

# 不同非局域程度条件下空间光孤子的传输特性<sup>\*</sup>

曹觉能 郭旗<sup>†</sup>

(华南师范大学信息光电子科技学院, 广州 510631)

(2004 年 11 月 30 日收到, 2005 年 1 月 24 日收到修改稿)

光束在非局域非线性介质中传输由非局域非线性薛定谔方程描述. 讨论了在不同非局域程度条件下, 空间光孤子的传输特性. 提出了一个基于分步傅里叶算法数值求解孤子波形和分布的迭代算法. 假定介质的非线性响应函数为高斯型, 得出了在不同非局域程度条件下空间光孤子的数值解, 并数值证明了它们的稳定性. 结果表明, 不论非局域程度如何, 光束都能以光孤子态在介质中稳定传输. 光孤子的波形是从强非局域时的高斯型过渡到局域时的双曲正割型, 形成孤子的临界功率随非局域程度的减弱而减小, 光孤子相位随距离线性增大, 相位的变化率随非局域程度的减弱而减小.

关键词: 非局域非线性薛定谔方程, 空间光孤子, 临界功率, 相位

PACC: 4265S

## 1. 引 言

空间光束在非线性介质中传输时, 一方面会由于衍射效应而发散; 另一方面, 介质的非线性效应使得光束收缩. 当衍射效应和非线性效应达到平衡时, 光束就能形成空间光孤子在介质中传输. 在非局域非线性介质中, 空间光孤子的传输满足非局域非线性薛定谔方程<sup>[1-3]</sup>, 其非线性项是以非局域的形式(光束函数与介质响应函数的卷积)确定. 根据光束束宽与介质非线性响应函数相关长度的相对尺度, 可将非局域程度分为四类<sup>[3]</sup>: 局域(local)类、弱非局域(weakly nonlocal)类、一般性非局域(general nonlocal)类和强非局域(strongly nonlocal)类. 强非局域条件要求在介质里传输的光束束宽远远小于介质非线性响应函数的相关长度. 如今, 关于非局域非线性介质中空间光孤子的研究已经引起了人们的极大兴趣<sup>[1-12]</sup>. 文献[9]已对截至 2003 年底前的非局域空间孤子研究状况进行了总结和综述评论. Snyder 等<sup>[1]</sup>在强非局域条件下, 把描述非线性光束传输的非局域非线性薛定谔方程转化成线性模型, 得到了精确的高斯型空间孤子解, 并将此解命名为“线性”孤子(accessible solitons, 关于此名称翻译的说明可见

文献[12]). 郭旗等<sup>[10]</sup>进一步研究了强非局域空间光孤子, 在对介质非局域性要求更低的条件下, 得到了比 Snyder 模型更精确的强非局域模型, 求出了其精确解析解, 并发现强非局域非线性介质中空间光孤子具有很大的相位改变. Krolkowski 等<sup>[4]</sup>对弱非局域条件下的空间光孤子问题进行了研究, 证明在弱非局域条件下也存在稳定的空间光孤子. 在局域条件下, 非局域非线性薛定谔方程退化为非线性薛定谔方程<sup>[3]</sup>, 其解(局域空间光孤子——Kerr 孤子)是双曲正割型函数<sup>[13]</sup>.

然而, 到目前为止还未见有文献能系统地描述在不同非局域程度条件下空间光孤子的传输特性. 本文从 1+1 维介质出发, 假定其非线性响应函数为实对称的高斯函数, 用数值模拟方法讨论了在不同非局域程度条件下空间光孤子的传输特性. 结果表明, 不论非局域程度如何, 光束在非局域性介质中都可以形成稳定的光孤子. 光孤子的波形经历一个从强非局域时的高斯型到局域时的双曲正割型的转变过程. 形成光孤子的临界功率随着非局域程度的减弱而减小. 本文还研究了传输过程中孤子相位的变化规律. 结果表明, 在不同非局域程度中, 相位改变都是随传输距离线性增大的, 相位的变化率随非局域程度的减弱而减小.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10474023)和广东省自然科学基金(批准号: 031516, 04105804)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: guoq@senu.edu.cn

## 2. 非局域非线性薛定谔方程及其归一化

在傍轴近似条件下, 光束在  $1+1$  维非局域非线性介质中传输满足非局域非线性薛定谔方程<sup>[1-3]</sup>,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k\eta\psi \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(x-\xi) |\psi(\xi, z)|^2 d\xi = 0, \quad (1)$$

式中  $\psi$  为傍轴近似光束函数,  $k = \omega n_0 / c$  ( $n_0$  是材料的线性折射率),  $\eta$  是介质常数 ( $\eta > 0$  表示自聚焦介质,  $\eta < 0$  表示自散焦介质),  $x$  是横向空间坐标,  $z$  是光束的传输轴.  $R_1(x)$  是介质的对称实非线性响应函数, 满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_1(x') dx' = 1.$$

在本文中, 我们假设介质是自聚焦介质并且其响应函数为高斯型,

$$R_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right), \quad (2)$$

式中  $w$  为响应函数的相关长度. 通过以下的归一化 (无量纲化) 变换:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z}{L_R}, \\ X &= \frac{x}{w_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$A = kw_0 \eta^{1/2} \psi,$$

式中  $w_0$  为初始的光束束宽,  $L_R = kw_0^2$  为瑞利长度. 对非局域非线性薛定谔方程和响应函数进行归一化 (无量纲化), 分别得到

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + A \int_{-\infty}^{+\infty} R(X-\xi_1) |A(\xi_1, Z)|^2 d\xi_1 = 0 \quad (4)$$

和

$$R(X) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 X^2}{2}\right), \quad (5)$$

式中  $\alpha = w_0/w$  为初始光束束宽与介质非线性响应函数相关长度的比值.  $\alpha$  值的大小反映出光束束宽与响应函数相关长度之间相对尺度的大小, 我们将其定义为非局域程度. 当  $\alpha \ll 1$  时, 表示光束束宽远远小于介质响应函数的相关长度, 代表了强非局域的情况; 当  $\alpha \rightarrow \infty$  时 (此时  $R(X)$  为  $\delta$  函数), 方程 (4) 就演变为描述在局域条件下光束传输的非线性薛定谔方程<sup>[3,13]</sup>. 因此, 当  $\alpha$  从远远小于 1 变化到趋于

$\infty$  就描述了非局域程度从强非局域变化到局域的全过程.  $\alpha$  越小非局域程度越强,  $\alpha$  越大非局域程度就越弱. 对不同的  $\alpha$  值, 方程 (4) 描述了光束对于不同非局域程度条件下在具有高斯型非线性响应函数的非局域非线性介质中的传输情况.

## 3. 数值求解空间孤子的迭代算法

空间光孤子是非线性效应与衍射效应达到平衡时光束在非线性介质里的一种稳定传输状态. 线性的衍射效应使光束展宽, 非线性效应 (在自聚焦介质中) 使得光束压缩. 非线性效应对光束传输的影响是通过自相位调制<sup>[14]</sup>而体现的. 类比于光脉冲的自相位调制效应产生时间啁啾, 光束的自相位调制效应会产生所谓的空间啁啾<sup>[12]</sup>. 正是这种空间啁啾在自聚焦介质中引起光束压缩. 由于光包络函数的啁啾既与光包络的振幅有关, 也与其波形有关<sup>[14]</sup>, 如果光束函数的稳定状态 (即孤子态) 一定存在, 那么对于给定光束束宽 (衍射效应一定) 的接近孤子态的某一光束函数, 通过迭代的手段改变其振幅和波形分布, 就必然能找出其稳定传输的状态 (振幅和波形分布). 我们的迭代算法就是基于这样的物理思想而设计的.

图 1 是我们提出的迭代算法的流程图. 下面对算法的具体步骤加以描述.

可以合理推论的是,  $\alpha$  很小时的孤子解应接近于强非局域条件下的孤子解,  $\alpha$  很大时的孤子解应接近于局域条件下的孤子解. 而强非局域条件下 ( $\alpha \ll 1$ ) 的孤子解<sup>[10]</sup>和局域条件下 ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) 的孤子解<sup>[13]</sup>均是已知的. 因此在数值模拟的第一步, 可根据  $\alpha$  的取值大小选取适当的已知波形作为输入条件.

强非局域条件下空间光孤子的初始输入条件为<sup>[10]</sup>

$$\psi(x, z) \big|_{z=0} = \frac{1}{\pi^{1/4} w_0^{5/2} (\gamma\eta)^{1/2} k} \exp\left(-\frac{x^2}{2w_0^2}\right), \quad (6)$$

式中  $\gamma = -\partial_x^2 R_1(x) \big|_{x=0} = 1/(\sqrt{2\pi}w^3)$ , 按 (3) 式对 (6) 式归一化后可得

$$A(X, Z) \big|_{z=0} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\alpha^3}} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right). \quad (7)$$

另一方面, 局域条件下的归一化孤子初始输入条件为<sup>[14]</sup>

$$A(X, Z) \big|_{z=0} = \text{sech}(X). \quad (8)$$

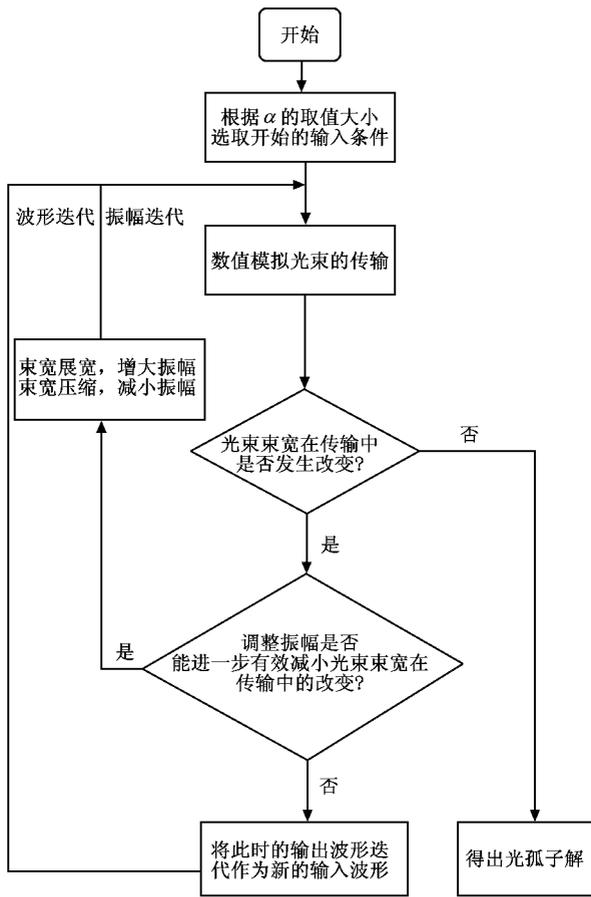


图 1 数值求解空间孤子的迭代算法流程图

当  $\alpha < 1$  但不满足强非局域条件时,首先以(7)式作为输入来模拟光束的传播过程.由于不满足强非局域条件,在这样的输入条件下光束不会以空间孤子态传输,因此演化过程中光束束宽必然会展宽或压缩.首先对振幅作出调整:若模拟结果表明束宽展宽,说明非线性效应弱于衍射效应,则应通过增大振幅来增强非线性效应;反之,若束宽压缩,说明非线性效应强于衍射效应,应通过减小振幅来减弱非线性效应.经过这样几次改变振幅但不改变波形的“振幅迭代”后,将发现光束束宽会以一个小的幅度波动,但始终不能消除.这是由于虽然振幅已经接近达到孤子状态时的大小,但波形仍然是高斯波形,而不是孤子传输所需要的波形.因此,现在需要对波形作出调整.由于光束在传输时会在衍射效应和非线性效应作用下不断自我调整(当振幅已接近孤子振幅时)传输后的光束波形会逐渐接近于孤子波形,因此当只调整振幅大小已不能进一步有效地减小光束束宽在传输中的振荡程度时,就要将此时的输出波形作为新的输入波形进行“波形迭代”.这样不断重

复进行振幅迭代(内循环)和波形迭代(外循环)的模拟运算,每一次波形迭代就能使光束波形向孤子波形逼近一步.当模拟的结果表明光束束宽在传输时没有变化时(我们以传输后束宽值与传输前束宽值相对误差的绝对值小于 0.008 为光束束宽恒定不变的标准)就说明光束已经形成孤子传输.

类似地,对  $\alpha \geq 1$  时的情况,开始模拟时以(8)式作为输入条件,通过图 1 的流程可得出孤子波形.

我们采用的是分步傅里叶算法<sup>[14]</sup>来模拟光束的传播过程.

### 4. 模拟结果与分析

光束形成孤子时的输入功率称为临界功率,临界功率是光孤子一个非常重要的特性参数.图 2 是归一化临界功率  $P_c$  随非局域程度  $\alpha$  的变化曲线.由图 2 可见,临界功率  $P_c$  是  $\alpha$  的单调减函数,随着  $\alpha$  的增大而减小,并且当  $\alpha$  趋于无穷时,  $P_c$  值趋于 2 (与局域条件下光孤子的临界功率值<sup>[14]</sup>相同).同时还可以发现,大约在  $\alpha < 0.3$  的范围内  $P_c$  随  $\alpha$  增大而迅速减小,表明在此范围内  $P_c$  对非局域程度变化很敏感,只要非局域程度改变一点  $P_c$  就发生很大的变化;其后,随  $\alpha$  的增大  $P_c$  减小的程度变缓,  $P_c$  对非局域程度变化的敏感程度也减小;当  $\alpha > 1$  时,  $P_c$  受  $\alpha$  改变的影响已经变得很小了,并在  $\alpha = 3$  时已经非常接近于 2 了.由图 2 我们可以得出结论:介质的非局域程度越弱,形成光孤子传输所需要的功率就越小,临界功率受非局域程度变化的影响随非局域程度的减弱而减小.

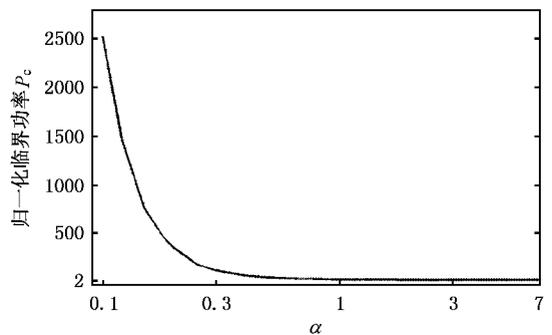


图 2 临界功率  $P_c$  与非局域程度  $\alpha$  的函数关系 横坐标为对数坐标

通过数值模拟,我们得出了在不同非局域程度条件下空间光孤子的波形.图 3 是经过迭代过程后

得出的不同非局域程度  $\alpha$  时的孤子波形. 为了更直观地比较不同非局域程度下的孤子波形, 我们把得出的孤子波形归一化变换到具有相同振幅和相同半高全宽 (FWHM) 下进行比较, 如图 4 所示. 在强非局域条件下光孤子具有高斯型的波形<sup>[10]</sup>, 在局域时光孤子具有双曲正割型的波形<sup>[13]</sup>; 由图 3 和图 4 可以看出, 在其他非局域程度条件下光孤子的波形是介于高斯型和双曲正割型之间, 并且随着非局域程度的增强, 光孤子的波形向高斯型演变, 而随着非局域程度的减弱, 光孤子的波形会向双曲正割型演变.

变化率是  $\alpha$  的单调减函数, 在  $\alpha < 0.3$  时斜率值比  $\alpha > 3$  时的大很多, 即在强非局域条件下, 孤子传输时的相位改变比在局域条件下的大得多. 由图 5 可以得出结论: 在不同非局域程度条件下, 孤子相位都随传输距离线性增大, 只是相位的变化率随介质非局域程度的减弱而减小.

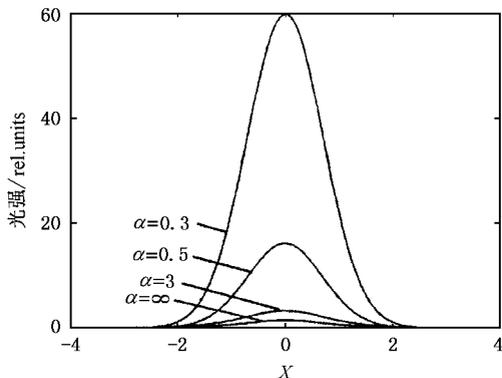


图 3 经过迭代过程后得出的不同非局域程度  $\alpha$  时的孤子波形

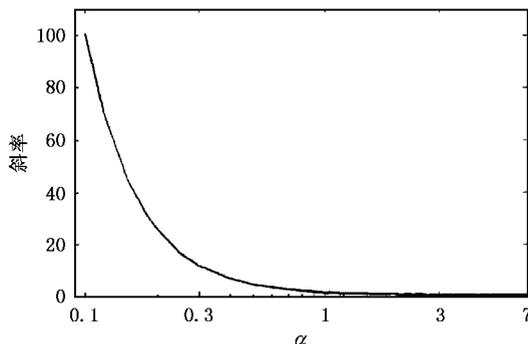


图 5 相位改变的直线斜率与非局域程度  $\alpha$  的函数关系 横坐标为对数坐标

空间光孤子是由于衍射效应与非线性效应达到平衡时光束在介质里的一种稳定传输状态. 不同非局域程度条件下的空间光孤子表现出不同的特性, 究其原因这是由于介质非线性效应的非局域性所造成的. 对空间非局域非线性介质, 它对光场的非线性响应不仅与该点的光场有关而且与空间中其他点的光场有关, 介质的空间非局域性归根结底是由于介质内对光场响应的单元(电子、分子或激子等)之间的空间相关性产生的. 光束在介质中传输时总是先对光场附近的响应单元产生作用, 引起介质的非线性极化. 由于响应单元之间存在空间相关性, 光场附近的响应单元就会把光场对它的作用“传递”出去影响别处的响应单元, 同时伴随着有能量的传递. 这样, 别处的响应单元尽管没有与光场有直接相互作用, 但还是受到光场的影响, 获得光场的能量而改变自身的状态并对光场产生响应, 产生非线性极化. 响应单元的空间相关性越强介质非局域性就越强, 光场所影响的距离也越远. 由于介质内部响应单元对光场的非局域非线性响应之间存在能量的传递, 介质非局域性越强能量传递的距离越远, 需要的能量就越大. 因此, 在强非局域条件下, 光场需要很大的能量才能实现既有能量的传递影响空间其他地方又能使自身的非线性效应与衍射效应相平衡, 从而形成孤子, 而随着介质非局域程度的减弱, 光场影响介质其他地方的范围也减小, 光束形成孤子传输所需要

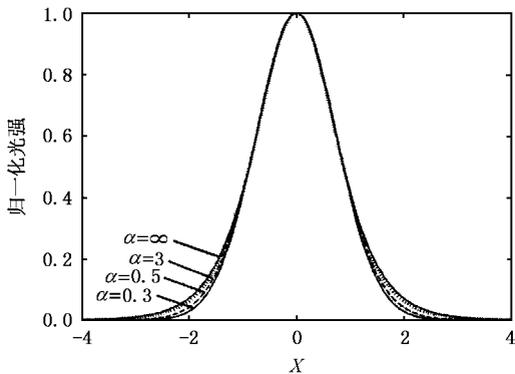


图 4 归一化变换到具有相同振幅和相同 FWHM 下, 非局域程度  $\alpha$  取不同值时孤子波形的比较

光束的相位(复函数  $A$  的幅角)是光束传输的特性参数之一. 本文还研究了不同非局域程度下孤子相位的演化特性. 在强非局域条件下光孤子相位是随传输距离线性增大<sup>[10]</sup>, 我们发现在其他任意非局域程度条件下孤子相位的演化也存在同样的规律, 因此可用直线的斜率来表征孤子传输时相位改变速率的快慢. 图 5 给出了相位随距离  $z$  的变化率与非局域程度  $\alpha$  的函数关系. 从图 5 可以看出, 相位

的能量也就随着减少,在局域条件下,介质响应单元的空间相关性为零,介质对光场的非线性响应只限于该点的光场而与别处的光场无关,所以局域时的光束形成孤子需要的能量最少.因此,光束形成孤子所需的能量是随着介质非局域程度的减弱而减少的.另一方面,介质的非局域性越强,对介质某处的非线性极化有贡献的光场范围就越大,因此,在强非局域条件下孤子在传输时相位会有很大的改变,而随着非局域程度的减弱,孤子传输时的相位改变程度就会减小.

## 5. 孤子解稳定性的数值证明

稳定性的讨论是非线性问题的重要内容,在强非局域情况<sup>[10]</sup>和局域情况<sup>[13]</sup>下,空间孤子解的稳定性已经被严格证明.我们通过数值的方法来证明任意非局域性条件下,空间光孤子解的稳定性.

假设在初始时对孤子引入随机微扰后输入条件

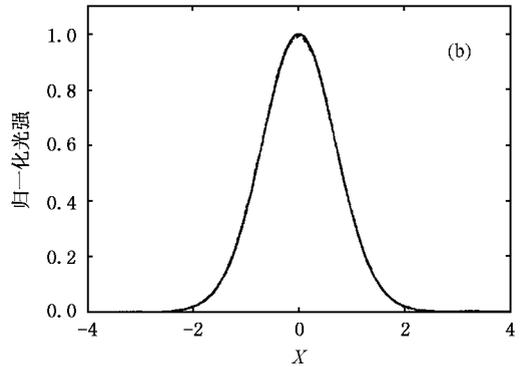
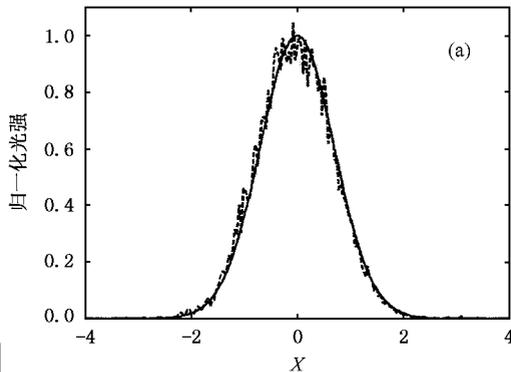


图6  $\alpha = 0.5$  时,孤子在初始引入不同幅度随机微扰后的输出波形与孤子波形的比较 (a)  $C = 0.1$  (b)  $C = 0.01$ . 传输距离  $Z = 10$ , 虚线代表输出波形, 实线代表孤子波形

## 6. 结 论

假定介质的非线性响应函数为对称的高斯函数,通过数值模拟讨论了在不同非局域程度条件下光束形成空间光孤子传输时的波形分布及其传输特性.提出了一个基于分步傅里叶算法数值求解孤子波形的迭代算法.结果表明,不论非局域程度如何光束都能形成稳定的光孤子,但表现出不同的特性.首先,孤子的波形不同.在强非局域时,孤子的波形是高斯型;在局域时其波形是双曲正割型.而其他非局

变为

$$A(X, Z) \big|_{z=0} = A_0(F(X) + CG(X)), \quad (9)$$

式中,  $A_0$  是孤子振幅,  $F(X)$  代表孤子波形(最大值等于1),  $G(X)$  是振幅最大值小于1的随机复函数,正常数  $C \ll 1$ ,  $CG$  代表随机微扰.数值模拟孤子在引入不同强度随机微扰( $C$ 取不同值)后的传输过程.若模拟结果显示,在  $C$  值不断减小过程中传输后的输出波形能不断向孤子波形演化,并在  $C \rightarrow 0$  时趋于孤子波形,那就证明了孤子解是稳定的.图6给出  $\alpha = 0.5$  时,孤子在引入不同强度随机微扰后的输出波形与孤子波形的比较.图6(a)(b)分别表示  $C = 0.1$  和  $C = 0.01$  的情况.从图6可清楚看出,当  $C = 0.1$  时输出波形与孤子波形相差很大,而当  $C = 0.01$  时输出波形与孤子波形的差别已经很小了.因此证明了  $\alpha = 0.5$  时,孤子解是稳定的.当  $\alpha$  取其他值时孤子解稳定性的证明过程与此相同.通过数值模拟,我们证明了在不同非局域程度条件下的空间孤子解都是稳定的.

域程度下孤子的波形介于两者之间.光孤子的波形是从强非局域时的高斯型过渡到局域时的双曲正割型.其次,形成孤子所需的临界功率不同,临界功率是与非局域程度的强弱成正比,非局域程度越强,临界功率就越大.最后,虽然不论非局域程度如何,孤子相位的改变都是随距离线性增大,但相位变化率却是随非局域程度的减弱而减小,在强非局域时最大,局域时最小.

本文的讨论虽然局限于具有高斯型非线性响应函数的介质,但对于其他类型响应函数的非线性介质中孤子的传输问题应该具有参考价值.

- [ 1 ] Snyder A W , Mitcher D J 1997 *Science* **276** 1538
- [ 2 ] Mitcher D J , Snyder A W 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 236
- [ 3 ] Krolikowski W , Bang O , Rasmussen J J *et al* 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
- [ 4 ] Krolikowski W , Bang O 2001 *Phys. Rev. E* **63** 016610
- [ 5 ] Snyder A W , Kivshar Y 1997 *J. Opt. Soc. Am. B* **11** 3025 ; Snyder A W 2000 *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **6** 1408
- [ 6 ] Shen Y R 1997 *Science* **276** 1520
- [ 7 ] Abe S , Ogura A 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6066
- [ 8 ] Granot E , Sternklar S , Isbi Y *et al* 1999 *Opt. Commun.* **166** 121
- [ 9 ] Guo Q 2004 *Optical Transmission , Switching , and Subsystems* ( Washington : SPIE ) p581
- [ 10 ] Guo Q , Luo B , Yi F H *et al* 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [ 11 ] Xie Y Q , Guo Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3020 ( in Chinese ) [ 谢逸群、郭旗 2004 物理学报 **53** 3020 ]
- [ 12 ] Guo Q , Xu C B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3025 ( in Chinese ) [ 郭旗、许超彬 2004 物理学报 **53** 3025 ]
- [ 13 ] Stegeman G I , Segev M 1999 *Science* **286** 1518
- [ 14 ] Agrawal G P 2002 *Nonlinear Fiber Optics and Application of Nonlinear Fiber Optics* ( Beijing : Electronic Industry Press ) pp34 , 35 , 64—69 , 94—97 ( in Chinese ) [ Agrawal G P 2002 非线性光纤光学原理及应用(中译本)(北京:电子工业出版社)第 34 , 35 , 64—69 , 94—97 页 ]

## Properties of spatial optical solitons to different degrees of nonlocality<sup>\*</sup>

Cao Jue-Neng Guo Qi<sup>†</sup>

( School for Information and Optoelectronic Science and Engineering , South China Normal University , Guangzhou 510631 , China )

( Received 30 November 2004 ; revised manuscript received 24 January 2005 )

### Abstract

The propagation of optical beams in nonlocal nonlinear media is modeled by the nonlocal nonlinear Schrödinger equation. In this paper ,discussed is the propagation properties of the optical spatial solitons in the media to different degrees of the nonlocality. An iteration algorithm based on the split-step Fourier method is presented to obtain the solutions of the solitons. The profiles of the solitons to different degrees of the nonlocality are numerically obtained in the assumption that nonlinear response of the media is Gaussian. The stability of the solutions is also demonstrated numerically ,which shows that the stable solitons can survive to different degrees of nonlocality. The amplitude profiles of the soliton transit gradually and continuously from a Gaussian function in the strongly nonlocal case into a hyperbolic secant function in the local case. The critical power for the solitons decreases as the nonlocality decreases. The weaker the nonlocality ,the slower the soliton phase that has a linear relation with the propagation distance increases.

**Keywords** : nonlocal nonlinear Schrödinger equation , spatial optical soliton , critical power , phase

**PACC** : 4265S

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10474023 ) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China ( Grant Nos. 031516 , 04105804 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : guoq@scnu.edu.cn