

基于非局部弹性理论的单壁碳纳米管轴向 受压屈曲研究*

谢根全^{1)†} 韩 旭²⁾ 龙述尧¹⁾ 田建辉^{1)‡}

¹⁾ 湖南大学工程力学系,长沙 410082)

²⁾ 现代车身技术教育部重点实验室,湖南大学,长沙 410082)

(2004 年 11 月 18 日收到,2005 年 1 月 26 日收到修改稿)

基于非局部弹性理论,在考虑小尺度效应影响的情况下,建立了单壁碳纳米管在均匀轴向外部压力下的壳体模型.得到了单壁碳纳米管的轴向受压屈曲的临界条件,验证了小尺度效应对纳米管轴向受压屈曲的影响.经典的壳体模型理论由于没有考虑小尺度效应影响而导致碳纳米管轴向屈曲临界压力值偏高.

关键词:非局部弹性理论,碳纳米管,小尺度效应,轴向受压

PACC:4600,4620,4630

1. 引 言

有人预言纳米技术像计算机技术一样在今后几十年将引发一场工业革命,而碳纳米管的发现是最有意义的突破之一.纳米结构材料、碳纳米管引起了世人的广泛关注并对其进行大量的研究^[1-5].碳纳米管具有圆柱形的空心壳结构,是由周期性六边形排列的碳原子构成,具有良好的力学、物理和化学性能.因此,碳纳米管是理想的高性能纳米合成物的强化材料^[6,7],也可以用于制造纳米器件.为了挖掘碳纳米管的巨大应用潜能,对单个碳纳米管的力学行为进行充分研究是很有必要的.至今,对碳纳米管的力学性能已经进行了大量的研究^[8-12].

由于用实验方法来获得纳米管的力学性能很困难,目前主要是从理论上考察碳纳米管力学性能,其主要方法有分子动力学模型和连续介质模型^[13,14].因为在模拟大尺寸的原子系统时,应用原子模拟需要大量的计算机时,计算成本高,而在实际应用中受到很大限制.因此,需要探索一种能够不受模拟时间和尺寸大小限制的连续介质力学模型,到目前为止,已提出了许多研究碳纳米管力学性质

的连续介质力学模型^[15-18].

非局部连续介质理论是由 Eringen 和 Edelen^[19,20]提出的非局部弹性理论.非局部连续介质理论认为某一点的应力状态是固体内所有点的应变的函数,而经典连续介质理论认为给定点的应力状态仅仅取决于同一点的应变状态.因此,非局部连续介质理论中的应力应变关系中含有原子间的长程作用力,这种理论已经应用在很广的领域,例如弹性波的晶格传播,断裂力学,位错力学,波在合成材料中的传播,以及流体中的表面张力等.最近, Peddieson 等^[21]指出纳观器件将表现出非局部效应.非局部连续介质力学在与纳米技术应用有关的分析研究中起着重要的作用,SudaK^[22]建立了多弹性梁模型,研究了多壁碳纳米管的柱体弯曲,证明了小尺度效应对多壁碳纳米管影响很大.

本文把碳纳米管当作薄壁浅圆柱壳,在碳纳米管的轴向施加均匀的外部压力,使其产生弯曲变形.在建立本构方程时考虑了小尺度的影响,这种影响是通过所谓非局部连续介质模型施加的,非局部连续介质模型是将经典连续介质方法延伸到纳米结构的力学研究中,它包含了与材料微结构属性有关的信息,保留了连续介质力学的许多优点.

* 国家自然科学基金(批准号:10372031)资助的课题.

† E-mail: xiaoyuanxixiong@163.com

2. 基于非局部弹性理论的连续壳体模型

2.1. Eringen 的非局部弹性理论本构关系

在 Eringen 的非局部弹性模型^[23]中,弹性体内某一参考点 x 的应力不仅取决于 x 点的应变而且与体内所有其他各点的应变有关,这与晶格动力学的原子理论以及实验观察到的声子传播结果相一致。最常用的非局部弹性本构方程是对整个问题域积分的形式,积分中含有表示某一点的应力受其他点应变相对影响的核函数。如果忽略 x 以外的点处的应变对 x 点处的应力的影响就可得到经典的弹性理论。

对于均匀各向同性的弹性体,本构方程为^[23]

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = D_0 \int_V g(|x' - x|, \tau) \boldsymbol{\epsilon}(x') dV(x'), \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}(x)$ 指的是在 x 处的非局部应力张量, D_0 是经典各向同性弹性刚度张量, “ \int ” 为双点积, 而 $\boldsymbol{\epsilon}(x')$ 是弹性体内任意点 x' 处的应变张量。核函数 $g(|x - x'|, \tau)$ 是非局部模量, 其中 $|x - x'|$ 是欧几里得空间距离, $\tau = e_0 a/l$, 这里 e_0 是与每种材料相对应的常数, a 是内部特征长度(如 C—C 键长, 晶格长度, 颗粒间距), 而 l 是外部特征长度(如裂纹长度, 波长等)。方程(1)的体积积分域为整个弹性体。 e_0 的值需要由实验来获得或者通过原子晶格动力学与平面波传播曲线相比较来得到。

因为涉及到空间积分,用数学方法对本构方程(1)的积分来得到非局部弹性问题的解很困难, Eringen^[23]将一些核的积分方程恰当地转化为等效微分方程,这就大大简化了非局部弹性理论并给它的应用带来很大方便。采用如下的核函数形式^[23]

$$\alpha(|x - x'|, \tau) = (2\pi l^2 \tau^2)^{-1} K_0 \left(\frac{\sqrt{x \cdot x'}}{l\tau} \right), \quad (2)$$

方程中 K_0 是贝塞尔修正函数。以(2)式作为核函数可以得到

$$(1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) \boldsymbol{\sigma} = D_0 : \boldsymbol{\epsilon}. \quad (3)$$

2.2. 圆柱壳的基本方程

单层圆柱薄壁壳(半径为 R 、厚度为 h)在外载荷作用下产生微小弹性变形,我们采用如下假设:变形前垂直于中曲面的直法线,变形后仍保持为直线,

并垂直于变形后的中面,同时其长度仍保持不变,垂直于中面的挤压应力较小,由它所产生的应变可忽略不计,壳体材料是均匀、各向同性的弹性材料。

建立如图 1 所示的坐标系,坐标原点在壳中面, α 方向与圆柱母线平行, β 方向与圆弧相切, γ 方向与中面垂直。在空间正交曲线坐标系中,弹性体在变形后,沿坐标 α, β, γ 方向的位移分别为 u_1, u_2, u_3 , 正应变为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, 正应力为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。根据假设,应该有 $\epsilon_3 = 0, \epsilon_{31} = \epsilon_{23} = 0$ 。

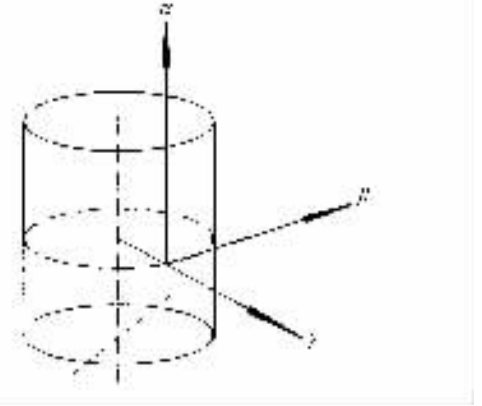


图 1 壳体模型

1) 壳体的非局部主应力方程为^[23]

$$\sigma_1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \alpha^2} = \frac{E}{1 - \nu} [(\epsilon_1 + \nu \epsilon_2)], \quad (4a)$$

$$\sigma_2 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_2}{R^2 \partial \theta^2} = \frac{E}{1 - \nu} [(\epsilon_2 + \nu \epsilon_1)], \quad (4b)$$

$$\sigma_{12} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta^2} \right) = \frac{E}{2(1 - \nu)} \epsilon_{12} \quad (4c)$$

式中 E, ν 分别为材料的弹性模量和泊松比。为了简便起见,假设 $\partial \sigma_1 / \partial \beta = \partial \sigma_2 / \partial \alpha = 0$, 当小尺度参数 $a = 0$ 时可得到经典的壳体的主应力方程。

2) 壳体的几何方程为^[24]

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^0 + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha},$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_2^0 + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{u_3}{R},$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right], \quad (5)$$

式中 $\epsilon_1^0, \epsilon_2^0$ 分别为屈曲前的初应变。

3) 壳体的物理方程为

$$N_1 = \sigma_1 h, N_2 = \sigma_2 h, N_{12} = \sigma_{12} h. \quad (6)$$

将(6)式代入(4)式得

$$N_1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial \alpha^2} = \kappa (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2), \quad (7a)$$

$$N_2 - (e_0 a)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 N_2}{\partial \theta^2} = \kappa(\epsilon_2 + \nu \epsilon_1), \quad (7b)$$

$$N_{12} - (e_0 a)^2 \left[\frac{\partial^2 N_{12}}{\alpha^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta^2} \right] = \kappa(1 - \nu) \epsilon_{12}, \quad (7c)$$

式中 $\kappa = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$, N_1, N_2, N_{12} 分别是在中面上沿 α, β 方向的轴力和平错力.

由正应力和剪应力产生的矩 M_1, M_2, M_{12} , 它们的大小与应力到中面的距离成正比, 即

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \gamma d\gamma, \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \gamma d\gamma, \\ M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \gamma d\gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

利用(4)式和(8)式得到

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\alpha^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_1}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -D \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} + N \frac{\partial^2 u_3}{\alpha^2} \right) \\ &+ (e_0 a)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= -D(1 - \nu) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \theta} \\ &+ (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 M_{12}}{\alpha^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial \theta^2} \right), \end{aligned} \quad (9c)$$

式中 D 为有效壳体弯曲刚度,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (10)$$

4) 单壁碳纳米管的平衡方程

在建立平衡方程时忽略中面外的弯曲内力 Q_1 ,

Q_2 对中面内平衡方程 $\sum F_\alpha = 0, \sum F_\beta = 0$ 的影响, 并略去体积力的微小影响, 可得

$$\sum F_\alpha = 0: \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} = 0, \quad (11a)$$

$$\sum F_\beta = 0: \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} = 0, \quad (11b)$$

$$\sum M_\alpha = 0: \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - Q_2 = 0, \quad (11c)$$

$$\sum M_\beta = 0: \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} - Q_1 = 0. \quad (11d)$$

由 $N_1, N_2, N_{12}, Q_1, Q_2, N_\gamma$ 向 γ 轴投影, 可得大挠度

薄壳在变形状态下的平衡方程 $\sum F_\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} &N_1 \left(k_1 + \frac{\partial^2 u_3}{\alpha^2} \right) + N_2 \left(k_2 + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ 2N_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \theta} + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} \\ &+ \frac{1}{R} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} + N_\gamma = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 N_γ 为壳体所受法向载荷集度, 以朝向曲率中心的 γ 轴为正, 对于半径为 R 的圆柱壳, $k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{R}$.

将(9)式代入(11)式的后两式, 可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= -D \left(\frac{\partial^3 u_3}{\alpha^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \theta^2 \partial \alpha} \right) + (e_0 a)^2 \\ &\times \left[\frac{\partial^3 M_1}{\alpha^3} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 M_{12}}{\alpha^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 M_{12}}{\partial \theta^3} \right) \right], \\ Q_2 &= -D \left(\frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \theta} \right) + (e_0 a)^2 \\ &\times \left[\frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 M_2}{\partial \theta^3} + \left(\frac{\partial^3 M_{12}}{\alpha^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 M_{12}}{\partial \theta^2 \partial \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

引入应力函数 φ , 使

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{h} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{h} = \frac{\partial^2 \varphi}{\alpha^2}, \\ \sigma_{12} &= \frac{N_{12}}{h} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \theta}. \end{aligned} \quad (14)$$

将(14)式代入(11a)(11b)式中, 能自然满足; 将(14)(13)式代入(12)式可得

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla_R^4 u_3 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 u_3}{\alpha^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \\ &- 2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \theta} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\alpha^2} \\ &- \frac{D(e_0 a)^2}{h} \left[\frac{\partial^6 u_3}{\alpha^6} + \frac{1}{R^6} \frac{\partial^6 u_3}{\partial \theta^6} \right. \\ &\left. + \frac{(2 - \nu)}{R^2} \left(\frac{\partial^6 u_3}{\alpha^4 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^6 u_3}{\partial \theta^4 \partial \alpha^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\nabla_R^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\alpha^2}$, 并取载荷集度 $N_\gamma = 0$. (15)

式也可写为

$$\begin{aligned} &\frac{D}{h} \nabla_R^4 u_3 + \sigma_1 \frac{\partial^2 u_3}{\alpha^2} + \frac{1}{R^2} \sigma_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \\ &+ 2 \frac{1}{R} \sigma_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\alpha^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{D e_0 a}{h} \left[\frac{\partial^6 u_3}{\partial \alpha^6} + \frac{1}{R^6} \frac{\partial^6 u_3}{\partial \theta^6} + \frac{(2-\nu)}{R^2} \left(\frac{\partial^6 u_3}{\partial \alpha^4 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^6 u_3}{\partial \theta^4 \partial \alpha^2} \right) \right] = 0, \quad (16)$$

式中, φ 为壳体到达临界状态时与弯曲情况有关的应力函数, 当小尺度因子 $a=0$ 时, 上式为经典的圆柱壳体的稳定性方程.

圆柱壳体中面应变连续性方程, 略去非线性项后为

$$\frac{1}{E} \nabla_R^4 \varphi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2}. \quad (17)$$

利用(17)式并将(16)式进行 ∇_R^4 的运算, 消去应力项 φ , 可得

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h} \nabla_R^8 u_3 + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + \sigma_1 \nabla_R^4 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} \right) \\ & + \sigma_2 \frac{1}{R} \nabla_R^4 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) + 2\sigma_{12} \nabla_R^4 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \theta} \right) \\ & + \frac{D e_0 a}{h} \nabla_R^4 \xi = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{\partial^6 u_3}{\partial \alpha^6} + \frac{1}{R^6} \frac{\partial^6 u_3}{\partial \theta^6} \\ & + \frac{(2-\nu)}{R^2} \left(\frac{\partial^6 u_3}{\partial \alpha^4 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^6 u_3}{\partial \theta^4 \partial \alpha^2} \right). \end{aligned}$$

我们引入

$$\delta = \frac{\bar{p}}{p_{cr}} \quad (19)$$

来说明小尺度效应对单壁碳纳米管轴向受压发生屈曲的影响, 式中 \bar{p} 为考虑小尺度影响时的单壁碳纳米管无量纲轴向屈服压力, p_{cr} 为经典理论导出的单壁碳纳米管无量纲轴向屈服临界压力.

3. 算例

设纳米管两端简支, 则它的弯曲模型为

$$u_3 = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin(c_m \alpha) \cos(g_n R \theta), \quad (20)$$

式中, $c_m = m\pi/L$, $g_n = n/R$, $m=1, 2, 3, \dots$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$, L 为碳纳米管长度.

对于受轴向载荷的薄壁碳纳米管, 设壳体处于前屈曲阶段, 并假设其内部存在一个无矩应力状态, 压力时取正号, 因为初应力远大于屈服产生的应力, 因此计入曲面内的初应力, 忽略由于屈服产生的应力

$$\sigma_1^0 = p, \sigma_2^0 = 0, \sigma_{12}^0 = 0. \quad (21)$$

将(20)(21)式代入(18)式得到

$$\begin{aligned} p = & \frac{D(c_m^2 + g_n^2)^2}{h c_m^2} + \frac{E}{R^2} \frac{c_m^2}{(c_m^2 + g_n^2)^2} \\ & - \frac{D e_0 a}{h} \left[c_m^4 + \frac{g_n^6}{c_m^2} + (2-\nu) [c_m^2 g_n^2 + g_n^4] \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

设无量纲的载荷为

$$\begin{aligned} \bar{p} = & \frac{pR}{Eh} \\ = & \frac{h/R}{1\chi(1-\nu^2)} \frac{n^2(1+\psi^2)}{\psi^2} + \frac{R}{h} \frac{\psi^2}{n^2(1+\psi^2)^2} \\ & - \frac{e_0^2 h a^2 / R^3}{1\chi(1-\nu^2)} n^4 \left[\psi^4 + \frac{1}{\psi^2} + (2-\nu)\chi(\psi^2+1) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\psi = m\pi R/nL$.

不考虑小尺度影响的经典壳体理论得出的单壁碳纳米管轴向受压的无量纲临界屈曲应力^[25]为

$$\bar{p}_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\chi(1-\nu^2)}}. \quad (24)$$

由(19)式得

$$\begin{aligned} \delta = \frac{\bar{p}}{p_{cr}} = & 1 - \frac{(e_0 a)^2 h^2 n^4 \sqrt{\chi(1-\nu^2)}}{1\chi(1-\nu^2) R^4} \\ & \times \left[\psi^4 + \frac{1}{\psi^2} + (2-\nu)\chi(\psi^2+1) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

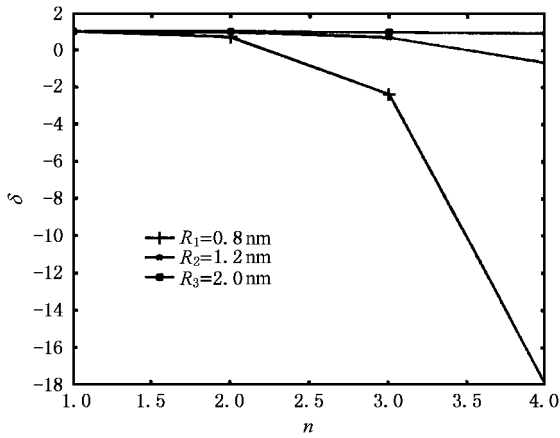
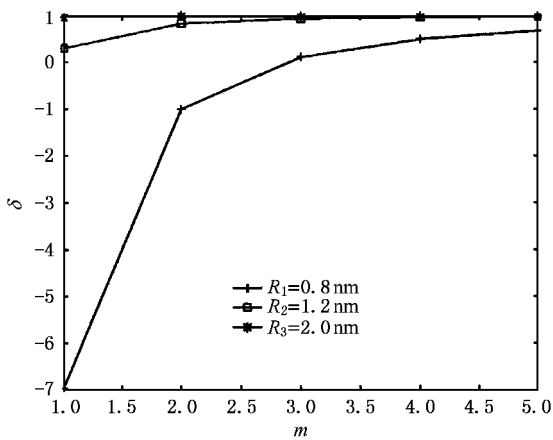
δ 的值反映了小尺度效应对单壁碳纳米管轴向受压发生屈曲的影响, δ 的值越远离 1, 那么小尺度效应越大, 从以下几个方面加以说明.

1) 管径 R 分别取 $R_1 = 0.8 \times 10^{-9} \text{ m}$, $R_2 = 1.2 \times 10^{-9} \text{ m}$, $R_3 = 2.0 \times 10^{-9} \text{ m}$, $e_0 = 0.39$ ^[23], $h = 0.34 \times 10^{-9} \text{ m}$ ^[26], C—C 键长 $a = 0.142 \times 10^{-9} \text{ m}$, $\nu = 0.26$ ^[27], $m=2$, $L = 30 \times 10^{-9} \text{ m}$, 计算说明 n 与 δ 的关系.

我们编制了程序, 画出了 $n-\delta$ 的关系图线, 如图 2 所示. 由图 2 可看出, 当管径一定时, n 值越大, δ 值越远离 1, 所以小尺度效应随 n 值的增大而愈明显, 而当 n 值相同时, 管径越小, δ 值越远离 1, 小尺度效应越明显.

2) 管径 R 分别取 $R_1 = 0.8 \times 10^{-9} \text{ m}$, $R_2 = 1.2 \times 10^{-9} \text{ m}$, $R_3 = 2.0 \times 10^{-9} \text{ m}$, $h = 0.34 \times 10^{-9} \text{ m}$, $n=3$, $e_0 = 0.39$, C—C 键长 $a = 0.142 \times 10^{-9} \text{ m}$, $\nu = 0.26$, $L = 30 \times 10^{-9} \text{ m}$, 计算说明 m 与 δ 的关系.

我们编制了程序, 画出了 $m-\delta$ 的关系图线, 如图 3 所示. 由图 3 可看出, 当管径一定时, m 值越大, δ 值越接近 1, 所以小尺度效应随 m 值的增大而

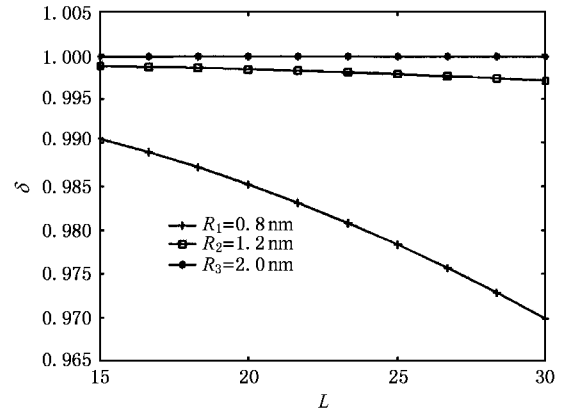
图 2 δ - n 的关系曲线图 3 δ - m 的关系曲线

减弱,而当 m 值相同时,管径越小, δ 值越远离 1,小尺度效应越明显。

3) 管径 R 分别取 $R_1 = 0.8 \times 10^{-9} \text{ m}$, $R_2 = 1.2 \times 10^{-9} \text{ m}$, $R_3 = 2.0 \times 10^{-9} \text{ m}$, $e_0 = 0.39$, $h = 0.34 \times 10^{-9} \text{ m}$, $n = 2$, $m = 5$, C—C 键长 $a = 0.142 \times 10^{-9} \text{ m}$, $\nu = 0.26$, 计算说明 L 与 δ 的关系。

我们编制了程序,画出了 L - δ 的关系图线,如图

4 所示。由图 4 可看出,在管径一定的条件下,随着 L 值的增大, δ 值越远离 1,所以小尺度效应随 L 值的增大而愈明显;而当 L 值相同时,管径越小, δ 值越远离 1,小尺度效应越明显。

图 4 δ - L 的关系曲线

4. 结 论

通过上述公式的推导和算例的计算结果,我们可以得出以下结论:

1. 当其他条件给定时,小尺度效应随 n 值的增大而愈明显;
2. 当其他条件给定时,小尺度效应随 m 值的增大将减弱;
3. 当其他条件给定时,小尺度效应随管径 R 值的减小而愈明显;
4. 由(25)式可看出 $\delta < 1$,用经典的壳模型由于没有考虑小尺度效应影响而导致碳纳米管轴向屈曲临界压力值偏高;
5. 碳纳米管的半径大于 2nm 时,随着管径的增大, δ 值向 1 趋近,小尺度效应将逐渐消失;
6. 当其他条件给定时,小尺度效应随 L 值的增大而表现愈明显。

[1] Ebbesen T W 1994 *Carbon nanotubes*. *Annu. Rev. Mater. Sci.* **24** 235

[2] Dresselhaus M S, Dresselhaus G and Eklund P C 1996 *Science of fullerenes and carbon nanotubes* (Academic Press, San Diego)

[3] Maiti A 2000 *Chem. Phys. Lett.* **331** 21

[4] Cohen M L 2001 *Mater. Sci. Eng.* **15** 1

[5] Qian D, Wagner G J, Liu W K, Yu M F and Ruoff R S 2002 *Appl. Mech. Rev.* **55** 495

[6] Vaia R A, Tolle T B, Schmitt G F, Imeson D and Jones R J 2001 *SAMPE J.* **37**(6) 24

[7] Maruyama B and Alam K 2002 *SAMPE J.* **38**(3) 59

[8] Kahn C L and Mele E J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 1932

- [9] Maiti A , Svizhenko A and Anantram M P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 126805-1
- [10] Yakobson B I , Brabec C J and Bernholc J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2511
- [11] Lu J P 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1297
- [12] Wong E W , Sheehan P E and Lieber C M 1997 *Science* **277** 1971
- [13] Harris P J F 1999 *Carbon Nanotubes and Related Structures* (Cambridge University Press , Cambridge , MA)
- [14] Saito R , Dresselhaus G and Dresselhaus M S 1998 *Physical Properties of Carbon Nanotubes* (Imperial College Press , London .)
- [15] Krishnam A , Dujardin E , Ebbesen T , Yianilos P N and Treacy M M J 1998 *Phys. Rev. B* **58** 14043
- [16] Lourie O , Cox P M and Wagner H D 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1638
- [17] Govindjee S and Sackman J L 1999 *Solid State Commun.* **110** 227
- [18] Yoon J , Ru C Q and Mioduchowski A 2003 *Composites Science and Technology* **63** 1533
- [19] Eringen A C 1972 *Int. J. Eng. Sci.* **10** 1
- [20] Eringen A C and Edelen D G B 1972 *Int. J. Eng. Sci.* **10** 233
- [21] Peddieson J , Buchanan R and McNitt R P 2003 *Int. J. Eng. Sci.* **41** 305
- [22] Sudak L J 2003 *J. Appl. Phys.* **94** 7281
- [23] Eringen A C 1983 *J. Appl. Phys.* **54** 4703
- [24] Donnell L H 1976 *Beams , Plates , and Shells* .(McGraw-Hill , New York .)
- [25] Cheng X S 1989 *Application of Plates and Shells* (Science and Technology Press)p531—557(in Chinese) 成祥生 1989 应用板壳理论(科学技术出版社)第 531—557 页]
- [26] Iijima S , Brabec C ,Maiti A and Bernholc J J 1996 *Chem. Phys.* **104** 2089
- [27] Hernandez E ,Goze C ,Bernier P and Rubio A 1998 *Physical Review Letters* **80** 4502

Buckling of a single wall carbon nanotube under an axial pressure based on the nonlocal elastic theory^{*}

Xie Gen-Quan^{1,2)} Han Xu²⁾ Long Shu-Yao¹⁾ Tian Jian - Hui^{1,2)}

¹⁾(Department of Engineering Mechanics ,Hunan University , Changsha 410082 ,China)

²⁾(Key Laboratory of Advanced Technology for Vehicle Body Design & Manufacture , Ministry of Education , Hunan University , Changsha 410082 , China)

(Received 18 November 2004 ; revised manuscript received 26 January 2005)

Abstract

A shallow shell model is developed for the elastic buckling of a single wall carbon nanotube under a uniform external axial pressure by using the nonlocal elastic theory. Effects of the small size scale are incorporated in the formulation. Critical conditions are given under the axial buckling pressure for a single-wall carbon nanotube. Influences of the small size scale on the axial buckling pressure are found. It is concluded that the axial buckling pressure for a carbon nanotube could be overestimated by the classic shell model without considering the effect of the small size scale.

Keywords : nonlocal elasticity , carbon nanotube , small size effect , axial bucking

PACC : 4600 , 4620 , 4630

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372031).