

# 小波变换重建超短脉冲光谱相位的误差分析\*

邓玉强<sup>1)</sup> 张志刚<sup>1) 2)</sup> 柴路<sup>1)</sup> 王清月<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (天津大学精密仪器与光电子工程学院超快激光研究室, 光电信息技术科学教育部重点实验室, 天津 300072)

<sup>2)</sup> (北京大学信息学院量子电子学研究所, 北京 100871)

(2005 年 1 月 21 日收到, 2005 年 3 月 15 日收到修改稿)

分析了噪声对小波变换重建超短脉冲光谱相位的影响. 在理想情况和附加噪声、倍增噪声, 以及干涉条纹采样量化干扰的情况下, 分析了小波变换对几种光谱相位的重建精度. 结果显示, 在理想情况和噪声干扰的情况下, 小波变换的相位重建精度都在 0.03rad 范围以内. 这说明小波变换是一种精确可信的光谱相位重建方法, 具有很强的抗噪声干扰能力. 另外, 将小波变换的轨迹图类比 SHG FROG 的轨迹图, 可以直接定性判断脉冲的啁啾特征.

关键词: 超短脉冲, 相位重建, 小波变换, 噪声

PACC: 4280W, 0760L

## 1. 引 言

飞秒激光技术的发展促进了脉冲测量方法的不断更新和改进. 目前, 频率分辨光学开关法 (FROG)<sup>[1]</sup> 和自参考光谱位相相干直接电场重建法 (SPIDER)<sup>[2]</sup> 是两种应用最为广泛脉冲相位测量方法. FROG 将脉冲的光谱相位信息在二维的时间-频率平面上展开, 更直观地展示了脉冲的光谱相位信息的时域分布, 可从中直接判断脉冲的啁啾特征. 然而其光谱相位的重建是一种二维迭代的过程, 计算量大, 不利于脉冲光谱相位的实时反馈补偿. 相比之下, SPIDER 不需要移动部件和迭代的算法, 而拥有极快的测量速度<sup>[3]</sup>. 然而, 在传统的 SPIDER 相位重建过程中, 在脉冲具有复杂结构的情况下, 选择不同宽度的滤波窗口会引入不同程度的相位噪声, 导致重建相位或多或少地偏离真实值, 造成相位重建的不确定性. 最近, 我们提出的用小波变换 (wavelet transform) 重建 SPIDER 光谱相位方法, 由于小波变换重建光谱相位不需要对光谱干涉作傅里叶变换和滤波, 因此就消除了上述的不确定因素, 使重建的相位更加精确<sup>[4, 5]</sup>. 同时, 小波变换重建光谱相位的精确度对实际测量过程中随机噪声的敏感性也是一个重要的指标, 因为一个实用的测量方法应该

对随机噪声具有不敏感性.

本文围绕小波变换重建 SPIDER 光谱相位的精确度能够容纳随机噪声的程度展开了讨论, 重点分析了附加噪声、倍增噪声, 以及条纹采样量化对小波变换重建相位精确度的影响, 即随机噪声敏感性问题, 提出将小波变换的轨迹图类比 SHG FROG<sup>[6]</sup> 的轨迹图, 可以作为直接定性判断脉冲的啁啾特征的简便方法.

## 2. 小波变换用于光谱位相重建<sup>[4, 5]</sup>

以角频率  $\omega$  为变量, 小波函数  $\psi(\omega)$  的尺度因子和平移因子分别用  $\Delta\omega$  和  $\omega'$  表示. 光谱干涉条纹  $f(\omega)$  的小波变换可以表示为

$$W(\Delta\omega, \omega') = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \psi^* \left( \frac{\omega - \omega'}{\Delta\omega} \right) d\omega. \quad (1)$$

对光谱干涉信号作小波变换, 干涉信号的周期反映为小波变换强度的极大值, 选取该极大值处的相位信息, 作为干涉条纹的相位, 经过类似传统 SPIDER 相位重建的一系列过程<sup>[2]</sup>, 就可以重建脉冲的光谱相位.

## 3. 理想情况下小波变换的光谱相位重建

为进一步验证小波变换重建光谱相位的精确

\* 国家自然科学基金(批准号: 60178007, 60490280), 国家重点基础研究专项经费(批准号: G1999075201-2)资助的课题.

† E-mail: zhgzhang@pku.edu.cn

性,我们用小波变换重建 5 种不同情况的光谱相位. 模拟的光谱为高斯型,中心为 375THz(800nm),半高宽(FWHM)为 63.66THz. 模拟的光谱相位可表示为

$$\phi(\omega) = a(\omega - \omega_c)^2 + b(\omega - \omega_c)^3 + c(\omega - \omega_c)^4, \quad (2)$$

这里,  $a, b, c$  分别表示二阶相位、三阶相位和四阶相位. 五种模拟相位分别表示为

- 1)  $a = b = c = 0$ ;
- 2)  $a = 15 \times 10^{-4} \text{ ps}^2, b = c = 0$ ;
- 3)  $a = 0, b = 3 \times 10^{-6} \text{ ps}^3, c = 0$ ;

$$4) a = b = 0, c = 1 \times 10^{-8} \text{ ps}^4;$$

$$5) a = 10 \times 10^{-4} \text{ ps}^2, b = -2 \times 10^{-6} \text{ ps}^3, c = -1 \times 10^{-8} \text{ ps}^4.$$

我们分别称为零相位、二阶相位、三阶相位、四阶相位和混合相位. 光谱剪切干涉所选的参数为光谱侧切量  $\Omega = 25 \times 10^{12} \text{ rad/s}$ , 两复制脉冲的时间延迟  $\tau = 0.7 \text{ ps}$ . 角频率差  $\Delta\omega$  的步长  $\text{Step}_{\Delta\omega} = 0.033 \times 10^{12} \text{ rad/s}$ . 重建结果如图 1 所示,图中虚线为给定的相位,实线为小波变换重建的相位.

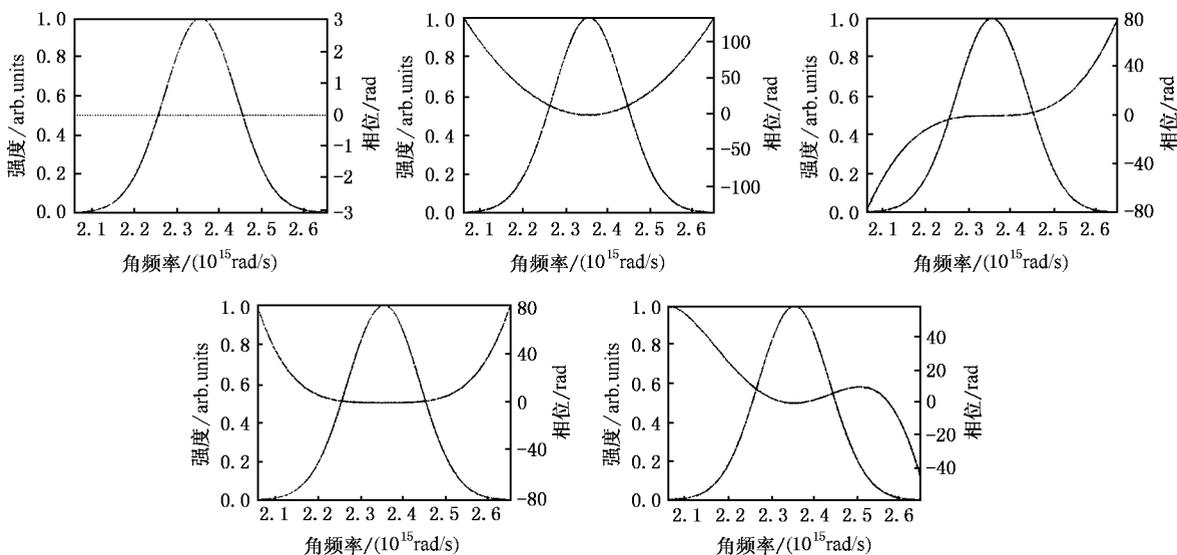


图 1 小波变换在理想情况下重建的 5 种相位(上图从左到右依次为 0 相位、二阶相位和三阶相位;下图从左到右依次为四阶相位和混合相位)

图 1 中给定的相位和小波变换重建的相位严格地重合在一起,表明小波变换可以精确地重建出给定的相位. 为了说明小波变换重建相位的精度,我们引入如下的误差定义:

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_r(\omega) - \varphi_g(\omega)| \cdot S(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega}, \quad (3)$$

其中,  $\varphi_r$  为小波变换重建的相位,  $\varphi_g$  为给定的相位,  $S(\omega)$  为脉冲光谱强度. 根据(3)式定义的重建相位误差如表 1 所示.

表 1 小波变换重建 5 种相位的误差

相位	零相位	二阶相位	三阶相位	四阶相位	混合相位
重建误差/rad	0.0000	0.0280	0.0148	0.0318	0.0152

表 1 的数据表明,小波变换对以上 5 种相位的重建都得到了和给定相位精确一致的结果. 这说明在理想情况下,小波变换能精确地重建光谱相位.

#### 4. 噪声对小波变换重建光谱相位的影响

对以上 5 种相位得到的光谱干涉条纹分别加 10% 的附加噪声、10% 的倍增噪声,以及以 3-bit 采样量化. 重建的光谱相位如图 2 所示.

5 种光谱相位的干涉条纹在 3 种噪声干扰的情况下,根据(3)式定义的重建误差如表 2 所示.

表 2 的数据显示,对于倍增噪声,小波变换对 5 种光谱相位的重建误差都在 0.02rad 以内. 对于附加噪声和 3-bit 的采样量化,重建误差略大. 这是因为在干涉信号的边缘,干涉信息已经被噪声完全淹没,或者被量化为零. 这时信噪比趋近于零或已等

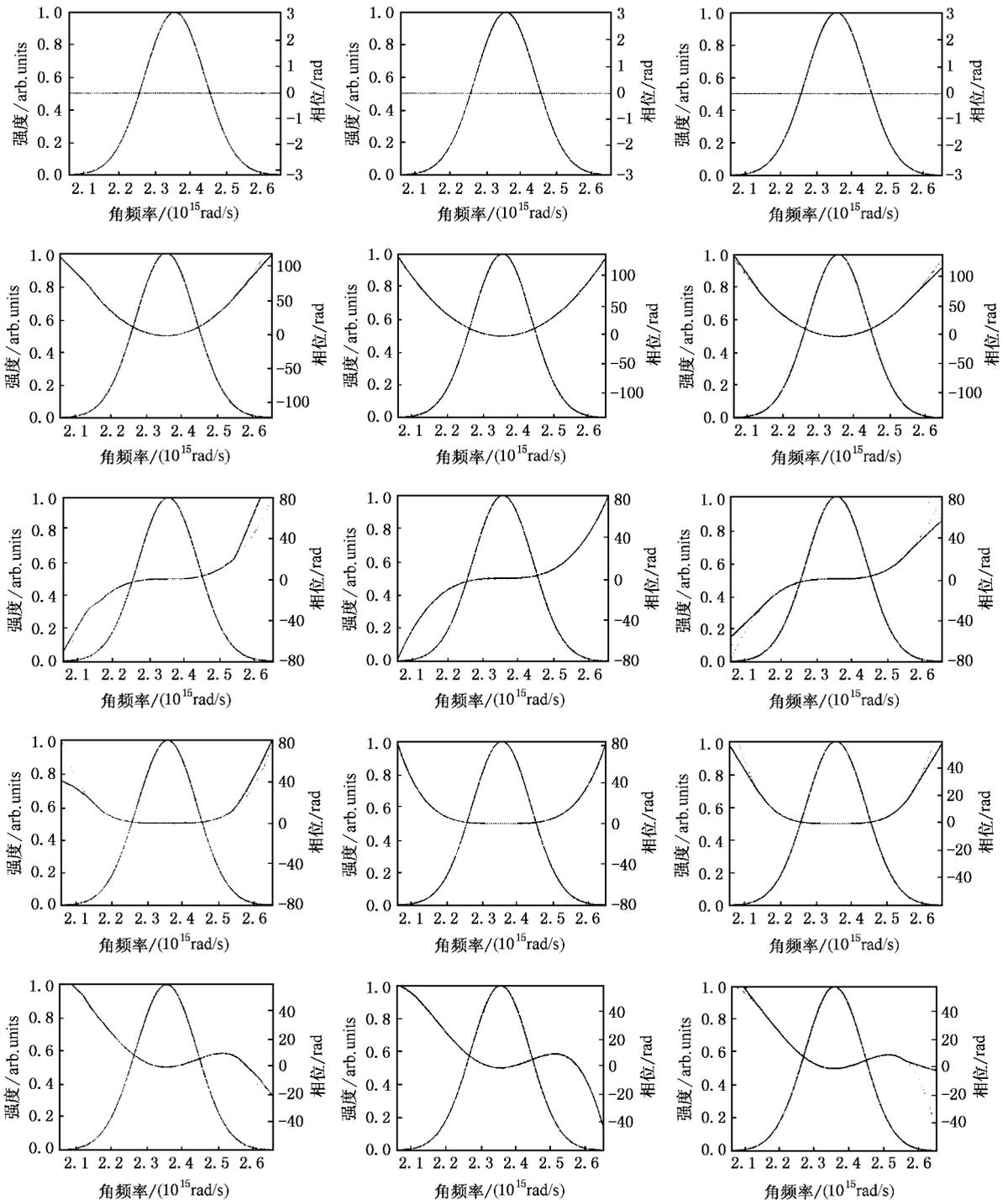


图 2 引入附加噪声、倍增噪声, 以及采样量化对小波变换重建光谱相位的影响( 横向 3 列图依次表示引入 10% 的附加噪声、10% 倍增噪声和 3-bit 采样量化的光谱相位重建结果, 纵向 5 行图从上到下依次表示零相位、二阶相位、三阶相位、四阶相位和混合相位的重建结果. 图中虚线为模拟给定的相位, 实线为小波变换重建的相位)

于零, 这是任何方法也不可能重建的信号.

除去被噪声淹没的部分或者量化为零的区域, 进一步的计算表明, 小波变换对于任何一种相位情

况, 在任何种类的噪声干扰下, 重建的相位误差都在 0.03rad 以内. 选择光谱区在  $2.18 \times 10^{15} - 2.53 \times 10^{15}$  rad/s 范围内的重建相位, 重建误差如表 3 所示.

表 2 5 种光谱相位在 3 种噪声干扰下的重建误差

相位	附加噪声/rad	倍增噪声/rad	采样量化/rad
零相位	0.0000	0.0000	0.0000
二阶相位	0.0538	0.0184	0.0303
三阶相位	0.0929	0.0081	0.0405
四阶相位	0.0791	0.0144	0.0466
混合相位	0.0519	0.0227	0.0299

表 3 5 种光谱相位在光谱区  $2.18 \times 10^{15} - 2.53 \times 10^{15}$  rad/s 范围内的重建相位误差

相位	附加噪声/rad	倍增噪声/rad	采样量化/rad
零相位	0.0000	0.0000	0.0000
二阶相位	0.0148	0.0120	0.0117
三阶相位	0.0263	0.0220	0.0037
四阶相位	0.0119	0.0105	0.0167
混合相位	0.0292	0.0267	0.0117

表 3 的数据显示,小波变换在有效的光谱区域,5 种光谱相位在 3 种噪声干扰的相位重建误差都在  $0.03\text{rad}$  以内. 比较表 1 和表 3 可以看出,噪声对小波变换重建光谱相位影响很小. 说明小波变换具有很强的抵抗噪声干扰能力,在理想情况和噪声干扰情况下都能精确地重建脉冲的光谱相位.

### 5. 根据小波变换行迹判断脉冲啁啾情况

用小波变换重建光谱相位将光谱干涉信息在二维的时间-频率平面上展开,小波变换的强度图直观地反映了信号的时间-频率信息,和 FROG 的轨迹图类似<sup>[6]</sup>,这里我们称之为小波变换轨迹图. 和 FROG 方法一样,小波变换的轨迹图也具有直观的直观性,可以直接从这个二维的时间-频率图中判断脉冲的啁啾情况.

用(2)式定义的相位,分别计算以下 7 种参数的相位的小波变换.

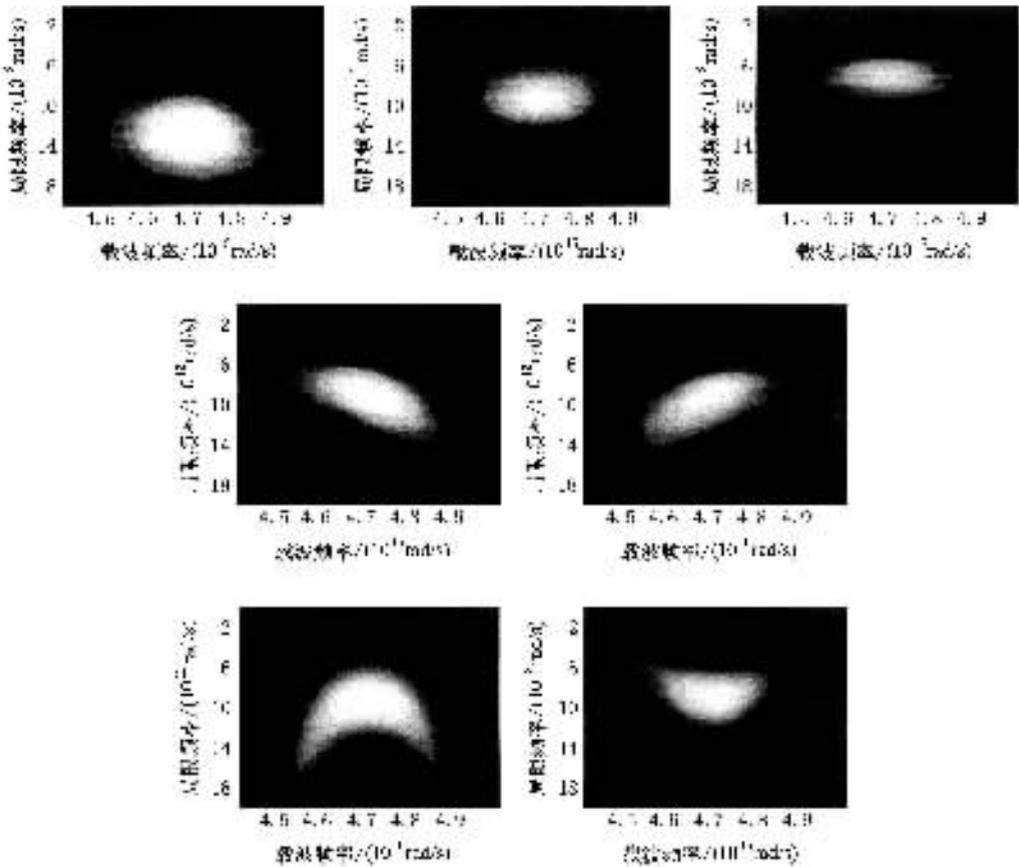


图 3 不同相位脉冲的小波变换轨迹图(第一行从左到右依次为具有负二阶相位( $-4 \times 10^3 \text{fs}^2$ )的脉冲、变换极限脉冲和具有正二阶相位( $+4 \times 10^3 \text{fs}^2$ )的脉冲的小波变换轨迹图;第二行分别是具有负三阶、正三阶相位( $\mp 6 \times 10^3 \text{fs}^3$ )的脉冲的小波变换轨迹图;第三行分别为具有负四阶、正四阶相位( $\mp 2 \times 10^4 \text{fs}^4$ )的脉冲的小波变换轨迹图)

- 1)  $a = -4 \times 10^3 \text{ fs}^2, b = c = 0$ ;
- 2)  $a = b = c = 0$ ;
- 3)  $a = 4 \times 10^3 \text{ fs}^2, b = c = 0$ ;
- 4)  $a = 0, b = -8 \times 10^3 \text{ fs}^3, c = 0$ ;
- 5)  $a = 0, b = 8 \times 10^3 \text{ fs}^3, c = 0$ ;
- 6)  $a = b = 0, c = -4 \times 10^4 \text{ fs}^4$ ;
- 7)  $a = b = 0, c = 4 \times 10^4 \text{ fs}^4$ .

图 3 列出了不同相位的脉冲的小波变换轨迹图.

小波变换的轨迹图显示,可以从小波变换的轨迹的位置、偏斜方向和弯曲情况中判断脉冲的啁啾特征.如果把变换极限脉冲作为标准,那么具有正二阶相位的小波变换轨迹向上移动,具有负二阶相位的小波变换轨迹向下移动;具有正三阶相位的小波变换轨迹向上倾斜,具有负三阶相位的小波变换轨迹向下倾斜;具有正四阶相位的小波变换轨迹向上弯曲,具有负四阶相位的小波变换轨迹向下弯曲.这样可以从小波变换的轨迹图直接判断脉冲的啁啾

特征.

## 6. 结 论

本文对小波变换重建光谱相位的精确度对随机噪声的敏感性问题进行了研究,分析了具有 5 种不同相位脉冲的 SPIDER 光谱相干信号在引入了附加噪声、倍增噪声,以及干涉条纹采样量化后的小波变换重建相位的误差.结果表明,在引入 10% 的 3 种噪声情况下在有效光谱区域的重建误差都在  $0.03\text{rad}$  以内,这说明小波变换重建光谱相位具有很强的抵抗噪声干扰能力,是一个非常实用的重建光谱相位的数据处理方法.同时从小波变换轨迹图中,可以直接定性判断脉冲的啁啾特征.这种方法的应用,将在以空间光调制器为脉冲相位补偿的系统中发挥重要作用,将有利于单周期超短脉冲的产生和评价.

[1] Kane D J and Trebino R 1993 *Opt. Lett.* **18** 823  
 [2] Iaconis C and Walmsley I A 1999 *IEEE J. Quantum Electron.* **35** 501  
 [3] Shuman T M, Anderson M E, Bromage J *et al* 1999 *Opt. Express* **5** 134  
 [4] Deng Y Q, Wu Z B, Chai L *et al* 2005 *Conf. Lasers and Electro-Optics* (Optical Society of America, Baltimore) JW B11

[5] Deng Y Q, Wu Z B, Chen S H *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3716 (in Chinese) [邓玉强、吴祖斌、陈盛华等 2005 物理学报 **54** 3716]  
 [6] DeLong K W, Trebino R, Hunter J *et al* 1994 *J. Opt. Soc. Am. B* **11** 2206

# Effects of noise on spectral phase reconstruction with wavelet analysis \*

Deng Yu-Qiang<sup>1)</sup> Zhang Zhi-Gang<sup>1 2)</sup> Chai Lu<sup>1)</sup> Wang Qing-Yue<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> *Ultrafast Laser Laboratory, School of Precision Instrument and Optoelectronics Engineering, Key Laboratory of Optoelectronic Information Technical Science, EMC, Tianjin University, Tianjin 300072, China*

<sup>2)</sup> *Institute of Quantum Electronics, School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China*

( Received 21 January 2005 ; revised manuscript received 15 March 2005 )

## Abstract

We have investigated the accuracy of wavelet analysis of spectral shearing interferometry signal with noisy data. Specifically, we have examined at the effects of additive noise, multiplicative noise, and quantization of the interferogram on the reconstruction of the spectral phase, and revealed that the wavelet transform is a robust technique to retrieve spectral phase from the noise background. We also show that the phase of a femtosecond pulse can be identified from the trace of wavelet transform.

**Keywords** : ultrafast lasers, phase retrieval, wavelet transform, noise

**PACC** : 4280W, 0760L

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60178007, 60490280 ), the National Key Basic Research Special Foundation of China ( Grant No. G1999075201-2 ).