第 54 卷 第 9 期 2005 年 9 月
1000-3290/2005/54(09)/3983-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.9,September,2005

Vacco 动力学方程的 Mei 对称性、Lie 对称性和 Noether 对称性*

顾书龙[1)†]　张宏彬[2)]

1)(巢湖学院物理系,巢湖　238000)

2)(上海大学上海市应用数学和力学研究所,上海　200072)

(2004 年 12 月 20 日收到;2005 年 1 月 25 日收到修改稿)

研究 Vacco 动力学方程的形式不变性即 Mei 对称性,给出其定义和确定方程,研究 Vacco 动力学方程的 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系,寻求系统的守恒量,给出一个例子说明结果的应用.

关键词:Vacco 动力学方程,Mei 对称性,Noether 对称性,Lie 对称性,守恒量

PACC:0320

1. 引　言

动力学系统的对称性与守恒量是近代分析力学的一个重要课题,寻求力学系统守恒量的主要方法有 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 的形式不变性. Noether 对称性是指动力学系统的 Hamilton 作用量在无限小变换下保持不变的性质[1],但 Noether 对称性不仅限于 Hamilton 系统,Noether 对称性一定有它的守恒量,这是它的优点. Lie 对称性是运动微分方程在无限小变换下的一种不变性或者说,将微分方程解曲线集合映射为自身的一种对称映射[2]. Lie 对称性不一定总导致守恒量,而要满足 Noether 等式或 Killing 方程才导致守恒量. Mei 的形式不变性是一种新的对称性,是指力学系统的动力学函数在无限小变换下保持运动微分方程形式不变的一种不变性[3]. 从力学角度看,这种不变性最容易理解.

Mei 的形式不变性是梅凤翔于 2000 年提出来的. 鉴于 Mei 的形式不变性与 Lie 对称性在寻求系统的守恒量方面具有同等的地位,为了使三种对称性的称谓相统一,文献[4]把 Mei 的形式不变性称为 Mei 对称性,把形式不变性的判据称为 Mei 对称性的确定方程.

Mei 对称性的提出受到学术界的关注,被迅速拓展到 Appell 系统[5—7],Nielsen 系统[8,9],Chaplygin 系统[10],Birkhoff 系统[11—15],Hamilton 系统[4,16]等,形成了利用对称性寻求系统守恒量的一种新的通用性方法. 但是关于 Vacco 系统的 Mei 对称性研究尚未见报道. 本文研究了 Vacco 动力学系统的 Mei 对称性与守恒量,首先给出 Vacco 系统的 Mei 对称性的定义与确定方程,然后分别研究 Vacco 系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性以及与 Lie 对称性的关系,寻求系统的守恒量,最后给出一个例子说明本文结果的应用.

2. Vacco 系统的 Mei 对称性及其确定方程

研究 N 个质点构成的力学系统,其位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 确定. 设系统的运动受 g 个独立的 Vacco 型非完整约束

$$\varphi_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)=0\ (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

则系统的运动满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s-\lambda_\beta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_s}\right)\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$
$$(s=1,2,\cdots,n),\tag{2}$$

---

* 安徽省教育厅科研基金(批准号:2004kj294)资助的课题.

† E-mail:gsl2142@sohu.com

式中 $L(t,q_s,\dot{q}_s)=T(t,q_s,\dot{q}_s)-V(q_s)$ 为系统的 Lagrange 函数，T 为动能，V 为势能，Q''_s 为非势广义力，λ_β 为待定乘子. 在运动方程积分之前，可先求出约束乘子 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(t)$. 若引入广义拉氏函数

$$\mathscr{L}=L+\lambda_\beta\varphi_\beta, \tag{3}$$

方程(2)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_s}=Q''_s\quad(s=1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

方程(4)为非完整系统(1)，(2)相应的完整系统的运动方程. (1)，(2)式的解可在(4)式中找到，只需加上非完整约束(1). 引入 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\quad(s=1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

方程(4)可写成

$$E_s(\mathscr{L})=Q''_S\quad(s=1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

引入时间，广义坐标和广义动量的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s\quad(s=1,2,\cdots,n), \tag{7}$$

其展开式为

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,q_s),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,q_s)$$
$$(s=1,2,\cdots,n), \tag{8}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_0，ξ_s 为无限小变换的生成元.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{9}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}. \tag{10}$$

定义 如果约束方程(1)和方程(6)在无限小变换(8)式下形式保持不变，即

$$\varphi_\beta^*=\varphi_\beta(t^*,q_s^*,\dot{q}_s^*)=0$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n), \tag{11}$$
$$E_s(\mathscr{L}^*)=Q''^*_s\quad(s=1,2,\cdots,n) \tag{12}$$

成立，则称这种不变性为 Vacco 约束系统的 Mei 对称性.

定理 1 对于给定的 Vacco 系统(4)，如果无限小变换(8)式的生成元 ξ_0，ξ_s 满足

$$X^{(1)}[\varphi_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)]=0$$
$$(\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n), \tag{13}$$
$$E_s[X^{(1)}(\mathscr{L})]-X^{(1)}(Q''_s)=0$$
$$(s=1,2,\cdots,n), \tag{14}$$

则系统(4)是 Mei 对称的.

证 展开 $\mathscr{L}^*$，Q''^*_s 和 φ_β^*，有

$$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}(t,q_s,\dot{q}_s^*)+\varepsilon[X^{(1)}(\mathscr{L})]+O(\varepsilon^2), \tag{15}$$
$$Q''^*_s=Q''_s(t,q_s,\dot{q}_s)+\varepsilon[X^{(1)}(Q''_s)]+O(\varepsilon^2), \tag{16}$$
$$\varphi_\beta^*=\varphi_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)+\varepsilon[X^{(1)}(\varphi_\beta)]+O(\varepsilon^2). \tag{17}$$

将(17)式代入(11)式，并考虑到方程(1)，将(15)，(16)式代入方程(12)，并利用(6)式，且忽略 ε^2 及以上高阶小量项，便得(14)式.

把方程(14)称为 Vacco 系统的 Mei 对称性确定方程.

3. Vacco 系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性

Vacco 系统(4)的 Mei 对称性不一定总导致守恒量. 下面的定理给出系统的 Mei 对称性导致 Noether 守恒量的条件.

定理 2 对于给定的 Vacco 系统(4)，如果无限小变换(8)式的生成元 ξ_0，ξ_s 满足 Mei 对称性确定方程(14)，且存在规范函数 $G(t,q_s,\dot{q}_s)$ 使下列 Noether 等式

$$\xi_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_s}$$
$$+\mathscr{L}\dot{\xi}_0+Q''_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\dot{G} \tag{18}$$

成立，或者使下列广义 Killing 方程

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\xi_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_s}+Q''_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)$$
$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k-\dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial t}-\dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)$$
$$=-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q_k}\dot{q}_k,$$
$$\mathscr{L}\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k}-\dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}\right)$$
$$=-\frac{\partial G}{\partial\dot{q}_k}\quad(k=1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

成立，则系统的 Mei 对称性将导致如下守恒量：

$$I=\mathscr{L}\xi_0+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G=\mathrm{const}. \tag{20}$$

下面给出定理 2 的逆定理.

定理 3 对于给定的 Vacco 系统(4)，如果有满

足 Noether 等式(18)或 Killing 等式(19)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,使 Mei 对称性确定方程(14)成立,那么系统(4)存在的守恒量(20)式是相应于 Mei 对称性的守恒量.

比较(14)式和(18)式,(19)式可以看出,Vacco 系统的对称性与 Noether 对称性一般是不同的.

4. Vacco 系统的 Mei 对称性与 Lie 对称性

下面的定理给出 Vacco 系统的 Mei 对称性与 Lie 对称性之间的关系,并给出相应的逆定理.

假如系统非奇异,即设

$$\det(h_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0, \tag{21}$$

则展开方程(4)后,可求出所有的广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, q_s, \dot{q}_s) \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{22}$$

定理 4 对于给定的 Vacco 系统(4),如果无限小变换(8)式的生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Mei 对称性确定方程(14),而且使下例 Lie 对称性确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \tag{23}$$

成立,那么系统(4)的 Mei 对称性导致 Lie 对称性.

定理 5 对于给定的 Vacco 系统(4),如果无限小变换(8)式的生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(23),而且使 Mei 对称性确定方程(14)成立,那么系统(4)的 Lie 对称性导致 Mei 对称性.

定理 6 对于给定的 Vacco 系统(4),如果有满足 Mei 对称性确定方程(14)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,使 Lie 对称性确定方程(23)成立,且存在规范函数 $G(t,q_s,\dot{q}_s)$,满足结构方程

$$\mathscr{L}\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(\mathscr{L}) + Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dot{G}. \tag{24}$$

那么系统(4)的 Mei 对称性将导致如下守恒量:

$$I = \mathscr{L}\xi_0 + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const}. \tag{25}$$

证

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \dot{\mathscr{L}}\xi_0 + \mathscr{L}\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ &\quad + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - \mathscr{L}\dot{\xi}_0 - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\xi_0 \\ &\quad - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_s}\xi_s - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ &= (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_s} - Q''_s\right) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

定理 7 对于给定的 Vacco 系统(4),如果有满足 Lie 对称性确定方程(23)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,使 Mei 对称性确定方程(14)成立,且存在规范函数 $G(t,q_s,\dot{q}_s)$,使结构方程(24)成立,那么系统(4)存在的守恒量(25)式是相应于 Mei 对称性的守恒量.

由定理 4、定理 5 可知,Vacco 系统的 Mei 对称性与 Lie 对称性一般是不同的.

由于结构方程(24)等价于 Noether 等式(18),它们都归结为广义 Killing 方程(19). 比较定理 2 和定理 6 可知,Mei 对称性和 Lie 对称性都是在满足 Noether 等式的条件下导致 Noether 守恒量. 在利用对称性寻求系统守恒量的理论研究与应用过程中,Mei 对称性是继 Lie 对称性之后的又一种寻找守恒量的方法.

5. 算 例

设单位质量质点的 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2), \tag{27}$$

质点受速率为常量的 Vacco 约束

$$\varphi = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) = \text{const}. \tag{28}$$

试研究系统的 Mei 对称性和守恒量.

在运动方程积分之前,求出约束乘子

$$\lambda = \lambda_0(\text{const}), \tag{29}$$

则广义拉氏函数为

$$\mathscr{L} = \frac{1+\lambda_0}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \lambda_0 c, \tag{30}$$

非势广义力

$$Q''_1 = 0,\ Q''_2 = 0,\ Q''_3 = 0. \tag{31}$$

将(28)式对时间 t 求导可得

$$\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 + \dot{q}_3\ddot{q}_3 = 0. \tag{32}$$

Mei 对称性的确定方程(14)给出

$$\begin{aligned}&(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\dot{q}_2 \\ &+ (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0)\dot{q}_3 = 0,\end{aligned} \tag{33}$$

结合(32)式,可取

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = \dot{q}_1,\ \xi_2 = \dot{q}_2,\ \xi_3 = \dot{q}_3. \tag{34}$$

则(33)式满足,且对应系统的 Mei 对称性. 把生成元(34)式代入 Noether 等式(18),可找到规范函数

$$G = 0 \tag{35}$$

使等式(18)成立. 因此,由(20)式得到系统存在相应的守恒量

$$I = (1+\lambda_0)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) = \text{const.} \quad (36)$$

由于存在规范函数(35)式使得生成元(34)式满足 Noether 等式(18),相应的 Mei 对称性导致 Noether 对称性.因此系统存在形如(36)式的守恒量.

生成元(34)式满足 Lie 对称性确定方程(23),相应的 Mei 对称性导致 Lie 对称性.而且由结构方程(24)可得到规范函数(35)式,因此,由(25)式可得系统存在的守恒量(36)式.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 105

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[4] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[5] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[6] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[7] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[8] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[9] Fang J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会 2002 物理学报 **51** 2183]

[10] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[11] Mei F X 2001 *J. Beijing Inst. Technolo.* **10** 138

[12] Chen X W, Luo S K and Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 53

[13] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[14] Gu S L and Zhang H B 2004 *China. Phys.* **13** 979

[15] Gu S L and Zhang H B 2004 *J. Chin. Elec. Scien. Technol*, **2** 73

[16] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

Mei symmetry, Noether symmetry and Lie symmetry of a Vacco system*

Gu Shu-Long[1)] Zhang Hong-Bin[2)]

[1)] (*Department of Physics, Chaohu College, Chaohu 238000, China*)

[2)] (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China*)

(Received 20 December 2004; revised manuscript received 25 January 2005)

Abstract

The Mei symmetry, i.e. the form invariance, of a Vacco system is studied. The Definition and the determining equation of Mei symmetry in the Vacco system are given. The relations among the Mei symmetry, the Lie symmetry and the Noether symmetry are studied, and the conserved quantities of the Vacco system are obtained. An example is finally given to illustrate the application of the result of this paper.

Keywords: Vacco system, Mei symmetry, Noether sysmmetry, Lie symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant No. 2004KJ294).