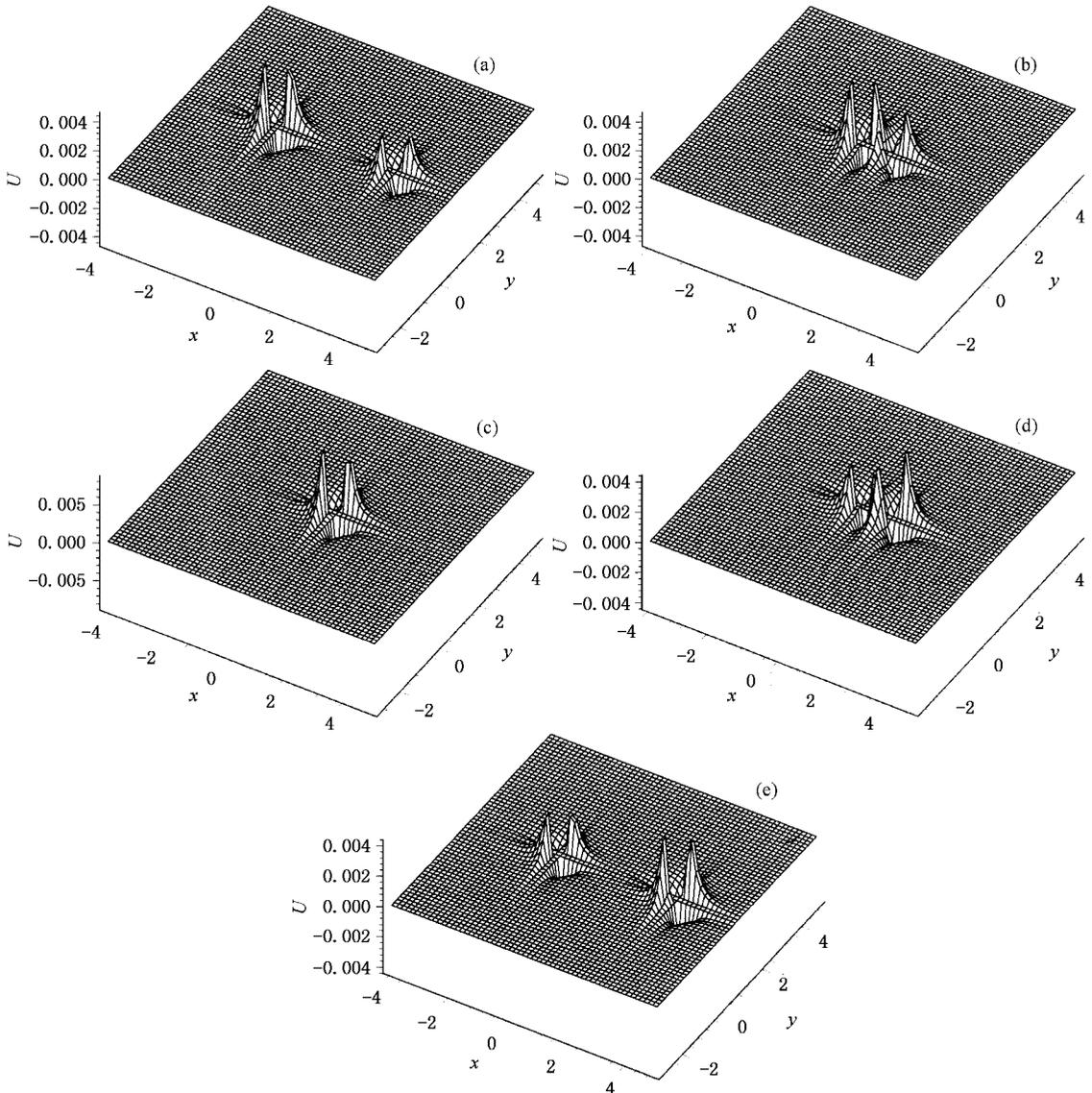


图 1 利用(34)和(33)式得到的棱形孤子时间演化图($\sigma = -1$, 时间分别为(a) $t = -2$ (b) $t = -0.5$ (c) $t = 0$ (d) $t = 0.5$ (e) $t = 2$)

使得系统的解变得相当丰富. 如 $\chi = kx + ct, \varphi = ly$. 所有上述解则转为行波解. 同时我们注意到(31)式的势函数 $U = u_y = v_x$.

$$U = \frac{\chi_x \varphi_y}{(\chi + \varphi)^2}. \tag{32}$$

经过简单的变换就可转换为变量分离法的一般式^[17,18]. 因此, 利用(32)式可以构建出利用变量分离法所构建出的局域结构. 但本文则是讨论得到一些特殊的、新的局域结构, 以(22)式为例. 由(22)和(23)式有

$$U = -\varphi_y \alpha (1 - \tanh^2(\sqrt{\alpha}(\chi + \varphi))) \chi_x \\ = -\varphi_y \chi_x \sigma \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}(\chi + \varphi)). \tag{33}$$

1) 棱形孤子及弹性相互作用

由于(33)式中的 φ, χ 的任意性, 不妨取 χ 和 φ 为如下形式:

 $\chi = 1 + 0.15 \exp(0.1 \Theta(1, x + t))$

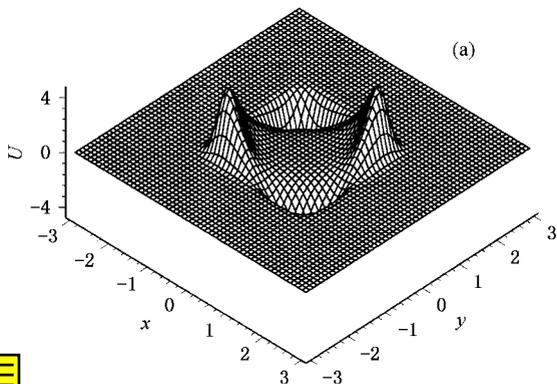


图2 (a) 势函数(33)式利用(35)式得到的方孤子解 (这里 $t=0, \sigma=-1$) (b) 为相应的等高线图 ($U=0.01, 0.1, 1, 3$)

$$+ 0.1 \exp(0.1 \Theta(1, x - t)), \\ \varphi = 1 + 0.1 \exp(0.1 \Theta(1, y)). \tag{34}$$

这里 Θ 为特殊函数 Zeta 函数. 于是可得到具有棱形的局域结构. 图1显示了两个棱形孤子的相互作用情况, 从图中可以看出, 两孤子作用前后的振幅、波速以及形状都没有发生变化, 是弹性作用.

2) 方孤子和周期方孤子

当(33)式中任意函数 φ, χ 取如下形式

$\chi = 2 - 0.05 \exp(x^2 + t), \varphi = -0.05 \exp(y^2)$, (35) 得到了一种新型的孤子, 据形状, 称之为“方孤子”, 如图2. 不仅如此, 还可以得到具有周期性行为的方孤子, 当任意函数 χ 和 φ 取如下形式:

$$\chi = 1 + 0.1 \exp(\mathcal{R}(x + t, 1.0, 1.0)), \\ \varphi = 1 + 0.1 \exp(\mathcal{R}(y, 1.0, 1.0)), \tag{36}$$

这里的 \mathcal{R} 为 Weierstrass 函数, 我们就可得到图3所示的具有周期行为的方孤子解.

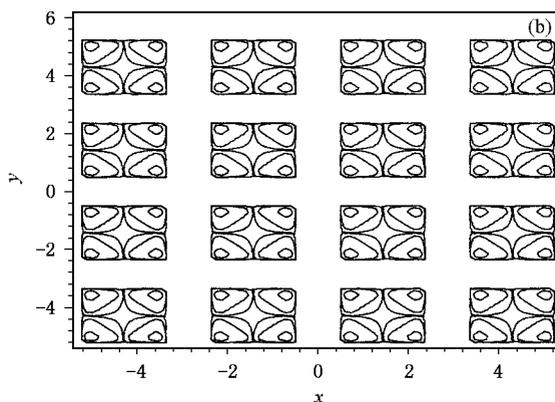
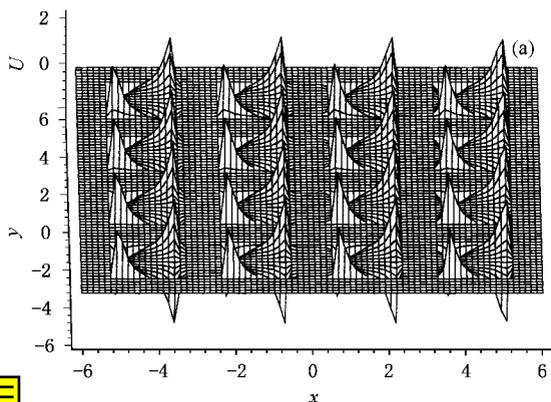
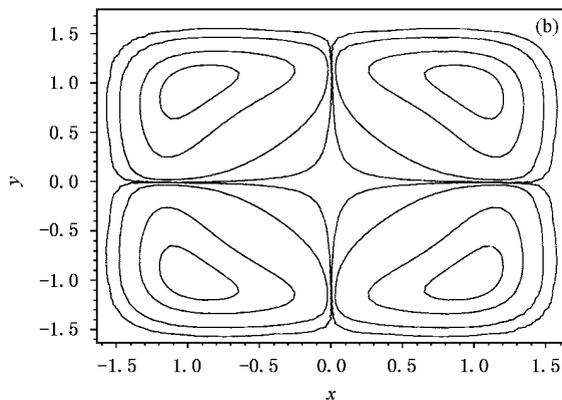


图3 (a) 势函数(33)式利用(36)式得到的方孤子解 ($t=0, \sigma=-1$) (b) 为相应的等高线图 ($|U|=0.01, 0.1, 1, 3$)

4. (2+1) 维 BLP 系统势函数的分形结构

(33) 式中的任意函数不仅使得系统有丰富的局

域结构, 还存在分形现象^[17,18], 只要任意函数取得适当, 可得到系统的随机分形和规则分形两种情况.

1) 随机分形结构

在(33)式中, 取任意函数为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + \exp(-(x + t) \chi(x + t + G)), \\ \varphi &= 1 + \exp(-y(y + F)). \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=0}^k (1.5^{0.5k} \sin(1.5^k x)), \\ F &= \sum_{i=0}^k (1.5^{0.5k} \sin(1.5^k y)). \end{aligned}$$

图 4 显示的就是当 $k = 30$ 时的随机 dromion 分形图, 其波峰、形状随时间 t 随机变化.

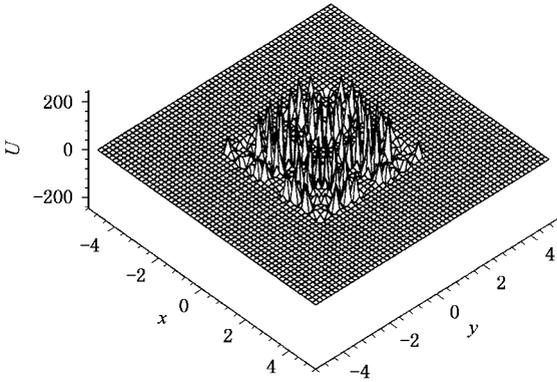


图 4 势函数(33)式利用(36)式得到的随机分形图($k = 30, \sigma = -1$)

2) 规则分形

在(33)式中,取任意函数为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi &= 1 + \exp(1 - (x + t) \chi(x + t + \sin(\ln x^2, 0.7) \\ &\quad + \text{cr}(\ln x^2, 0.7))), \\ \varphi &= 1 + \exp(-y(y + \sin(\ln y^2, 0.7) \\ &\quad + \text{cr}(\ln y^2, 0.7))). \end{aligned} \quad (38)$$

图 5 给出了 $x \in [-0.04, 0.04], y \in [-0.04, 0.04]$ 时的情况,我们接着考察了 $x \in [-0.004, 0.004], y \in [-0.004, 0.004]$ 的情况,得到与图 5 完全相同的斑图,实际上, x, y 的取值范围一直往下取时,也有相同的结构.

5. 结论与讨论

通过对(2+1)维 BLP 的研究,可以发现:1)映射

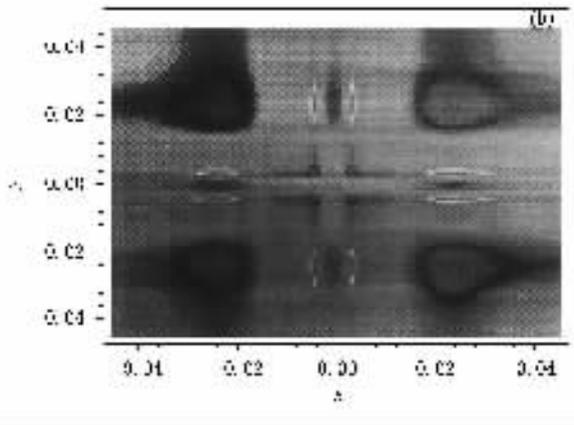
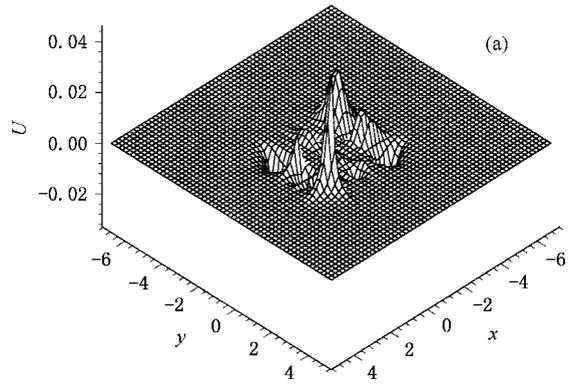


图 5 势函数(33)式利用(38)式得到的分形斑图($\sigma = -1$)

法不仅能构建行波解,同样也能像分离变量法那样构建出更为丰富的其他解,在本文中,如前所述 $w = kx + ly + ct$ 的形式,则可得到的行波解;类似地,如果选取 w 函数为变量分离的形式,则可得变量分离解,如果由约束方程(19)(20)得到其他形式的 w 函数,那么系统的精确解将会更为丰富.2)从该系统的研究过程发现(16)(17)式中的 f, g 的结果与 Bäcklund 变换法、Painlevé 截断法以及变量分离法中的种子解形式基本上是一样的,它们之间也一定存在着某些内在的联系.它们之间究竟有何内在的联系以及如何从本文(19)(20)式得到其他形式的 w 函数有待进一步研究.

作者对张解放教授的建议和讨论表示感谢.

[1] Camassa R and Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
 [2] Tang X Y, Lou S Y and Zhang Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046601
 [3] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
 [4] Boiti M, Leon J, Martina L and Pempinelli F 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 1329

[5] Fokas A S 1998 *Phys. Lett. A* **132** 432
 [6] Ruan H Y and Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 (in Chinese)
 [阮航空、陈一新 2001 物理学报 **50** 586]
 [7] Zhang J F and Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
 [8] Lou S Y 2003 *J. Phy. Amath. Gen.* **36** 3877

- [9] Zheng C L ,Chen L Q and Zhang J F 2004 *Chin . Phys .* **13** 0592
- [10] Fang J P ,Zheng C L and Chen L Q 2004 *Commun . Theor . Phys .* **42** 175
- [11] Fan E G ,Zhang H Q and Lin G 1998 *Chin . Phys .* **7** 649
- [12] Lü Z S and Zhang H Q 2004 *Chaos , Solitons and Fractals* **19** 527
- [13] Boiti M , Leon J J P and Pempinelli F 1987 *Inverse Problem* **3** 293
- [14] Debin H. 2003 *Phys . Lett . A* **314** 51
- [15] Fokas A S 1995 *Phys . D* **87** 145
- [16] Matrasulov D U and Ataev S 2003 *J . Phys . A* **36** 10227
- [17] Zheng C L ,Zhang J F ,Sheng Z M and Huang W H 2003 *Chin . Phys .* **12** 0011
- [18] Zheng C L ,Zhang J F ,Wu F M ,Sheng Z M and Chen L Q 2003 *Chin . Phys .* **12** 0472

New variable separation excitations ,rectangle-like solitons and fractal solitons in the Boiti-Leon-Pempinelli system *

Fang Jian-Ping¹⁾ Zheng Chun-Long^{1,2)} Zhu Jia-Min¹⁾

¹⁾(Department of Physics ,Zhejiang Lishui University ,Lishui 323000 ,China)

²⁾(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics ,Shanghai University ,Shanghai 200072 ,China)

(Received 7 September 2004 ; revised manuscript received 16 December 2004)

Abstract

Using an extended Riccati mapping approach ,we obtain a new type of variable separation solutions for the $(2 + 1)$ -dimensional Boiti-Leon-Pempinelli system. Based on the derived solutions ,two new kinds of soliton excitations i. e. rectangle-like soliton and fractal soliton are constructed in this paper.

Keywords : Boiti-Leon-Pempinelli system , extended Riccati mapping approach , rectangle-like soliton , fractal soliton

PACC : 0340 , 0365 , 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10172056) ,the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y604106) ,the Foundation of New Century 151 Talent Engineering of Zhejiang Province ,and the Natural Science Foundation of Zhejiang Lishui University (Grant No. KZ04008) .