

非线性“loop”孤子方程的确定解

蒲利春 张雪峰 徐丽君

(攀枝花学院数理教学部 攀枝花 617000)

(2004 年 10 月 10 日收到, 2005 年 2 月 23 日收到修改稿)

提出一种求解非线性“loop”孤子方程确定解的新方法,即以“行波”为因子,利用幂级数直接求解该方程解析函数 $U(\xi)$,用 MatLab 绘制 $c \rightarrow$ 光速和 $c \rightarrow$ 声速的 $U(\xi)-\xi$ 图像,直接观察该方程解的变化规律,找出该方程的确定解(含孤波解).该方法为求解难度大的非线性孤子方程提供借鉴.

关键词:非线性孤子方程,确定解,MatLab 图像

PACC:4320,1180E,0230,0290

1. 引言

KDV, MKDV, SNL, SNLS⁺ 等非线性方程的孤波解^[1-11](含包络波形解、行波解、孤子解及其相关方程的精确解等)均采用类似于“ F -展开法^[12]”的解法,即在“行波”因子变换下,构造一个 Jacobin 椭圆函数或双曲函数、三角函数,然后讨论孤波的存在形式或包络波.本文以“行波”作因子,利用幂级数直接求解非线性“loop”孤子方程的解析函数 $U(\xi)$,用 MatLab 绘制 $c \rightarrow$ 光速和 $c \rightarrow$ 声速的 $U(\xi)-\xi$ 图像,直观地观察 $U(\xi)$ 在积分常数、“行波”因子和待定常数取值下的趋向和变化规律,据此找出非线性“loop”孤子方程的确定解(含孤波解).该方法为求解难度大的非线性孤子方程提供借鉴.

2. 从“1+1”维的方程中导出非线性“loop”孤子方程

设

$$\begin{cases} \varphi_x = M\varphi, \\ \varphi_t = N\varphi, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\varphi(x, t)$ 是 n 维向量函数, M, N 是 $n \times n$ 维矩阵,其元素中包含有谱参数 λ ,以 x, t 为自变量的 m 维向量函数 $\varphi(x, t)$ 及其各阶导数.

(1)式有解的条件是 $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$,即零曲线方程

$$M_t - N_x + [M, N] = 0, \quad (2)$$

取

$$M = \lambda \begin{pmatrix} -i & q \\ r & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix},$$

方程(2)式化简为^[12]

$$\begin{cases} q_t + \left(\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}} \right)_{xx} = 0, \\ r_t + \left(\frac{r_x}{(1-rq)^{3/2}} \right)_{xx} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

令 $r = \pm q$ 得到

$$q_t + \left(\frac{q_x}{(1 \mp q^2)^{3/2}} \right)_{xx} = 0. \quad (4)$$

(4)式是非线性“loop”孤子方程,同其他非线性方程如 KDV, MKDV, NLS, NLS⁺, L-L, SG, BG, SHG 等孤子方程相比,其方程不易简化,求解难度大.

3. 非线性“loop”孤子方程的幂级数解析函数 $U(\xi)$

在(4)式中,令 $q(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x - ct^{1/2}$ (ξ 是行波因子, x, t 是空间、时空变量, c 是波速.)所以 $q_t(x, t) = -cU_\xi(\xi)$ 和 $q_x(x, t) = U_\xi(\xi)$.

引入约束条件

$$\left(\frac{q_x}{(1 \mp q^2)^{3/2}} \right)_{xx} \approx \left(\frac{U_\xi(\xi)}{(1 \mp U^2(\xi))^{3/2}} \right)_{\xi\xi},$$

代入(4)式得

$$-cU_\xi(\xi) + \left(\frac{U_\xi(\xi)}{(1 \mp U^2(\xi))^{3/2}} \right)_{\xi\xi} = 0. \quad (5)$$

(5)式两边积分

$$\left(\frac{U_\xi(\xi)}{(1 \mp U^2(\xi))^{3/2}} \right)_\xi = cU(\xi) + A, \quad (6)$$

式中, A 为任意实数, 同 c 的取值相关.

求解 (6) 式得

$$(1 \mp U^2(\xi))U_{\xi\xi}(\xi) \pm 3U(\xi)U_{\xi}^2(\xi) = (cU(\xi) + A)(1 \mp U^2(\xi))^{\beta/2}. \quad (7)$$

3.1. $U_{\xi}(\xi) + \left(\frac{U_{\xi}(\xi)}{(1-U^2(\xi))^{\beta/2}}\right)_{\xi\xi} = 0$ 的幂级数解析函数 $U(\xi)$

在 (4) 式中, 取 $r = q$, 代入 (7) 式得

$$(1 - U^2(\xi))U_{\xi\xi}(\xi) + 3U(\xi)U_{\xi}^2(\xi) = (cU(\xi) + A)(1 - U^2(\xi))^{\beta/2}. \quad (8)$$

设 $U_{\xi}(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k U^k(\xi)$, 根据领头项分析^[31], 取 $k = 2$, 由 (8) 式得

$$U_{\xi}(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k U^k(\xi) = a_0 + a_1 U(\xi) + a_2 U^2(\xi), \quad (9)$$

所以

$$U_{\xi\xi}(\xi) = (a_0 + a_1 U(\xi) + a_2 U^2(\xi))(a_1 + 2a_2 U(\xi)).$$

在 $U^2(\xi) \leq 1$ 的条件下, 按幂级数理论展开得

$$(1 - U^2(\xi))^{\beta/2} = 1 - \frac{5}{2!}U^2(\xi) - \frac{45}{4!}U^4(\xi) - \dots \quad (10)$$

将上述几式代入 (8) 式得

$$(a_0 + a_1 U(\xi) + a_2 U^2(\xi))(a_1 + (2a_2 + 3a_0)U(\xi) + 2a_1 U^2(\xi) + a_2 U^3(\xi)) = A + cU(\xi) - \frac{5A}{2}U^2(\xi) - \frac{5c}{2}U^3(\xi) + \dots \quad (11)$$

由 (11) 式得

$$\begin{cases} a_0 a_1 = A, \\ a_0(2a_2 + 3a_0) + a_1^2 = c, \\ 3a_1 a_2 + 5a_0 a_1 = -\frac{5}{2}A. \end{cases} \quad (12)$$

解 (12) 式得

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{c - 3a_0^2}{2a_0} \end{cases} \quad (13)$$

和

$$\begin{cases} a_0 = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{c^2 + 8A^2} - c}}{2}, \\ a_1 = \pm \frac{2A}{\sqrt{\sqrt{c^2 + 8A^2} - c}}, \\ a_2 = \mp \frac{5}{2} \sqrt{\sqrt{c^2 + 8A^2} - c}. \end{cases} \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (9) 式, 对 $U_{\xi}(\xi) = (a_0 + a_1 U(\xi) + a_2 U^2(\xi))$ 积分得

$$\ln \left| \frac{2a_2 U(\xi) + a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2 U(\xi) + a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}} \right| \times \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}} = \xi + h_1,$$

所以

$$U(\xi) = \frac{h_0(a_1 + \beta_1)e^{\beta_1 \xi} - a_1 + \beta_1}{2a_2(1 - h_0 e^{\beta_1 \xi})}. \quad (15)$$

(15) 式中, h_1 是积分常数, $a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0$, $\beta_1 = \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}$, $h_0 = e^{h_1}$. 将 (13) 式代入 (9) 式得

$$U_{\xi}(\xi) = a_0 + a_2 U^2(\xi). \quad (16)$$

在 (16) 式中, 若 c 很大, 则 $a_2 = \frac{c - 3a_0^2}{2a_0} > 0$, 积分得

$$U(\xi) = \frac{a_0}{\sqrt{c - 3a_0^2}} \tan \sqrt{c - 3a_0^2}(\xi + h_0). \quad (17)$$

在 (16) 式中, 若 $c - 3a_0^2 < 0$, 积分得

$$U(\xi) = \frac{a_0(1 + h_0 e^{\beta_2 \xi})}{\sqrt{3a_0^2 - c}(1 - h_0 e^{\beta_2 \xi})}, \quad (18)$$

其中 $\beta_2 = -2\sqrt{3a_0^2 - c}$.

3.2. $U_{\xi}(\xi) + \left(\frac{U_{\xi}(\xi)}{(1+U^2(\xi))^{\beta/2}}\right)_{\xi\xi} = 0$ 的幂级数解析函数 $U(\xi)$

同 3.1 求解 $U(\xi)$ 一样, 在 (4) 式中, 取 $r = -q$, 代入 (7) 式得

$$(1 + U^2(\xi))U_{\xi\xi}(\xi) - 3U(\xi)U_{\xi}^2(\xi) = (cU(\xi) + A)(1 + U^2(\xi))^{\beta/2}, \quad (19)$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sqrt{c + 2\sqrt{2}A} \pm \sqrt{c - 2\sqrt{2}A}}{2\sqrt{2}}, \\ a_1 = \frac{\sqrt{c + 2\sqrt{2}A} \mp \sqrt{c - 2\sqrt{2}A}}{2}, \\ a_2 = \frac{5[\sqrt{c + 2\sqrt{2}A} \pm \sqrt{c - 2\sqrt{2}A}]}{4\sqrt{2}}, \end{cases} \quad (20)$$

和

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = \frac{c + 3a_0^2}{2a_0}. \end{cases} \quad (21)$$

将 (20) 式代入 (9) 式得

$$U(\xi) = \frac{\rho \tan \frac{\alpha(\xi + h_0)}{2}}{2a_2} - \frac{a_1}{2a_2}. \quad (22)$$

在(22)式中, $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$, $\rho = \sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}$.

将(21)式代入(9)式,若 c 很大,则 $a_2 = \frac{c + 3a_0^2}{a_0} > 0$,

积分得

$$U(\xi) = \frac{a_0}{\sqrt{c + 3a_0^2}} \tan \sqrt{c + 3a_0^2}(\xi + h_0). \quad (23)$$

4. 用 MatLab 绘制非线性“loop”孤子方程幂级数解析函数图像 $U(\xi)-\xi$

4.1. 解析函数(15)式的图像

由(15)式得绘制 $U(\xi)-\xi$ 图像的方程(24)式
(图1参数取值: $A = 2.2, h_0 = 1, a_0 = 2, \beta_1 = 3.5$)

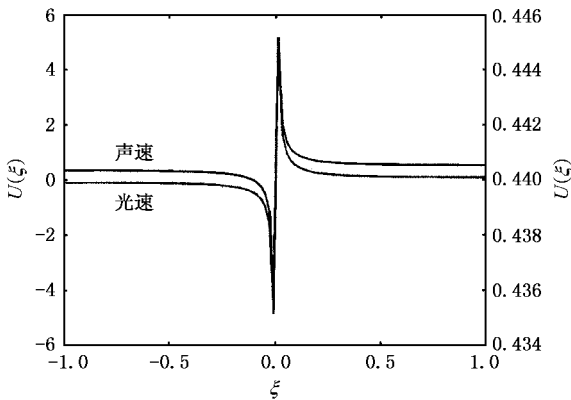


图1 $U(\xi)-\xi$ 图像

$$U(\xi) = \frac{h_0(A + a_0\beta_1)e^{\beta_1\xi} - A + \beta_1a_0}{-\xi(1 - h_0e^{\beta_1\xi})}, \quad (24)$$

其中, $a_0 = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{c^2 + 8A^2} - c}}{2}$.

4.2. 解析函数(18)式的图像

由(18)式得绘制 $U(\xi)-\xi$ 图像的方程(25)式
(图2参数取值: $a_0 = 10.5, h_0 = 1$)

$$U(\xi) = \frac{a_0(1 + h_0e^{\beta_2\xi})}{\sqrt{3a_0^2 - \alpha(1 - h_0e^{\beta_2\xi})}}. \quad (25)$$

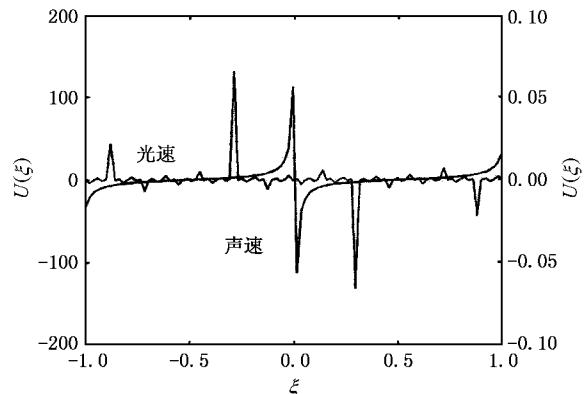


图2 $U(\xi)-\xi$ 图像

4.3. 解析函数(22)式的图像

由(22)式得绘制 $U(\xi)-\xi$ 图像的方程(26)式
(图3参数取值: 图3(a) $a_0 = 1, A = 1, \rho = 50, h_0 = 1$;
图3(b) $a_0 = 2, A = 15, \rho = 6, h_0 = 1$)

$$U(\xi) = \frac{\left[\rho \tan \frac{\alpha(\xi + h_0)}{2} - \sqrt{\alpha} a_0 \mp 2\sqrt{c - 2\sqrt{2}A} \right]}{5a_0}, \quad (26)$$

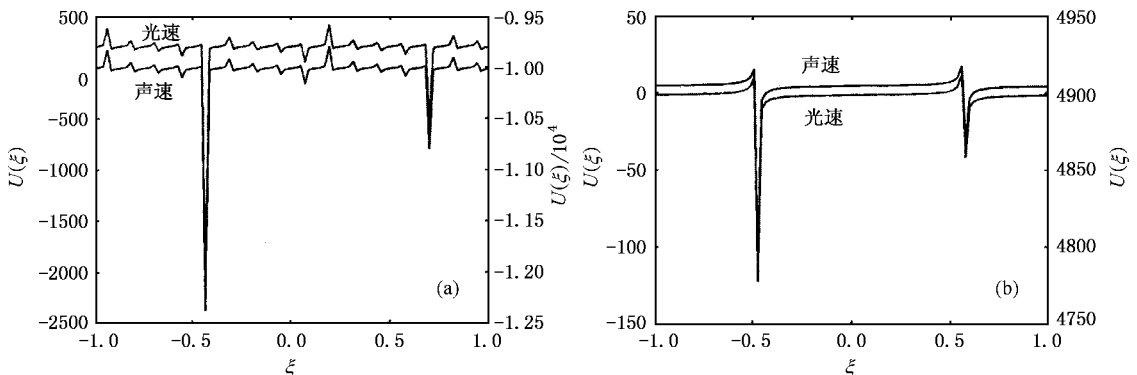
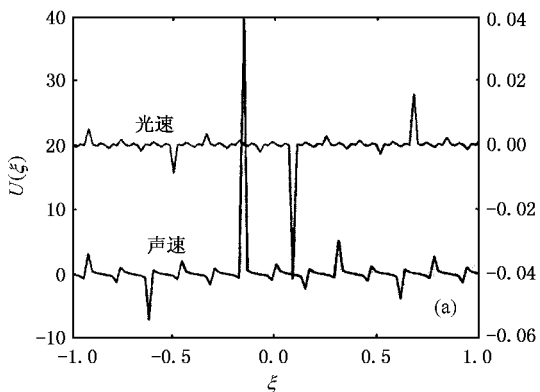


图3 $U(\xi)-\xi$ 图像 (a)当(26)式中取“+”号时 (b)当(26)式中取“-”号时

其中 $a_0 = \frac{\sqrt{c + 2\sqrt{2}A} \pm \sqrt{c - 2\sqrt{2}A}}{2\sqrt{2}}$.

4.4. 解析函数(17)和(23)式的图像

由(17)式和(23)式得绘制 $U(\xi)-\xi$ 图像的方程(27)式(图4参数取值:图4(a) $a_0 = -5, h_0 = 1$;图4



(b) $a_0 = 3, h_0 = 1$)

$$U(\xi) = \frac{a_0}{\sqrt{c \pm 3a_0^2}} \tan \sqrt{c \pm 3a_0^2} (\xi + h_0), \tag{27}$$

其中 $\frac{c \pm 3a_0^2}{a_0} > 0$.

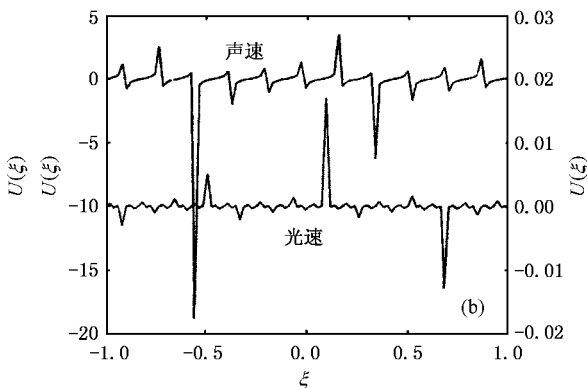


图4 $U(\xi)-\xi$ 图像 (a)当(27)式中取‘+’号时 (b)当(27)式中取‘-’号时

说明：

1)上述各 $U(\xi)-\xi$ 图像中,横轴 ξ 的取值是 $[-1, 1]$ 且 100 等分,左边纵轴表示 c 取声速时的 $U(\xi)$ 值,右边纵轴表示 c 取光速时的 $U(\xi)$ 值;

2)当参数 (A, h_0, a_0, ρ) 略偏离上述取值时, $U(\xi)-\xi$ 图像变化较小,变化趋势相同,当参数偏离上述取值较大时, $U(\xi)-\xi$ 图像变化较大.

5. 非线性“loop”孤子方程的确定解 $q(x, t)$

综上所述,得到非线性“loop”孤子方程的确定解,其孤波解仅在光速下存在,即波速小,方程有确定解,波速大,方程有孤波解.

5.1. $q_t + \left(\frac{q_x}{(1-q^2)^{3/2}}\right)_{xx} = 0$ 的确定解

根据幂级数解析函数 $U(\xi)$ 和 $U(\xi)-\xi$ 图像分析,非线性方程 $q_t + \left(\frac{q_x}{(1-q^2)^{3/2}}\right)_{xx} = 0$ 有三个确定解,其特征如下:

由(24)式得确定解一

$$q_1(x, t) = \frac{h_0(A + a_0\beta_1)e^{\beta_1(x-ct)} - A + \beta_1 a_0}{-5(1 - h_0e^{\beta_1(x-ct)})}. \tag{28}$$

从图1可知,在 $\xi \in [-1, 0]$ 和 $\xi \in (0, 1]$ 的半开区间内,声速和光速的解 $U(\xi)$ 是稳定的,趋向某个定值,在 $\xi = 0$ 点发生跃变, $U(\xi)$ 不是孤波解. 即 $q_1(x, t)$ 在声速、光速取值下,是该方程的确定解,不是孤波解.

由(25)式得确定解二

$$q_2(x, t) = \frac{a_0(1 + h_0e^{\beta_2(x-ct)})}{\sqrt{3a_0^2 - c(1 - h_0e^{\beta_2(x-ct)})}}. \tag{29}$$

从图2可知:1) $\xi \in [-1, 0]$ 和 $\xi \in (0, 1]$ 的半开区间内,声速的解 $U(\xi)$ 是稳定的,趋向某个定值,在 $\xi = -1, 0, 1$ 三点附近发生变化,在 $\xi = 0$ 点发生跃变, $U(\xi)$ 不是孤波解;2) $\xi \in [-1, 1]$ 的闭区间内,光速的解 $U(\xi)$ 是周期性孤波解,在 $\xi \in [-0.9, -0.85]$ $[-0.34, -0.26]$ 两个区间内,各存在一个正值孤波,后者峰值大,在 $\xi \in [0.34, 0.26]$ $[0.9, 0.85]$ 两个区间内,各存在一个负值孤波,后者峰值小,即 $q_2(x, t)$ 在声速取值下是该方程的确定解,在光速取值下是该方程的孤波解.

由(17)式得确定解三

$$q_3(x, t) = \frac{a_0}{\sqrt{c - 3a_0^2}} \tan \sqrt{c - 3a_0^2} \times (x - ct + h_0). \tag{30}$$

从图4(b)可知:1) $\xi \in [-1, 1]$ 闭区间内,声速的解 $U(\xi)$ 呈周期性变化,周期边缘值发生突变, $U(\xi)$

不是孤波解, 2) $\xi \in [-1, 1]$ 的闭区间内, 光速的解 $U(\xi)$ 是周期性孤波解, 在 $\xi \in [0.08, 0.11]$ 区间内, 存在一个正值大孤波, 在 $\xi \in [0.63, 0.70]$ 区间内, 存在一个负值小孤波. 即 $q_3(x, t)$ 在声速取值下是该方程的确定解, 在光速取值下是该方程的孤波解.

5.2. $q_t + \left(\frac{q_x}{(1+q^2)^{3/2}} \right)_{xx} = 0$ 的确定解

同理可得, 非线性方程 $q_t + \left(\frac{q_x}{(1+q^2)^{3/2}} \right)_{xx} = 0$

三个确定解的形式和特征如下:

由(26)式得确定解一

$$q_1(x, t) = \frac{\left[\rho \tan \frac{\alpha(x - ct + h_0)}{2} - \sqrt{2} (a_0 + 2\sqrt{c - 2\sqrt{2}A}) \right]}{5a_0}. \quad (31)$$

从图 3(a)可知, $q_1(x, t)$ 在声速、光速取值下是该方程的确定解.

由(26)式得确定解二

$$q_2(x, t) = \frac{\left[\rho \tan \frac{\alpha(x - ct + h_0)}{2} - \sqrt{2} (a_0 - 2\sqrt{c - 2\sqrt{2}A}) \right]}{5a_0}. \quad (32)$$

从图 3(b)可知, $q_2(x, t)$ 在声速取值下是该方程的确定解, 在光速取值下该方程无解.

由(27)式得确定解三

$$q_3(x, t) = \frac{a_0}{\sqrt{c + 3a_0^2}} \times \tan \sqrt{c + 3a_0^2} (x - ct + h_0). \quad (33)$$

从图 4(a)可知, $q_3(x, t)$ 在声速取值下是该方程的确定解, 在光速取值下是该方程的孤波解.

- [1] Li Y S 1999 *Soliton and Integral System* (Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, Shanghai) p1—8 (in Chinese) [李翊神 1999 孤子与可积系统(上海科技教育出版社)第1—8页]
- [2] Xu G Q and Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 946 (in Chinese) [徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 946]
- [3] Xu C Z 2002 *J. Qingdao University* **15**(4) 50 (in Chinese) [徐昌智 2002 青岛大学学报 **15**(4) 50]
- [4] Li X Z, Chang Z Y and Zhang J L et al 2004 *Journal of Henna University of Science and Technology* (Natural Science) **25**(1) 82 (in Chinese) [李向正、常志勇、张金良等 2004 河南科技大学学报(自然科学) **25**(1) 82]
- [5] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1957 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1957]
- [6] Zhao Y M and Yin J R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1977 (in Chinese) [赵永明、颜家壬 1999 物理学报 **48** 1977]
- [7] Liu S D and Liu S K 1994 *Advanced Series in Nonlinear Series Solitary Wave and Turbulence* (Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, Shanghai) p90—112 (in Chinese) [刘式达、刘式适 1994 孤波和湍流(上海科技教育出版社)第90—112页]
- [8] Yan Z Y and Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2113 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 2113]
- [9] Li Z B and Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese) [李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]
- [10] Li Z B and Yao R X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2063 (in Chinese) [李志斌、姚若侠 2001 物理学报 **50** 2063]
- [11] Zhang J F and Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]
- [12] Huang N N 1996 *Theory of Solitons and Method of Perturbations* (Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, Shanghai) [黄念宁 1996 孤子理论和微扰方法(上海科技教育出版社)第26—29页]

Exact solution of the nonlinear “loop” soliton equation

Pu Li-Chun Zhang Xue-Feng Xu Li-Jun

(Department of Science , Panzihua University ,Panzihua 617000 ,China)

(Received 10 October 2004 ; revised manuscript received 23 February 2005)

Abstract

In this paper the author proposes a new method to solve the nonlinear “loop” soliton equation ,that is ,to directly find the solution of the analytic function $U(\xi)$ of the equation by using the traveling wave parameter ξ and the power series expansion , and to find the exact solution of the equation (including the solitary wave solution) by directly observing the variation of the equation using MatLab to depict the functional relationship of $U(\xi)-\xi$ for the cases of $c \rightarrow$ light speed and $c \rightarrow$ sound speed. This method should be helpful in solving difficult nonlinear soliton equations .

Keywords : nonlinear “loop” of the soliton equation , exact solution , MatLab picture

PACC : 4320 , 1180E , 0230 , 0290