

统一混沌系统的耦合同步^{*}

闵富红^{1)†} 王执铨¹⁾

¹⁾ (南京理工大学自动化系, 南京 210094)

²⁾ (南京师范大学电气与自动化工程学院, 南京 210042)

(2004 年 12 月 3 日收到, 2004 年 12 月 20 日收到修改稿)

对线性耦合的两个统一混沌系统同步进行研究. 基于线性时变连续系统的稳定性理论, 得到初始值不同的两个统一混沌系统全局渐进同步的一种新的充分条件. 另外, 与已经提出的判定统一混沌系统同步的方法进行比较, 发现这里得到的充分条件的约束关系少、缺少保守性, 而且满足的耦合系数范围更广. 将该方法应用于统一混沌系统, 数值仿真表明了该方法的有效性与其可行性.

关键词: 统一混沌系统, 耦合同步, 线性时变连续系统

PACC: 0545

1. 引 言

由于混沌在通讯、信息科学、医学、生物、工程等领域中的巨大潜力和发展前途, 因而已经引起了国内外科研工作者的广泛关注. 自从 Pecoro 和 Carroll 于 1990 年提出混沌同步的方法之后^[1], 国内外提出了许多不同的混沌同步方法^[1-13], 主要有完全同步, 相位同步, 滞后同步, 广义同步, 投影同步等.

最近, 由于混沌在保密通信等领域的潜在应用, 两个相同混沌系统的耦合同步^[9-13]引起了相当的关注. Agiza^[9]采用活动控制器实现两个 Rossler 混沌系统和两个 Chen 混沌系统分别同步. Li^[10]采用活动控制器实现 Chua 电路非线性耦合同步. 文献 [11-13] 中, 都是利用线性耦合的方法, 实现了统一混沌系统的同步和 Lorenz 混沌系统同步. 但是, 对于耦合系数选择的依据却不同. Li^[11]根据 Routh-Hurwitz 判据以及严格的数学理论推导, 得到了两个线性耦合混沌系统同步的充分条件. Li^[12]是根据有关数学理论证明了一个对称矩阵是负定的, 则其有负的特征值, 误差系统就渐进稳定, 从而推导出了混沌系统耦合同步的充分条件. Park^[13]是基于李亚谱诺夫稳定性理论和线性矩阵不等式, 再利用 Matlab 控制系统工具箱计算出线性矩阵不等式的最优解, 得到了统一混

沌系统渐进同步的稳定判据.

本文考虑对两个线性耦合的统一混沌系统进行分析, 但是, 基于线性时变连续系统的稳定性理论^[15, 16], 而且不经过太多烦琐的数学理论来推导, 就能够得到要使得两个初始值截然不同的混沌系统实现同步所遵循的充分条件. 与文献 [11-13] 中的充分条件进行比较, 发现这里得到的判据表达式没有太多的约束条件, 使用特别简单, 而且耦合系数的选择范围更宽广. 将这种方法应用于统一混沌系统中, 并且不断地改变参数 α 的值, 都取得了令人满意的结果, 从而证实了该方法的有效性与其可行性.

2. 统一混沌系统的线性耦合同步

2.1. 统一混沌系统的线性耦合^[12-14]

统一混沌系统的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\alpha \in [0, 1]$. 这代表一族混沌系统, 当 $\alpha \in [0, 0.8)$ 时, 该系统属于广义 Lorenz 系统; 当 $\alpha = 0.8$ 时, 该系统属于广义 Liu 系统; 当 $\alpha \in (0.8, 1]$ 时, 该系统属于广义 Chen 系统. 该系统具备一系列良好的性

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60174005)和江苏省自然科学基金(批准号: BK2001054)资助的课题

[†] E-mail: minfuhong@nju.edu.cn

质,为研究混沌控制与同步提供了一个新的模型和新的思路.

考虑线性耦合的两个相同的统一混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10) x_2 - x_1 + d_1(\dot{y}_1 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2 + d_2(y_2 - x_2), \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8 + \alpha}{3}x_3 + d_3(y_3 - x_3), \\ \dot{y}_1 = (25\alpha + 10) y_2 - y_1 + d_1(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 = (28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3 + (29\alpha - 1)y_2 + d_2(x_2 - y_2), \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - \frac{8 + \alpha}{3}y_3 + d_3(x_3 - y_3), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_i, y_i (i = 1, 2, 3)$ 为系统的状态变量, $d_i (i = 1, 2, 3)$ 为确保两个混沌系统同步所需要的耦合系数. 这里不要如文献 [11—13] 中作 $d_i > 0$ 的限定.

$$\begin{cases} e_1(t) = x_1(t) - y_1(t), \\ e_2(t) = x_2(t) - y_2(t), \\ e_3(t) = x_3(t) - y_3(t), \end{cases} \quad (3)$$

定义如下所示的误差信号

误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(25\alpha + 10 + 2d_1)e_1 + (25\alpha + 10)e_2, \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha - x_3)e_1 + (29\alpha - 1 - 2d_2)e_2 - y_1e_3, \\ \dot{e}_3 = x_2e_1 + y_1e_2 - \left(\frac{8 + \alpha}{3} + 2d_3\right)e_3, \end{cases} \quad (4)$$

其系数矩阵为

$$A(t) = \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10 + 2d_1) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha - x_3 & 29\alpha - 1 - 2d_2 & -y_1 \\ x_2 & y_1 & -\left(\frac{8 + \alpha}{3} + 2d_3\right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

显然,只需要让耦合系数满足一定的条件,使其误差系统(4)在时间趋于无穷大时渐进稳定,就能够实现初始条件不同的两个结构相同的统一混沌系统耦合后同步.

假设其系数 $a_{ij}(t)$ 都连续有界,且设 $a_{ii}(t) \leq -\alpha < 0 (i = 1, 2, 3), \forall t \geq t_0$, 将系数矩阵 $A(t)$ 进行 2×2 分块.

由于误差系统是线性的,而且其系数矩阵是时变的,所以考虑使用线性时变连续系统的稳定性理论,来确定要使误差系统(4)渐进稳定时,耦合系数必须满足的条件.

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

下面介绍线性时变连续系统稳定性理论.

令

2.2. 线性时变连续系统的稳定性理论^[15, 16]

考虑具有如下形式的三阶线性时变系统:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{ |a_{11}(t)| + |a_{21}(t)|, |a_{22}(t)| \\ &\quad + |a_{12}(t)| \}, \\ b_{12} &= \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{ |a_{13}(t)|, |a_{23}(t)| \}, \\ b_{21} &= \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{ |a_{31}(t)|, |a_{32}(t)| \}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3, \\ \dot{x}_3 = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3, \end{cases} \quad (6)$$

$$b_{22} = \sup_{t_0 \leq t < +\infty} \{a_{33}(t)\},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

考虑辅助方程

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^* &= b_{11} V_1^* + b_{12} V_2^*, \\ \dot{V}_2^* &= b_{21} V_1^* + b_{22} V_2^*. \end{aligned} \quad (9)$$

定理 如果变系数线性系统(6)连续有界, $a_{ii}(t) < \alpha (i=1, 2, 3)$ 而且其辅助方程(9)的系数满足:

- 1) $b_{11} \leq -\beta < 0, b_{22} \leq -\beta < 0, \beta$ 是正常数;
- 2) 所有的特征根都有负实部.

则系统(6)之零解是渐进稳定的.

2.3. 实例分析与数值仿真

运用线性时变系统的稳定性理论, 分析两个混沌系统的误差系统(4)稳定性, 得到耦合系数的选择范围, 从而给出两个相同的统一混沌系统全局渐进同步的充分条件. 然后, 进行数值仿真, 以说明理论分析的正确性.

首先, 将误差系统对应的对称矩阵 $K(t)$ 与时变矩阵 $A(t)$ 对应起来, 则得到下面的表达式:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sup_{0 \leq t < +\infty} \{-(25\alpha + 10 + 2d_1) \\ &\quad + |28 - 35\alpha - x_3|, \\ &\quad 29\alpha - 1 - 2d_2 + |25\alpha + 10|\}, \\ b_{12} &= \sup_{0 \leq t < +\infty} \{0, |y_1|\}, \\ b_{21} &= \sup_{0 \leq t < +\infty} \{|x_2|, |y_1|\}, \\ b_{22} &= \sup_{0 \leq t < +\infty} \left\{ -\left(\frac{8+\alpha}{3} + 2d_3\right) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

根据以上线性时变系统的稳定性理论, 误差系统(4)全局渐进稳定, 只要满足不等式 $b_{11} < 0, b_{22} < 0, b_{11}b_{22} > b_{21}b_{12}, b_{12}, b_{21}$ 是非负的数, 显然 b_{12}, b_{21} 是满足的, 即所要满足的充分条件为

$$\begin{aligned} &-(25\alpha + 10 + 2d_1) + |28 - 35\alpha - x_3| < 0, \\ &29\alpha - 1 - 2d_2 + |25\alpha + 10| < 0, \\ &-\frac{8+\alpha}{3} - 2d_3 < 0, \\ &\{-(25\alpha + 10 + 2d_1) + |28 - 35\alpha - x_3|\} \\ &\cdot \left\{ -\frac{8+\alpha}{3} - 2d_3 \right\} > m^2, \\ &\{29\alpha - 1 - 2d_2 + |25\alpha + 10|\} \\ &\cdot \left\{ -\frac{8+\alpha}{3} - 2d_3 \right\} > m^2, \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $m = \max\{|x_2|, |y_1|\}$.

由于混沌系统是有界的, 则可以很容易选择合适的耦合系数满足以上的不等式, 实现初始值不同, 结构相同的两个统一混沌系统的全局完全同步.

其次, 分别对 $\alpha = 0, \alpha = 0.8, \alpha = 1$, 则统一混沌分别代表 Lorenz 系统, Lü 系统, Chen 系统进行分析与仿真.

采用四阶龙格库塔法进行仿真, 设初值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 1, 1, 2, 3, 4)$. 仿真结果如图 1—3 所示. 图 1(a, b), 表示 $\alpha = 0$, 参数 $d_1 = 10, d_2 = 7, d_3 = 10$ 时, Lorenz 混沌系统耦合同步的误差系统以及耦合同步的混沌系统. 图 2(a, b), 表示 $\alpha = 0.8$, 耦合系数 $d_1 = 10, d_2 = 21, d_3 = 10$ 时, 广义 Lü 混沌系统耦合同步的误差系统以及驱动-响应系统耦合同步吸引子. 图 3(a, b) 表示 $\alpha = 1$, 参数 $d_1 = 11, d_2 = 32, d_3 = 10$ 时, Chen 混沌系

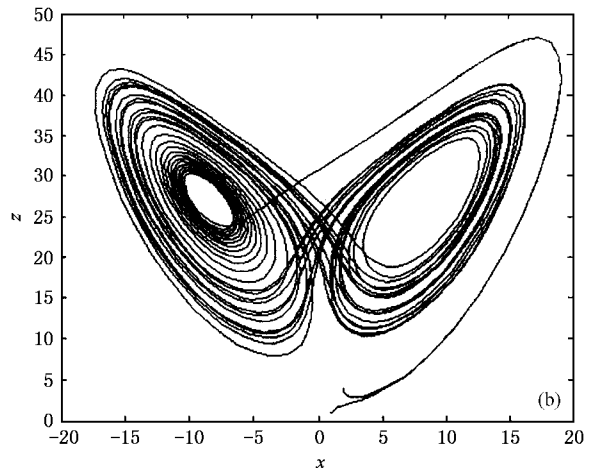
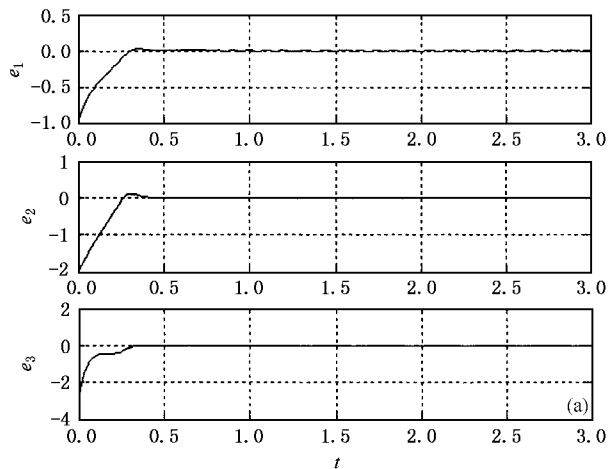


图 1 (a) Lorenz 系统耦合同步的误差 (b) 驱动-响应 Lorenz 混沌系统同步

统耦合同步的误差系统以及耦合同步的混沌吸引子. 显然, 通过选择合适的耦合系数, 驱动系统与响应系统在每个方向的偏差, 随着时间的变化, 快速地收敛到零, 初始值不同的两个混沌系统快速地实现了同步.

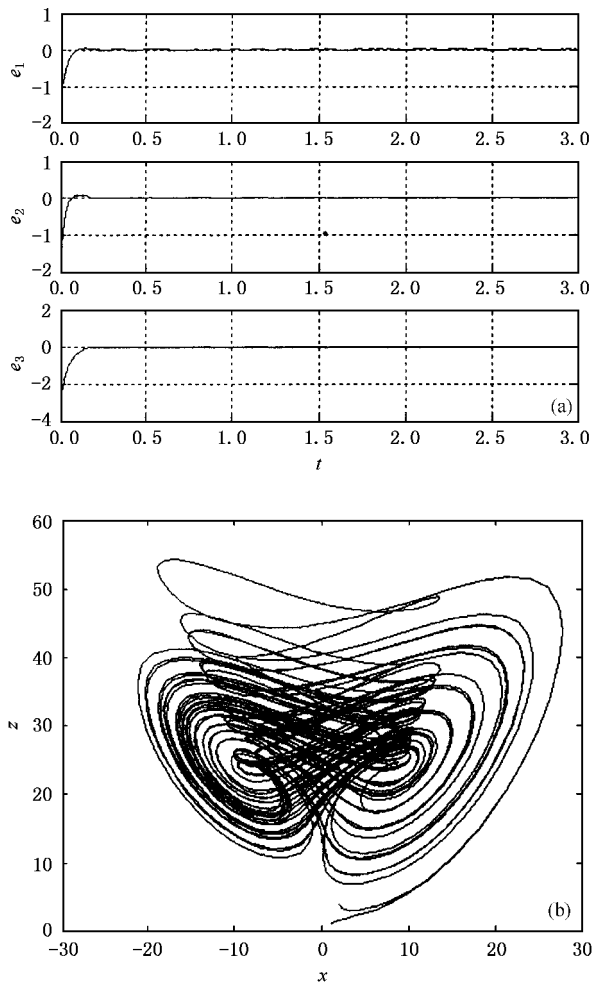


图 2 (a) Li 氏系统耦合同步的误差 (b) 驱动-响应 Li 混沌吸引子同步

以上仅仅给出线性耦合的两个统一混沌系统同步的充分条件, 就意味着有些不满足该条件的耦合系数, 也能使统一混沌系统全局渐进同步.

最后, 将推出的线性耦合的两个统一混沌同步的充分条件与文献 [11—13] 中的进行比较. 第一, 使用的理论与方法都不一样. 由于考虑到两个耦合同步混沌系统的误差系统是线性时变连续系统, 因而这里利用了线性时变连续系统的稳定性理论来分析其稳定性, 推出了两个相同的统一混沌系统线性耦合的充分条件, 也许使用该方法比其他方法更合理, 所以说是得到了一种新的混沌同步的充分条件. 第

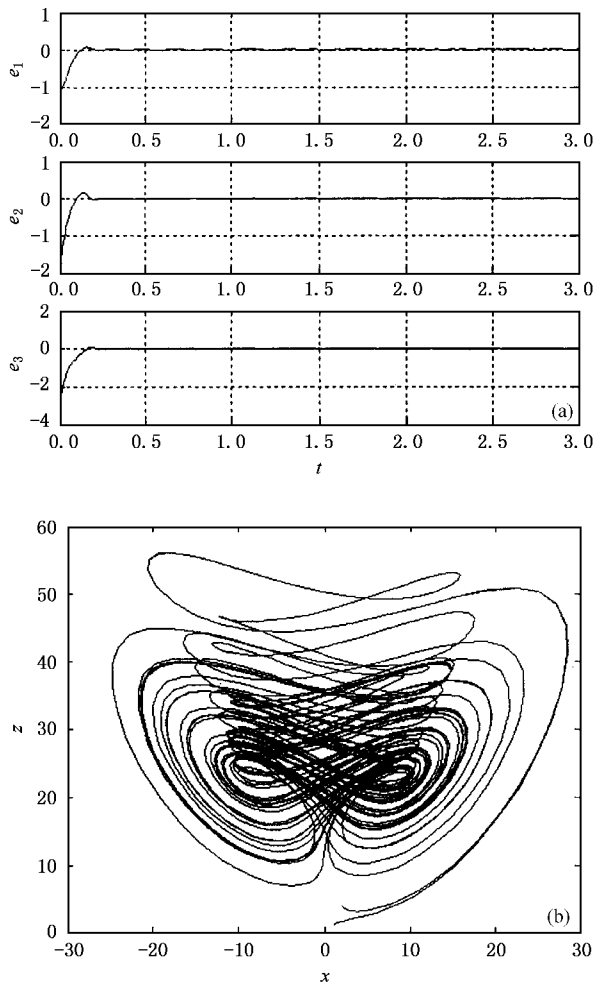


图 3 (a) Chen 系统耦合同步的误差 (b) 驱动-响应 Chen 混沌系统同步

二, 文献 [11—13] 在推导混沌系统同步的充分条件时, 都需要耦合系数 $d_i > \alpha$ ($i = 1, 2, 3$) 前提条件, 而这里并不需要这样的限定条件. 例如, 文献 [12] 要求 $d_2 > 14$, 这里不需要. 可以看出, 这里推出混沌同步的耦合系数 d_i 的选择范围更宽广.

3. 结论与讨论

本文对线性耦合的两个统一混沌系统的同步进行了研究. 利用线性时变连续系统的稳定性理论, 而且不要经过太多烦琐的数学计算, 得到了混沌全局渐进同步的一种新的充分条件. 与已经提出的几种方法进行了比较, 发现本文得出的混沌同步的充分条件的表达式不仅要求简单、约束条件少、缺少保守性, 而且满足的耦合系数范围更广. 将该方法应用于统一混沌系统, 两个相同的混沌系统能够快速实现

现了全局渐进同步,数值仿真表明了该方法的有效性和可行性.另外,本文的分析方法应用于其他的混沌系统的同步与控制中,如 Chua 电路、Rössler 混沌

系统等的同步与控制中,都取得了很好的效果,说明该方法有良好的普适性,值得进一步去研究.

- [1] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Pecora L M and Carroll T L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374
- [3] Hu G *et al* 2000 *Chaos Control* (Shanghai : Shanghai Science and Technology Edition Publishing House)(in Chinese)[胡 岗等 2000 混沌控制 上海 :上海科技出版社]
- [4] Wang G R , Yu X L and Chen S G 2001 *Chaos Control , Synchronization and Its Application* (Beijing : National Defense Industry Publishing House)(in Chinese)[王光瑞、于熙岭、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京 :国防工业出版社)]
- [5] Brown R and Kocarev L A 2000 *Chaos* **10** 344
- [6] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999(in Chinese)[李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
- [7] Liu J , Chen S H and Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595(in Chinese)[刘 杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [8] Min F H and Wang Z Q 2004 *Control Theory & Application* **21** 0935 (in Chinese)[闵富红 王执铨 2004 控制理论与应用 **21** 0935]
- [9] Agiza H N and Yassen M T 2001 *Phys. Lett. A* **278** 191
- [10] Li G H 2005 *Chin. Phys.* **14** 0472
- [11] Lü J H , Zhou T S and Zhou S C 2002 *Chaos , Solitons & Fractals* , **14** 529
- [12] Li D M , Lu J A and Wu X Q 2005 *Chaos , Solitons & Fractals* . **23** 79
- [13] Park J H 2005 *Chaos , Solitons & Fractals* **23** 1319
- [14] Chen G R and Lü J H 2003 *Dynamical analysis , Control & Synchronization of a modified Lorenz system* (Beijing : Science Press) (in Chinese)[陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京 :科学出版社)]
- [15] Liu Y Q and Liu J X 1987 *Advances in Modeling and Simulation* **2** 29
- [16] Liu Y Q and Song Z K 1988 *Theory and application of large-scale dynamic systems :Decomposition Stability and Structure* (Guangzhou : The South China Institute of Technology Press)(in Chinese)[刘永清、宋中昆 1988 大型动力系统的理论与应用-分解、稳定与结构(广州 :华南工学院出版社)]

Coupled synchronization of the unified chaotic system^{*}

Min Fu-Hong^{1,2)} Wang Zhi-Quan¹⁾

¹⁾*Department of Automation , Nanjing University of Science & Technology , Nanjing 210094 , China)*

²⁾*School of Electronic Engineering and Automation , Nanjing Normal University , Nanjing 210042 ,China)*

(Received 3 December 2004 ; revised manuscript received 20 December 2004)

Abstract

This paper investigates the synchronization of two linearly coupled unified chaotic systems. A new sufficient condition of global asymptotic synchronization is attained from the theory of stability of time-varying systems. In addition , compared with the previously proposed method , the sufficient condition for the synchronization of two linearly coupled unified chaotic systems is simpler and less conservative , and the range of coupled coefficients is wider. Numerical simulation shows the effectiveness and feasibility of this method.

Keywords : unified chaotic system , coupled synchronization , linear time-varying systems

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60174005) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (Grant No. BK2001054).