第 54 卷 第 8 期 2005 年 8 月
1000-3290/2005/54(08)/3486-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.8,August,2005

Genesio-Tesi 和 Coullet 混沌系统之间的非线性反馈同步*

刘扬正[1)2)]　费树岷[2)]

[1)] (南京工程学院基础部,南京 210013)

[2)] (东南大学自动控制系,南京 210096)

(2004 年 9 月 15 日收到;2005 年 2 月 28 日收到修改稿)

分析了 Genesio-Tesi 系统和 Coullet 系统的特性,表明两系统拓扑不等价但奇异吸引子结构具有一定相似性,而且采用非线性反馈控制方法实现了两系统之间的混沌同步.根据系统的稳定性理论,得到了非线性反馈控制器的结构和反馈控制增益的取值范围.数值仿真的结果表明理论分析的正确性.

关键词:非线性反馈控制,Genesio-Tesi 系统,Coullet 系统,混沌同步

PACC:0545

1. 引　言

混沌是 20 世纪非线性科学领域的重大发现.由于具有潜在的广阔应用前景,混沌控制与同步问题已成为近年非线性科学领域备受关注的研究课题.常见的混沌同步方法有驱动-响应法[1,2]、变量耦合法[3—6]、非线性反馈法[7—9]等.若按驱动系统和响应系统的结构分类,混沌同步又可分为同结构混沌同步、异结构混沌同步、广义混沌同步等多种同步方式.人们对同结构系统的混沌同步研究较多,实现同结构系统的混沌同步也较为容易;而实现异结构系统混沌同步的控制方法一般比较复杂.能否用较简单的方法实现异结构系统的混沌同步,是一项具有实际意义的工作.

Genesio-Tesi 系统[10]和 Coullet 系统[11]是两个拓扑不等价的异结构混沌系统,拥有不同的非线性函数.文献[12]研究了 Genesio-Tesi 混沌系统的同步问题,文献[13]利用系统的输出反馈实现了 Coullet 系统混沌同步,而对这两个系统之间的混沌同步研究鲜见报道.本文根据上述两系统奇异吸引子结构具有相似性的特点,提出一种非线性反馈控制方法实现混沌同步.首先通过理论分析,得到非线性反馈控制器的形式.然后根据系统的稳定性理论,得到了反馈控制增益的取值范围.最后对系统进行仿真,说明理论分析的正确性.

2. 系统特性分析

Genesio-Tesi 系统和 Coullet 系统都是典型的三阶自治非线性系统,归一化方程分别为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= x_3,\\ \dot{x}_3 &= a_3x_3 + a_2x_2 + a_1x_1 + x_1^2;\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2,\\ \dot{y}_2 &= y_3,\\ \dot{y}_3 &= b_3y_3 + b_2y_2 + b_1y_1 - y_1^3.\end{aligned}\tag{2}$$

为了研究问题的方便,两系统的参数取值为 $a_3 = b_3 = -0.45<0$,$a_2 = b_2 = -1.1<0$,$a_1 = -1<0$,$b_1 = 0.8>0$,两系统皆处于混沌状态.

系统(1)具有两个平衡点 $P_1^0(0,0,0)$,$P_1(-a_1,0,0)$.P_1^0 的特征值为 $\lambda_{11} = r_{11} = -0.7530$,$\lambda_{12,13} = \sigma_{11} \pm \mathrm{i}\omega_{11} = 0.1515 \pm 1.1424\mathrm{i}$;$P_1$ 的特征值为 $\lambda_{21} = r_{21} = 0.5839$,$\lambda_{22,23} = \sigma_{21} \pm \mathrm{i}\omega_{21} = -0.5179 \pm 1.1994\mathrm{i}$.两平衡点都是不稳定的鞍焦点,且都满足 $r_{j1}\sigma_{j1} < 0$,

* 国家自然科学基金(批准号:69934010)资助的课题.

$|r_{j1}|>|\sigma_{j1}|>0$ ($j=1,2$). 所以 Genesio-Tesi 混沌系统是单细胞奇异吸引子[14]，相图具有单涡卷特征. 平衡点 P_1 的特征值满足 $r_{11}>0$，$\sigma_{11}<0$，$|r_{11}|>|\sigma_{11}|>0$，根据 Shil'nikov 方法[15]，说明系统存在 Smale 马蹄映射意义上的混沌，如图 1 所示.

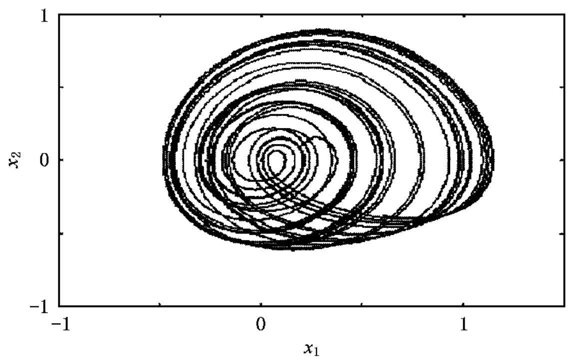

图 1　系统(1)的(x_1，x_2)相图

由(2)式可知，Coullet 系统的三个平衡点为 $P_2^0(0,0,0)$和 $P_2^{\pm}(\pm\sqrt{b_1},0,0)$. P_2^0 的特征值为 $\lambda_{11}=r_{11}=0.5054$，$\lambda_{12,13}=\sigma_{11}\pm i\omega_{11}=-0.4777\pm1.1639i$；$P_2^{\pm}$ 的特征值为 $\lambda_{21}=r_{21}=-0.9842$，$\lambda_{22,23}=\sigma_{21}\pm i\omega_{21}=0.2671\pm1.2468i$. 三平衡点都是不稳定的鞍焦点，且都满足 $r_{j1}\sigma_{j1}<0$，$|r_{j1}|>|\sigma_{j1}|>0$ ($j=1,2$). 所以 Coullet 混沌系统是双细胞奇异吸引子[14]，相图具有双涡卷特征. 平衡点 P_2^0 的特征值满足 $r_{11}>0$，$\sigma_{11}<0$，$|r_{11}|>|\sigma_{11}|>0$，根据 Shil'nikov 方法，说明系统也存在 Smale 马蹄映射意义上的混沌，如图 2 所示.

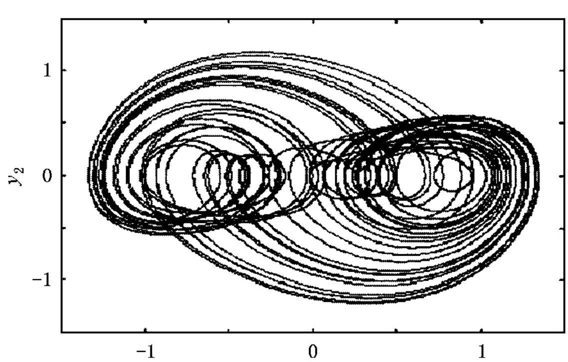

图 2　系统(2)的(y_1，y_2)相图

从以上分析可知，Genesio-Tesi 系统和 Coullet 系统的非线性函数形式不同、平衡点的个数不等、相图的形状和类型不同，因此它们是两个拓扑不等价的异结构混沌系统. 但两系统都存在 Smale 马蹄映射意义上的混沌，奇异吸引子结构具有一定的相似性. 对上述混沌系统，期望找到一种较简单的控制方法，实现系统间的混沌同步.

3. 非线性反馈控制

下面的任务是选择合适的非线性反馈控制器 $u(x,t)$，实现两个系统混沌同步. 由于 Genesio-Tesi 系统和 Coullet 系统是两个不同的系统，分两种情况进行讨论.

3.1. 系统(1)驱动系统(2)同步

Genesio-Tesi 系统作为驱动系统，Coullet 系统为响应系统，将 x_1 作为系统的控制变量，作用在系统(2)的变量 y_3 上，系统(2)的方程变为

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=y_2,\\ \dot{y}_2&=y_3,\\ \dot{y}_3&=b_3y_3+b_2y_2+b_1y_1-y_1^3+u_1(x_1,t).\end{aligned}\tag{3}$$

为了得到 $u_1(x_1,t)$的表达式，先引入线性系统稳定性定理.

引理[16]　设非线性系统

$$\dot{x}=A(t)x+O(x,t)\tag{4}$$

对所有的 t 有 $O(0,t)=0$，如果满足下列三个条件，则(4)式的零解是一致渐近稳定的：条件 1，$\lim\limits_{\|x\|\to0}\frac{\|O(x,t)\|}{\|x\|}=0$对 t 一致成立；条件 2，$A(t)$对所有的 t 有界；条件 3，线性系统 $\dot{x}=A(t)x$ 的零解是一致渐近稳定的.

定理 1　对于响应系统(3)，当采用非线性反馈控制器形式满足 $u_1(x_1,t)=\alpha_1(x_1,e_1)+\delta_1e_1$，其中 x_1 为系统(1)的状态变量，e_1 为两系统的误差，只要反馈增益 δ_1 选取适当的值就可以使系统(1)和系统(3)达到同步.

证　令误差变量

$$\begin{aligned}e_1&=x_1-y_1,\\ e_2&=x_2-y_2,\\ e_3&=x_3-y_3,\end{aligned}$$

由(1)，(3)式得到误差方程

$$\begin{aligned}\dot{e}_1&=e_2,\\ \dot{e}_2&=e_3,\end{aligned}$$

$$\dot{e}_3 = a_3 e_3 + a_2 e_2 + (-3x_1^2 + b_1) e_1 - (3x_1 + e_1) e_1^2 + x_1^3 + x_1^2 + (a_1 - b_1) x_1 - u_1. \tag{5}$$

系统(1),(2)的同步问题转化为(5)式的稳定性问题,只要(5)式在原点处稳定,即可达到同步的目的.令 $O(x,t) = -(3x_1 + e_1) e_1^2$,显然它满足引理的条件 1.

对误差系统(5)设计非线性反馈控制器为

$$u_1(x_1,t) = \alpha_1(x_1,e_1) + \delta_1 e_1,$$

式中

$$\alpha_1(x_1,e_1) = x_1^3 + x_1^2 + (a_1 - b_1) x_1 - 3x_1^2 e_1.$$

这里 δ_1 为反馈控制增益.将(5)式表示为(4)式的形式,则线性系统的矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_1 - \delta_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

(6)式的特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda^3 + (-a_3)\lambda^2 + (-a_2)\lambda - b_1 + \delta_1. \tag{7}$$

由于系统参数 $a_2 < 0, a_3 < 0$,根据 Hurwitz 稳定性判据,只要

$$\begin{gathered} -b_1 + \delta_1 > 0, \\ a_2 a_3 - (-b_1 + \delta_1) > 0, \end{gathered} \tag{8}$$

(7)式就是稳定的多项式.由(8)式解得当控制反馈系数 $\delta_1 \in (b_1, a_2 a_3 + b_1)$时,矩阵 A_1 的特征值都具有负实部,因此,引理中的条件 3 得以满足.由于矩阵 A_1 中的所有系数都是常数,矩阵 A_1 必定有界,满足引理中的条件 2.由此可见,误差系统在非线性反馈控制作用下稳定在原点处,也意味着奇异吸引子结构相似但拓扑不等价的两系统实现了混沌同步.定理 1 得证.

3.2. 系统(2)驱动系统(1)同步

同样可以将 Coullet 系统作为驱动系统,Genesio-Tesi 系统为响应系统,将变量 y_1 作为系统的控制变量,作用在系统(1)的变量 x_3 上,系统(1)的方程变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_3 + a_2 x_2 + a_1 x_1 + x_1^2 + u_2(y_1,t). \end{aligned} \tag{9}$$

定理 2 对于响应系统(9),当采用非线性反馈控制器形式满足 $u_2(y_1,t) = \alpha_2(y_1,e'_1) + \delta_2 e'_1$,其中 y_1 为系统(2)的状态变量,e'_1 为两系统的误差,只要反馈增益 δ_2 选取适当的值就可以使系统(2)和系统(9)达到同步.

定理 2 的证明同定理 1,在此不再重复.当 $\alpha_2(y_1,e'_1) = -y_1^3 - y_1^2 + (b_1 - a_1) y_1 + 2y_1 e'_1$,($e'_1 = y_1 - x_1$),反馈控制增益 $\delta_2 \in (a_1, a_2 a_3 + a_1)$时,两系统实现混沌同步.

4. 系统仿真

用文中给定的系统参数,对 Genesio-Tesi 系统与 Coullet 系统混沌同步进行仿真.当反馈控制增益 $\delta_1 = 1.1$ 时,Genesio-Tesi 系统驱动 Coullet 系统混沌同步,系统误差曲线如图 3 所示.当反馈控制增益 $\delta_2 = -0.6$ 时,Coullet 系统驱动 Genesio-Tesi 系统混沌同步,系统误差曲线如图 4 所示.

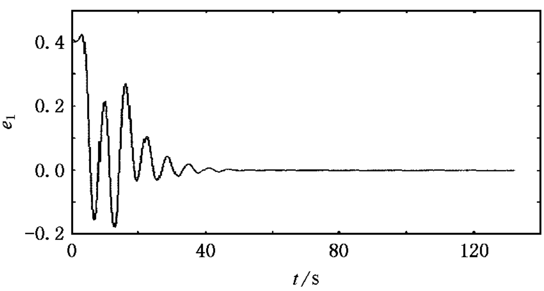

图 3 控制系统(2)与系统(1)同步

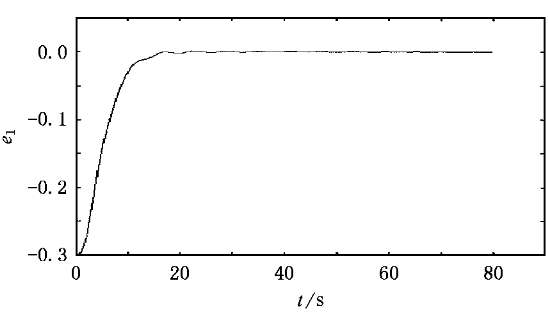

图 4 控制系统(1)与系统(2)同步

5. 结 论

本文利用非线性反馈控制方法,实现了 Genesio-Tesi 系统与 Coullet 系统的混沌同步.该非线性反馈控制器结构简单,涉及的系统变量和需调节的参数少,物理实现容易;反馈控制增益的调节范围较大,

反馈控制增益取值小.所以,只要消耗较少的能量,就能使两个初始值相差较大的异构混沌系统很快实现同步.仿真结果表明,该同步控制方法是正确而有效的.采用较简单的控制方法,实现吸引子结构相似但拓扑不等价的系统混沌同步,为混沌保密通信提供了新的途径和思路.

[1] Pecora L M, Carroll L T L 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 821

[2] Cheng L, Zhang R Y, Peng J H 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 536 (in Chinese) [程 丽、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 536]

[3] Wu C W, Chua L O 1995 *IEEE Trans*. *Circuits Syst*. **42** 430

[4] Wang T B, Chen G Z, Qin T F 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1851 (in Chinese) [王铁邦、陈光旨、覃团发 2001 物理学报 **50** 1851]

[5] Zhang X, Shen K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2702 (in Chinese) [张 旭、沈 柯 2002 物理学报 **51** 2702]

[6] Li S H, Cai H X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1687 (in Chinese) [李世华、蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687]

[7] Kocarev L 2000 *Phys*. *Rev*. E **61** 3716

[8] Gao J F, Luo X J, Ma X K *et al* 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1618 (in Chinese) [高金峰、罗先觉、马西奎等 1999 物理学报 **48** 1618]

[9] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]

[10] Genesio R, Tesi A 1992 *Automatica* **28** 531

[11] Arneodo A *et al* 1981 *Phys*. *Lett*. **81** 4

[12] Chen M Y, Han Z Z 2002 *Acta Electr*. *Sin*. **30** 1477 (in Chinese) [陈茂银、韩正之 2002 电子学报 **30** 1477]

[13] Liu F, Mu Z L, Qiu Z L 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 2191 (in Chinese) [刘 锋、穆肇丽、邱祖廉 1999 物理学报 **48** 2191]

[14] Qiu S S 1996 *J*. *South China Univ*. *Tech*. (Natural Science Edition) **24** 134 (in Chinese) [丘水生 1996 华南理工大学学报 (自然科学版) **24** 134]

[15] Shil'nikov L P 1994 *Int*. *J*. *Bifurc*. *Chaos* **4** 489

[16] Willems J L 1973 *Stabilitat Dynamischer System* (Munchen Wien: Verlag)

Synchronization in the Genesio-Tesi and Coullet systems with nonlinear feedback controlling*

Liu Yang-Zheng[1)2)] Fei Shu-Min[2)]

[1)] (Department of Basic Course, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 210013, China)

[2)] (Department of Automatic Control, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(Received 15 September 2004; revised manuscript received 28 February 2005)

Abstract

The characteristics of the Genesio-Tesi and Coullet systems are analyzed. Two systems are topologically inequivalent, but they have similarity in the strange attractor structure. Chaos synchronization between the two systems is realized via nonlinear feedback control. The nonlinear feedback controller is designed based on the stability theory, and the area of feedback gain is taken. The simulation result verifies the conclusion.

Keywords: nonlinear feedback control, Genesio-Tesi system, Coullet system, chaos synchronization

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69934010).