

# 对称非线性耦合混沌系统的同步<sup>\*</sup>

于洪洁<sup>†</sup> 刘延柱

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

(2004 年 10 月 11 日收到 2004 年 11 月 13 日收到修改稿)

研究两个对称非线性耦合混沌系统的同步问题. 通过对系统线性项与非线性项的适当分离, 构造一个特殊的非线性耦合项, 发现在耦合强度  $\alpha = 0.5$  附近的某一区域里存在稳定的混沌同步现象. 提供判断同步误差稳定性的方程, 利用线性系统的稳定性分析准则和条件 Lyapunov 指数来检验同步状态的稳定性. 新方法适用于连续时间系统的混沌同步, 也适用于具有两个(或多于两个)正 Lyapunov 指数的超混沌系统. 以 Lorenz 系统, 超混沌 Rössler 系统作为算例, 数值模拟结果证实所提新方法的有效性.

关键词: 混沌, 同步, 非线性耦合, 稳定性准则, 超混沌

PACC: 0545

## 1. 引 言

二十多年来混沌同步和控制问题在物理、化学、生物等系统中已被广泛地研究<sup>[1-8]</sup>. 由于混沌行为对初始条件和噪声的敏感性, 实际物理系统中很难观测到混沌同步. Pecora 和 Carroll 建议了一个使连续时间系统混沌同步的方法, 称为 PC 方法<sup>[1]</sup>. 他们将一个混沌系统  $S$  分解为两个子系统  $S_1$  和  $S_2$ .  $S_1$  具有正 Lyapunov 指数, 而  $S_2$  的 Lyapunov 指数均为负值. 构造一个和  $S_2$  完全一样的新的子系统  $\hat{S}_2$ . 将子系统  $S_1$  用作驱动系统, 当  $S_1$  的一个状态作为  $\hat{S}_2$  的输入时, 可实现  $S_2$  与  $\hat{S}_2$  混沌同步. PC 方法用于同步一些混沌系统很简单有效, 如 Lorenz 系统<sup>[1]</sup>, Rössler 系统<sup>[1]</sup>等. 混沌同步在安全通讯系统中的应用已在文献 [9, 10] 中报道. 最早建议的同步方法大多适用于仅具有一个正 Lyapunov 指数的系统. 近来也提出了对具有多个正 Lyapunov 指数的超混沌系统的同步问题<sup>[11, 12]</sup>. 同步状态稳定性的必要和充分条件也是近期正在讨论的课题<sup>[13, 14]</sup>. 以往研究耦合振荡器的混沌同步大多是关于线性耦合问题<sup>[8, 15-17]</sup>. Pecora 和 Carroll 研究并解决了通过任一线性耦合的诸多振荡器的同步稳定性问题<sup>[17]</sup>. 仅有少量的文献涉及到通过非线性函数反馈的混沌同步

问题<sup>[18, 19]</sup>.

Yu 和 Liu 于 2003 年提出一个基于线性系统稳定性准则的混沌同步方法(SC 方法)<sup>[5]</sup>. 通过对驱动混沌系统的线性项与非线性项的适当分离, 构造一个受驱动系统的非线性项驱动的反应混沌系统, 利用线性系统稳定性准则保证两个系统的同步. SC 方法适用于自治、非自治混沌系统以及超混沌系统的同步. 作为 SC 方法的发展, 本文提出利用非线性耦合实现混沌同步的新方法. 即通过非线性耦合项的构造使两个混沌系统对称耦合. 研究表明在耦合强度  $\alpha = 0.5$  的邻近区域存在有效的同步现象. 当耦合强度  $\alpha = 0.5$  时, 基于同步误差方程的线性系统稳定性分析准则, 可保证两个系统的混沌同步, 而不需提供条件 Lyapunov 指数进行判断. 对于具有两个或更多的正 Lyapunov 指数的超混沌系统, 也能实现理想的混沌同步. 以 Lorenz 系统和超混沌 Rössler 系统作为算例作数值模拟.

## 2. 混沌同步

考虑如下描述的混沌连续-时间系统:

$$\dot{X}(t) = F(X(t), t), \quad (1)$$

式中  $X(t) \in R^n$  为  $n$ -维状态矢量,  $F: R^n \rightarrow R^n$  将  $F$  适当分离为

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10272074)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yuhongjie@sjtu.edu.cn

$$\dot{X}(t) = G(X(t)) - D(X(t), t), \quad (2)$$

$G(X(t))$  为  $F(X(t), t)$  的线性部分

$$G(X(t)) = A(X(t)), \quad (3)$$

式中  $A$  为满秩的常数矩阵, 通过适当的分离可使  $A$  的所有特征值均具有负实部.  $-D(X(t), t) = F(X(t), t) - G(X(t))$  为  $F(X(t), t)$  的非线性部分. 此时系统 (1) 可写作

$$\dot{X}(t) = AX(t) - D(X(t), t). \quad (4)$$

本文讨论的同步均为完全同步. 对于连续-时间混沌系统 (4), 利用  $D(X_1)$  与  $D(X_2)$  的差, 通过对称非线性耦合构造两个新系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) = & AX_1(t) - D(X_1(t), t) \\ & + \alpha [D(X_1(t), t) - D(X_2(t), t)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t) = & AX_2(t) - D(X_2(t), t) \\ & + \alpha [D(X_2(t), t) - D(X_1(t), t)], \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $X_1, X_2 \in \mathbf{R}^n$  为所构造新系统的状态矢量, 耦合强度  $\alpha$  为常值. 当系统 (5) 和 (6) 实现状态同步时, 即  $X_1(t) = X_2(t)$  时, 系统 (5) (6) 即与原系统 (1) 一致, 保持其混沌动力特性. 取系统 (5) 和系统 (6) 之间的同步误差  $e(t) = X_1(t) - X_2(t)$ . 当  $e(t)$  充分小时, 其变化规律近似用线性方程表示为

$$\dot{e}(t) = [A + (2\alpha - 1) \frac{\partial D}{\partial X}] e. \quad (7)$$

当  $\alpha = 0.5$  时,  $e(t)$  的零点为平衡点. 由于  $A$  的所有特征值实部均为负值, 根据线性系统稳定性准则, 同步误差的零点为渐近稳定, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e(t) \rightarrow 0$ . 此时即实现系统 (5) 和 (6) 的状态矢量  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  的完全同步. 当  $\alpha \neq 0.5$  时, 需要计算方程 (7) 的 Lyapunov 指数, 若同步状态具有稳定性, 则条件 Lyapunov 指数均为负值.

### 3. 数值算例

#### 3.1 Lorenz 系统

作为连续时间系统的例子, 考虑如下描述的 Lorenz 混沌系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (8)$$

当  $\sigma = 16, r = 45.92, b = 4$  时, 系统 (8) 呈现混沌动力特性. 将系统 (8) 右端  $F$  分离成函数  $G(X(t))$  和  $-D(X(t))$  如下:

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ D(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ xz - rx \\ -xy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

雅可比矩阵  $A$  的特征值  $(-16, -1, -4)$  均为负实数. 按照 (5) 式和 (6) 式, 通过对称非线性耦合构造两个新系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1 \\ &+ \alpha(x_1 z_1 - x_2 z_2 - r x_1 + r x_2), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1 + \alpha(-x_1 y_1 + x_2 y_2); \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= -x_2 z_2 + r x_2 - y_2 \\ &- \alpha(x_1 z_1 - x_2 z_2 - r x_1 + r x_2), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{z}_2 = x_2 y_2 - b z_2 + \alpha(-x_1 y_1 + x_2 y_2).$$

按照 (7) 式列出同步误差的微分方程

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (2\alpha - 1)(z_2 - r) & -1 & (2\alpha - 1)x_2 \\ -(2\alpha - 1)y_2 & -(2\alpha - 1)x_2 & -b \end{bmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

若系统 (9) 和 (10) 同步状态是稳定的, 则方程组 (11) 的条件 Lyapunov 指数均为负值. 图 1 给出耦合强度  $\alpha = 0.5$  时的同步结果. 图 1(a) 显示  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  的同步误差  $e_1(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 很快趋于零. 图 1(b) 为  $x_2/x_1$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 的变化图, 可看出两个系统迅速实现同步, 即  $x_2/x_1 = 1$ . 数值模拟中初值采用  $x_1 = y_1 = z_1 = 0.2, x_2 = y_2 = z_2 = 0.21$ . 当  $\alpha = 0.5$  时, 如前所述, 由于雅可比矩阵  $A$  的特征值实部均为负值, 满足线性系统稳定性准则, 其同步误差具有渐近稳定性, 不需计算条件 Lyapunov 指数. 图 1 的模拟结果表明系统 (9) 和 (10) 迅速实现混沌同步.

此外分别选取耦合强度参数  $\alpha = 0.35$  和  $\alpha = 0.9$  进行了混沌同步过程的数值模拟. 图 2(a) 为  $\alpha = 0.35$  时状态  $x_1$  和  $x_2$  的同步误差  $e_2$  随迭代步  $i$  的变化图. 从  $i = 227$  步开始,  $e_2$  已减小到  $10^{-4}$  以下. 计算同步误差的最大 Lyapunov 指数为  $\lambda_{\max} =$

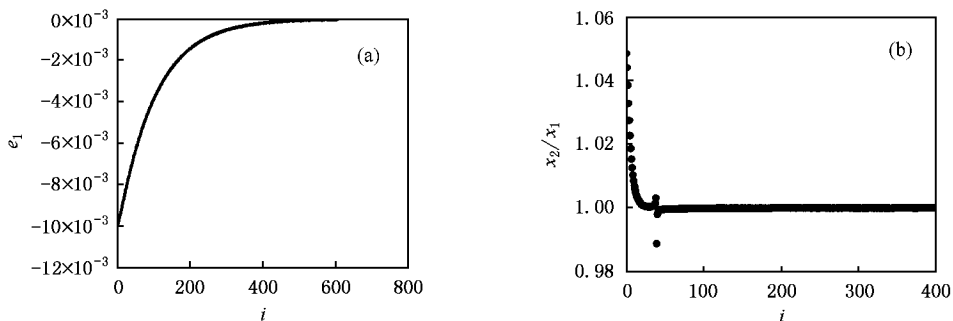


图1 系统(9)和(10)的同步结果.(a)同步误差  $e_1(t)$  随迭代步  $i$  的变化图 (b)  $x_2/x_1$  随迭代步  $i$  的变化图

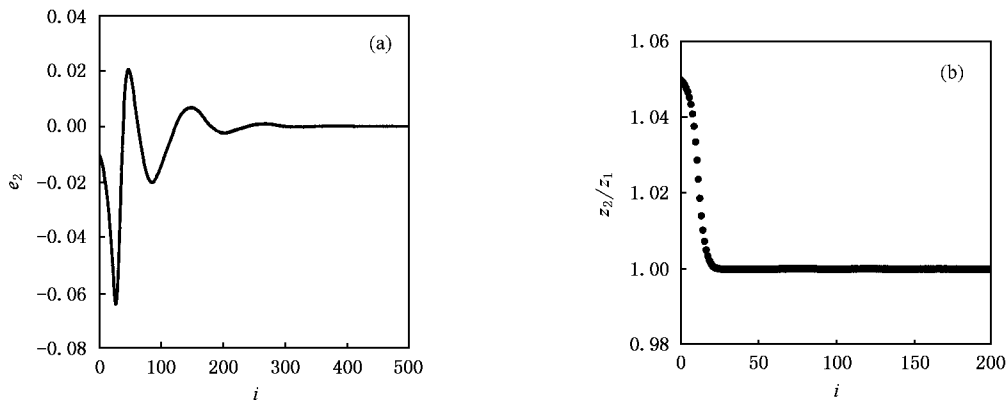


图2 耦合强度分别为  $\alpha = 0.35, \alpha = 0.9$  的同步结果图.(a)同步误差  $e_2$  随  $i$  的变化图,  $\alpha = 0.35$  (b)  $z_2/z_1$  随  $i$  的变化图,  $\alpha = 0.9$

-1.256 表明同步流形是稳定的. 图 2(b) 为  $\alpha = 0.9$  时  $z_2/z_1$  随迭代步  $i$  的变化图, 可看出  $z_2/z_1$  迅速趋于 1, 实现系统状态的完全同步. 同步误差的最大 Lyapunov 指数为  $\lambda_{\max} = -3.986$ , 混沌同步状态是稳定的.

图 3 给出不同  $\alpha$  值对应的最大 Lyapunov 指数图. 显示在  $\alpha \in [0.18, 1.52]$ , 最大 Lyapunov 指数为负值, 在此区间内同步状态具有稳定性. 当  $\alpha \in [0, 0.17]$  时, 混沌系统(9)和(10)不能实现状态的完全同步. 图 4 显示  $\alpha = 0.1$  时, 系统(9)和(10)的状态  $x_1$  和  $x_2$  未能实现同步(取 3000 个迭代步). 当  $\alpha \in [1.53, \infty)$ , 系统(9)和(10)的状态  $X_1$  和  $X_2$  的数值溢出, 当然无法实现混沌同步, 可见较大的耦合强度可以改变混沌系统本身的动力特性. 以上分析表明在耦合强度参数  $\alpha = 0.5$  附近的一段区域内, 能有效地实现两个系统混沌状态的同步, 这对于耦合强度因子的选取有参考意义.

如果是作为由两个单元组成的神经网络模型, 则每个单元可取不同的耦合强度因子. 例如可将系

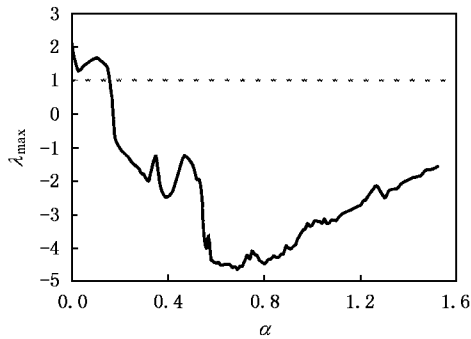


图3 不同  $\alpha$  值对应的最大 Lyapunov 指数图

统(9)和(10)改变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1 \\ &\quad + \alpha(x_1 z_1 - x_2 z_2 - r x_1 + r x_2), \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1 + \alpha(-x_1 y_1 + x_2 y_2); \\ \dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= -x_2 z_2 + r x_2 - y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\beta(x_1 z_1 - x_2 z_2 - rx_1 + rx_2), \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - bz_2 + \beta(-x_1 y_1 + x_2 y_2). \end{aligned}$$

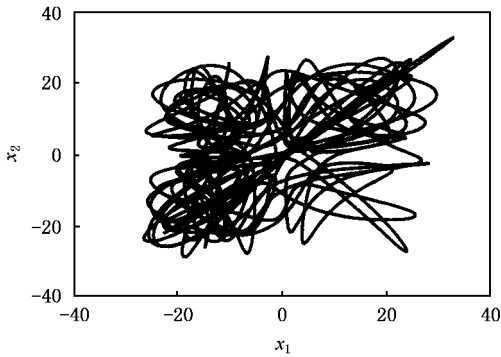


图4 状态  $x_1$  和  $x_2$  没有实现同步,  $\alpha = 0.1$

图5给出  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.8$  时, 二系统的状态  $x_1$  和  $x_2$  实现同步后的结果, 所有的状态点  $(x_1, x_2)$  都在直线  $x_1 - x_2 = 0$  上.

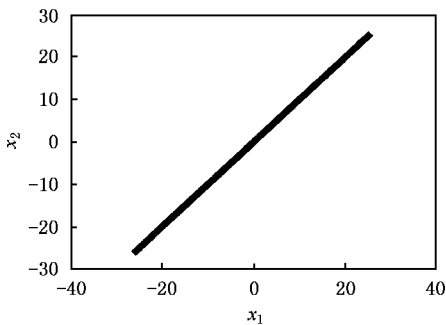


图5  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.8$  时,  $x_1$  和  $x_2$  的同步结果

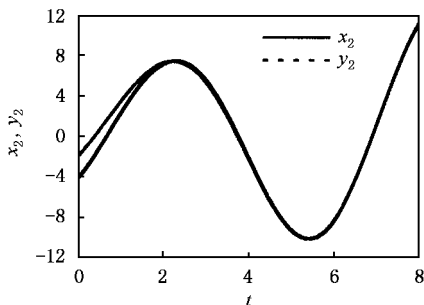


图6  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  同步前后的时间历程

### 3.2. 应用于 Rössler 系统

超混沌 Rössler 系统可描述为<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 + x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 + x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= b + x_1 x_3, \\ \dot{x}_4 &= cx_4 - dx_3, \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $a = 0.25$ ,  $b = 3.0$ ,  $c = 0.05$ ,  $d = 0.5$ , 数值分析显示系统有两个正 Lyapunov 指数  $\lambda_1 = 0.11$ ,  $\lambda_2 = 0.02$ , 表明此系统的超混沌性态. 将方程组(12)的右端分离为函数  $G(X(t))$  和  $-D(X(t))$  如下:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \\ D(x_1, x_2, x_3, x_4) &= - \begin{pmatrix} x_1 \\ 2ax_2 \\ x_3 + b + x_1 x_3 \\ 2cx_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

矩阵  $A$  的特征值为  $(-1, -0.05, -0.625 \pm 0.927i)$ , 此时按照(5)和(6)式构造两个新系统  $\dot{X} = F_1(X(t))$  和  $\dot{Y} = F_2(Y(t))$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 + x_3) - \alpha(x_1 - y_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 + x_4 - \alpha(2ax_2 - 2ay_2), \\ \dot{x}_3 &= b + x_1 x_3 - \alpha(x_3 - y_3 + x_1 x_3 - y_1 y_3), \\ \dot{x}_4 &= cx_4 - dx_3 - \alpha(2cx_4 - 2cy_4); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -(y_2 + y_3) + \alpha(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= y_1 + ay_2 + y_4 + \alpha(2ax_2 - 2ay_2), \\ \dot{y}_3 &= b + y_1 y_3 + \alpha(x_3 - y_3 + x_1 x_3 - y_1 y_3), \\ \dot{y}_4 &= cy_4 - dy_3 + \alpha(2cx_4 - 2cy_4). \end{aligned} \quad (14)$$

取  $\alpha = 0.5$ , 分别从初始值  $x_1(0) = -5$ ,  $x_2(0) = -2$ ,  $x_3(0) = 0.15$ ,  $x_4(0) = 10.5$ ,  $y_1(0) = -5$ ,  $y_2(0) = -4.2$ ,  $y_3(0) = 0.15$ ,  $y_4(0) = 10.5$  出发.  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  实现同步前后的时间历程在图6中给出. 从中看出, 即使初始同步误差较大, 超混沌系统(13)和(14)也能很快实现同步.

## 4. 结 论

本文在 SC 混沌同步方法的基础上, 提出一个对称非线性耦合混沌系统同步的新方法, 在耦合强度  $\alpha = 0.5$  的邻近区域, 发现两个混沌系统存在稳定的混沌同步现象. 当耦合强度  $\alpha = 0.5$  时, 基于线性系统稳定性分析准则, 可保证混沌同步的稳定性, 而

不需提供条件 Lyapunov 指数来进行判断. 当耦合强度取  $\alpha = 0.5$  附近的其他数值时, 需要计算 Lyapunov 指数来检验同步状态的稳定性. 新方法适用于连续时间系统的混沌同步, 对于具有两个或更多的正

Lyapunov 指数的超混沌系统, 也能实现理想的混沌同步. 文中以 Lorenz 系统和超混沌 Rössler 系统为算例. 数值计算结果证实所提出方法的有效性, 该方法也可推广到神经网络的混沌同步问题.

- [ 1 ] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [ 3 ] Atlee Jackson E and Grosu I 1995 *Physica D* **85** 1
- [ 4 ] Pecora L M and Carroll T L 1998 *Phys. Rev. E* **80** 2109
- [ 5 ] Yu H J and Liu Y Z 2003 *Phys. Lett. A* **314** 292
- [ 6 ] Li G H, Xu D M and Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 ( in Chinese ) [ 李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379 ]
- [ 7 ] Tan N *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2989 ( in Chinese ) [ 谭宁等 2004 物理学报 **52** 2989 ]
- [ 8 ] Dhamala M, Jirsa V K and Ding M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074104-1
- [ 9 ] Cuomo K M and Oppenheim A V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 65
- [ 10 ] Kocarev L and Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028
- [ 11 ] Peng J H *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904
- [ 12 ] Duan C K and Yang S S 1997 *Phys. Lett. A* **229** 151
- [ 13 ] Brown R and Rulkov N F 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4189
- [ 14 ] Johnso G A and Mar D J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3956
- [ 15 ] Anishchenko V S, Silchenko A N and Khovanov I A 1998 *Phys. Rev. E* **57** 316
- [ 16 ] Shuai J W, Durand D M 1999 *Phys. Lett. A* **264** 289
- [ 17 ] Pecora L M and Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
- [ 18 ] Ali M K and Fang J Q 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5285
- [ 19 ] Cheng Y X and Wang G R 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 1382 ( in Chinese ) [ 成雁翔、王光瑞 1995 物理学报 **44** 1382 ]
- [ 20 ] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155.

## Synchronization of symmetrically nonlinear-coupled chaotic systems \*

Yu Hong-Jie Liu Yan-Zhu

( Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China )

( Received 11 October 2004 ; revised manuscript received 13 November 2004 )

### Abstract

The synchronization of two symmetrical nonlinear-coupled chaotic systems is discussed. A special nonlinear-coupled term is constructed by suitable separation between linear and nonlinear terms of the chaotic system. The phenomenon of stable chaotic synchronization has been found in a certain region of the coupled strength  $\alpha = 0.5$ . The stability of the synchronous state is examined by the stability criterion of linear systems and the conditional Lyapunov exponent. The Lorenz system and the hyper-chaotic Rössler system are treated as numerical examples. It is shown that the proposed method is effective for chaotic synchronization of time-continued systems and hyper-chaotic systems.

**Keywords :** Chaos, synchronization, nonlinear-coupled system, stability criterion, hyperchaos

**PACC :** 0545

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10272074 ).