

长程作用下 Gauss 系统的临界温度*

王春阳¹⁾ 孔祥木^{1)†}

¹⁾ (曲阜师范大学物理系, 曲阜 273165)

¹⁾ (中国科学院交叉学科理论研究中心, 北京 100080)

(2004 年 12 月 10 日收到, 2005 年 1 月 18 日收到修改稿)

利用傅里叶变换的方法, 严格求解了 d 维 ($d=1, 2$ 和 3) 超立方晶格和二维三角晶格上具有长程相互作用的 Gauss 模型(这里考虑的长程作用有幂指数、指数和对数三种形式), 得到了这些情况下系统的临界点(温度), 并对不同形式的长程作用对临界点的影响进行了比较. 结果表明, 长程相互作用的存在, 使得系统的临界温度有了一定程度的升高, 它们对系统临界温度的影响与其衰减的快慢有关.

关键词: Gauss 模型, 临界点, 超立方晶格, 三角晶格

PACC: 7540D, 3420F, 0570J

1. 引 言

Gauss 模型是一种自旋可以连续取值的模型^[1]. 由于自旋分布的特殊性, Gauss 自旋系统容易严格求解, 因此对于研究相变的普适性具有重要的意义. 几十年来人们对 Gauss 模型进行了较多的研究, 对于平移对称晶格上的这种模型, 早已求得了其精确解^[2-4]. 近几年, 人们又对分形晶格上的这种模型进行了研究, 发现其临界点都具有相同的数学表达式^[5-9]. 在以前的这些研究中主要考虑了晶格中的最近邻相互作用. 我们知道, 研究长程作用系统的相变问题也具有重要的意义. 最近, 我们研究了按 $r^{-\alpha}$ (r 为系统中任意两格点间的距离, α 为一大于零的常数) 规律衰减的长程相互作用下 Gauss 系统的相变问题, 求出了其临界点和动力学临界指数^[10]. 本文利用傅里叶变换的方法, 严格求解了 d 维 ($d=1, 2$ 和 3) 超立方晶格上和二维三角晶格上具有长程相互作用的 Gauss 自旋系统, 这里考虑的长程作用为分别按指数和对数衰减的两种形式. 还研究了二维三角晶格上的 Gauss 系统在 $r^{-\alpha}$ 形式的长程相互作用下的情况. 求得了这些情况下系统的临界点(温度). 结果表明, 长程相互作用下系统的临界温度高于只考虑最近邻作用时的临界温度, 不同形式的长

程作用对系统临界温度的影响大小也不相同.

2. 临界温度

考虑一晶格上的 Gauss 自旋系统. 在晶格的格点 m 上放置一个自旋 σ_m , σ_m 按概率分布

$$P(\sigma_m) \propto \exp\left(-\frac{b}{2}\sigma_m^2\right) \quad (1)$$

取 $(-\infty, +\infty)$ 之间的任何实数. 在不考虑外磁场的情况下, 系统的有效哈密顿量可以写为^[10]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{m,n} K(r_{mn}) \sigma_m \sigma_n - \frac{b}{2} \sum_m \sigma_m^2. \quad (2)$$

这里的 b 称为 Gauss 分布常数; $K(r_{mn}) = J(r_{mn})/(k_B T)$ 为简化的格点自旋间相互作用参量, $K(r_{mn}) > 0$ 对应于铁磁情况; $J(r_{mn})$ 是格点 m 和 n 上自旋间的交换积分, 在考虑长程作用的情况下它的取值不再是一个常数, 而是与相互作用的距离有关的一个量; r_{mn} 表示从格点 n 到格点 m 的位置矢量的大小; k_B 为玻尔兹曼常数, T 为热力学温度; 对 m 和 n 的求和遍及系统中所有的格点.

由(2)式可以看到, 系统的哈密顿量是关于 σ_m 的二次型, 可以通过傅里叶变换化成平方和的形式^[10]

$$H = -\frac{1}{2\Gamma A} \sum_q (b - K(q)) |\sigma_q|^2. \quad (3)$$

* 曲阜师范大学科研基金资助的课题.

† E-mail: kongxm668@163.com

这里 $\Gamma = NA$ 为总体积, N 为原胞总数, $K(q)$ 是 $K(r_{mn})$ 的傅里叶变换

$$K(q) = \sum_{r_{mn}} K(r_{mn}) e^{iq \cdot r_{mn}}, \quad (4)$$

由(3)式可以求出系统的配分函数和自由能分别为^[10]

$$Z = \left(\frac{b}{2\pi}\right)^{N/2} \prod_q \left[\frac{2\pi\Gamma A}{b - K(q)} \right]^{1/2} \quad (5)$$

和

$$F = \frac{1}{2} k_B T \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_q \ln(b - K(q)) + T \cdot C, \quad (6)$$

(C 为常数).

显然,在(6)式中, $b < K(q)$ 时无意义. 根据相变理论, 系统的临界点由自由能 F 的奇异性来决定, 即由

$$K_{\max}(q) = b \quad (7)$$

决定. 以下将这一关系分别应用于超立方晶格和二维三角晶格上的 Gauss 自旋系统, 求解几种情况下系统的相变点.

3. 超立方晶格和三角晶格

3.1. 一维长程 Gauss 链

首先以一维情况为例, 考虑具有长程相互作用的 Gauss 系统. 设系统中两自旋间的作用形式为

$$J(r_{mn}) = J_1 e^{-\left(\frac{r_{mn}}{a} - 1\right)\alpha} \equiv J_1 e^{-(|m-n|-1)\alpha}, \quad (8)$$

其中 a 为晶格常数, J_1 为最近邻格点自旋间的交换积分. 取 $n=0$ 为坐标原点, 容易得出

$$K(r_{mn}) = K(x_m) = \frac{J_1}{k_B T} e^{-(|m-1|\alpha)} = K_1 e^{-(|m-1|\alpha)}, \quad (9)$$

利用(4)式求出其傅里叶变换为

$$K(q) = \sum_{x_m} K(x_m) e^{iqx_m} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{e^{(m-1)\alpha}} \cos(qma), \quad (10)$$

令 $q=0$ 即得 $K(q)$ 的最大值为

$$K_{\max}(q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{e^{(m-1)\alpha}} = \frac{2K_1}{1 - e^{-\alpha}}. \quad (11)$$

在上式中当 $\alpha \leq 0$ 时级数不收敛, 不满足物理上的要求, 故 α 应为一大于零的数. 由(7)式可得系统的临界点由 $K_{1C} = \frac{b}{2}(1 - e^{-\alpha})$ 决定, 这里 K_{1C} 为系统处在临界点时 K_1 的值. 可以看出, 随 α 的增大, K_{1C} 的值逐渐增大, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, 可得 $K_{1C} = b/2$, 这

对应于只考虑最近邻作用的情况.

下面我们再来研究另外一种长程作用的情况, 设

$$J(r_{mn}) = J_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{r_{mn}}{a}\right) \ln^2\left(\frac{r_{mn}}{a}\right)\right)^{-1}, \quad (12)$$

容易得出

$$K(r_{mn}) = K(x_m) = K_1 (1 + \alpha |m| \ln^2 |m|), \quad (13)$$

利用(4)式求出其傅里叶变换为

$$K(q) = \sum_{x_m} K(x_m) e^{iqx_m} = 2K_1 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \alpha m \ln^2 m} \cos(qma), \quad (14)$$

$K(q)$ 的最大值为

$$K_{\max}(q) = 2K_1 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \alpha m \ln^2 m}. \quad (15)$$

这里同样要求 α 取大于零的数. 利用(7)式可以求出系统处于临界点时 K_{1C} 与 α 的关系, 如图1所示, 其中曲线 a 和 b 分别是指数形式的长程作用和对数形式长程作用的结果. 比较图中的两条曲线, 可以看出, 这时 K_{1C} 比较缓慢的趋向于 $b/2$. 按照一般的定义, 由于指数衰减的很快, 因此, 第一种相互作用本质上应属于短程相互作用, 第二种形式的作用才是真正的长程相互作用.

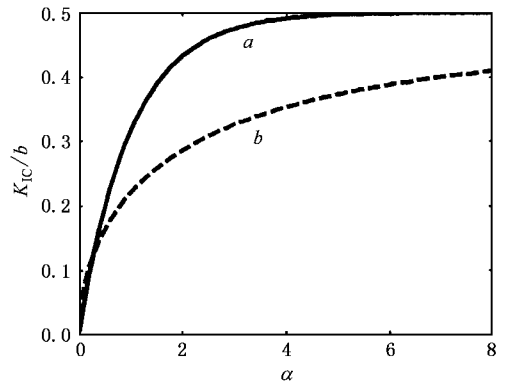


图1 长程作用下一维 Gauss 链上 K_{1C}/b 与 α 的关系(曲线 a 和 b 分别是指数形式的长程作用和对数形式长程作用的结果)

3.2. 二维系统

我们再来研究二维系统. 首先考虑 $J(r_{mn}) = J_1 e^{-\left(\frac{r_{mn}}{a} - 1\right)\alpha}$ 的情况. 对于二维正方晶格, 任意选取系统中一个格点位置作为坐标原点, 建立直角坐标系, 其余格点到原点的距离可统一表示为 $r_{mn} =$

$\sqrt{m^2 + n^2} a$, 相应的格点自旋间相互作用参量可以表示为 $K(r_{mn}) = K_1 e^{-\alpha(\sqrt{m^2 + n^2} - 1)}$; $m = 0$ 或 $n = 0$ 对应于坐标轴上的格点, 它们到原点的距离可以简化为 $r_{mn} = |m| a$, 对应的格点自旋间相互作用参量的形式与一维情况相同, 即 $K(r_{mn}) = K_1 e^{-(|m|-1)\alpha}$. 这样可以得到 $K(r_{mn})$ 的傅里叶变换 $K(q)$, 并进而求出 $K(q)$ 的最大值

$$K_{\max}(q) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} \frac{4K_1}{e^{\alpha(\sqrt{m^2 + n^2} - 1)}} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4K_1}{e^{(m-1)\alpha}} \quad (16)$$

对于相互作用按

$$J(r_{mn}) = J_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{r_{mn}}{a} \right) \ln^2 \left(\frac{r_{mn}}{a} \right) \right)^{-1}$$

规律变化的情况, 可以作类似分析得出 $K(q)$ 的最大值为

$$K_{\max}(q) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} \frac{4K_1}{1 + \alpha \sqrt{m^2 + n^2} \ln^2 \sqrt{m^2 + n^2}} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4K_1}{1 + \alpha m \ln^2 m} \quad (17)$$

由(16)(17)和(7)式即可确定出系统的临界点. 为直观起见我们把 K_{1C} 随 α 的变化情况示于图 2

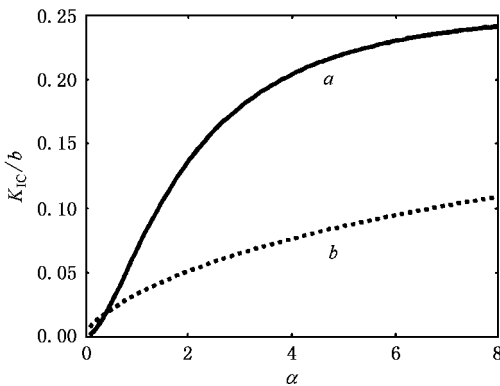


图 2 二维正方晶格上 Gauss 系统中 K_{1C}/b 与 α 的关系(其中 a 和 b 分别对应于指数形式长程作用和对数形式的长程作用)

$$K_{\max}(q) = \sum_{\substack{m, n=2j \\ \text{或 } 2j+1}}^{+\infty} \frac{4K_1}{1 + \alpha \sqrt{(m/2)^2 + (\sqrt{3}n/2)^2} \ln^2 \sqrt{(m/2)^2 + (\sqrt{3}n/2)^2}} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{1 + \alpha m \ln^2 m} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{1 + \alpha \sqrt{3}n \ln^2(\sqrt{3}n)} \quad (21)$$

在超立方晶格上 $J(r_{mn}) = J_1 \left(\frac{r_{mn}}{a} \right)^{-\alpha}$ 形式的长程相互作用已经讨论^[10]. 结合前面的分析很容易

中, a 和 b 两曲线分别对应于指数形式和对数形式长程作用的结果. 与一维情况相比较可以看到, K_{1C} 随 α 的增大较缓慢的趋近于 $b/4$ (只考虑最近邻作用时的值), 说明二维系统中长程作用对临界点的影响更加明显.

下面考虑引入长程相互作用后二维三角晶格上的 Gauss 系统. 先考虑两格点自旋间的交换积分按 $J(r_{mn}) = J_1 e^{-\left(\frac{r_{mn}}{a} - 1\right)\alpha}$ 规律衰减的情况. 这时晶格类型的变化只影响到了相互作用的距离. 对三角晶格, 同样建立直角坐标系, 系统中任意格点到原点的距离可表示为以下形式: 当格点不在坐标轴上时

$$r_{mn} = \sqrt{(m/2)^2 + (\sqrt{3}n/2)^2} a,$$

$$\text{其中 } m, n = 2j \text{ 或 } 2j + 1 (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (18)$$

如果格点位于坐标轴上则可以简化为

$$r_{mn} = \begin{cases} |m| a & n = 0, \\ \sqrt{3} |n| a & m = 0. \end{cases} \quad (19)$$

把 r_{mn} 的值代入式 $K(r_{mn}) = J(r_{mn}) / (k_B T)$ 中求出 $K(r_{mn})$ 的表达式, 然后作傅里叶变换可求出 $K(q)$ 的最大值为

$$K_{\max}(q) = \sum_{\substack{m, n=2j \\ \text{或 } 2j+1}}^{+\infty} \frac{4K_1}{\exp[\alpha(\sqrt{(m/2)^2 + (\sqrt{3}n/2)^2} - 1)]} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{e^{(m-1)\alpha}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{e^{(\sqrt{3}n-1)\alpha}}, \quad (20)$$

这里(20)式中的 j 只需取大于或等于零的整数(以下同).

对于交换积分按

$$J(r_{mn}) = J_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{r_{mn}}{a} \right) \ln^2 \left(\frac{r_{mn}}{a} \right) \right)^{-1}$$

规律变化的情况, 用同样方法可得 $K(q)$ 的最大值, 这里只给出最后的结果

求解在这种形式的长程作用下二维三角晶格上的 Gauss 系统. 我们求出的 $K_{\max}(q)$ 的表达式为

$$K_{\max}(\mathbf{q}) = \sum_{\substack{m, n=2j \\ \text{或 } 2j+1}}^{+\infty} \frac{4K_1}{(\sqrt{(m/2)^2 + (\sqrt{3}n/2)^2})^\alpha} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{m^\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2K_1}{(\sqrt{3}n)^\alpha}. \quad (22)$$

可以证明,这时为了保证级数收敛,要求 $\alpha > 2$. 同样再利用(7)式可求出系统的临界点. 为分析方便,我们把二维三角晶格上的 Gauss 系统在以上三种长程相互作用下 K_{1C} 与 α 的关系示于图 3 中(a, b, c 三条曲线分别对应指数、幂指数和对数三种形式的长程作用). 从图中不难看出各种形式的长程作用对系统临界点的影响. 对于在二维三角晶格上的 Gauss 系统, K_{1C} 随 α 的增大趋近于只考虑最近邻相互作用时的值 $b/6$.

$$K_{\max}(\mathbf{q}) = \sum_{m, n, l=1}^{+\infty} \frac{8K_1}{1 + \alpha \sqrt{m^2 + n^2 + l^2} \ln^2 \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{6K_1}{1 + \alpha m \ln^2 m}. \quad (24)$$

由(23)(24)和(7)式同样可以求出系统在临界点时 K_{1C} 与 α 的关系,见图 4,其中曲线 a 对应指数形式的长程作用,曲线 b 对应对数形式的长程作用. 可以看到,在这两种不同形式的长程相互作用下, K_{1C} 随 α 的变化情况明显不同. 对于长程作用按 $\mathcal{J}(r_{mn}) = J_1 e^{-(\frac{r_{mn}}{a}-1)^\alpha}$ 形式变化的系统, K_{1C} 很快地趋向于只考虑最近邻作用时的结果 $b/6$, 而对于在 $\mathcal{J}(r_{mn}) = J_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{r_{mn}}{a}\right) \ln^2 \left(\frac{r_{mn}}{a}\right)\right)^{-1}$ 形式的长程作用下的系统, K_{1C} 非常缓慢地趋向于 $b/6$. 说明这种含有对数项的长程相互作用对系统临界温度的影响比较大.

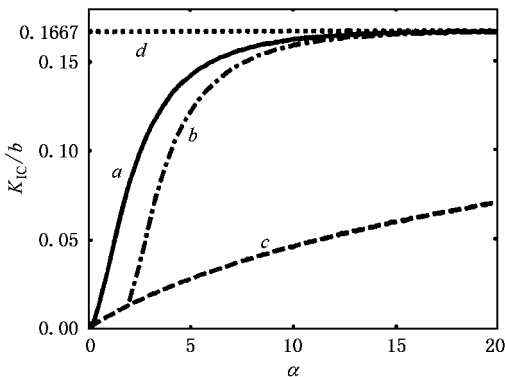


图 3 三角晶格上 Gauss 系统的 K_{1C}/b 与 α 的关系(a, b, c 三条曲线分别对应于指数、幂指数和对数三种形式的长程作用,点线 d 示出了只考虑最近邻作用时 K_{1C}/b 的值)

3.3. 三维立方晶格上的结果

三维立方晶格上 Gauss 系统的临界点可以类似分析得出,为简单起见这里仅给出 $K_{\max}(\mathbf{q})$ 的最后结果:当长程作用的形式为 $\mathcal{J}(r_{mn}) = J_1 e^{-(\frac{r_{mn}}{a}-1)^\alpha}$ 时,

$$K_{\max}(\mathbf{q}) = \sum_{m, n, l=1}^{+\infty} \frac{8K_1}{\exp[\alpha(\sqrt{m^2 + n^2 + l^2} - 1)]} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{6K_1}{e^{(m-1)\alpha}} \quad (23)$$

而长程作用按 $\mathcal{J}(r_{mn}) = J_1 \left(1 + \alpha \left(\frac{r_{mn}}{a}\right) \ln^2 \left(\frac{r_{mn}}{a}\right)\right)^{-1}$ 规律变化时,

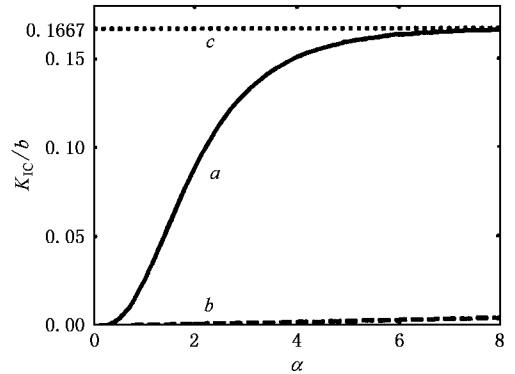


图 4 三维立方晶格上 Gauss 系统的 K_{1C}/b 与 α 的关系(a, b 两曲线分别对应于指数和对数形式的长程作用,点线 c 示出了只考虑最近邻作用时 K_{1C}/b 的值)

4. 结论和讨论

利用傅里叶变换的方法,严格求解了考虑长程作用后的 Gauss 系统,得到了几种情况下系统的临界点. 所得结果表明,长程相互作用的存在,使得系统的临界温度升高. 临界温度升高的程度反映出了不同形式的长程作用对系统临界性质的影响. 还可以看出,长程作用对临界温度的影响还与衰减因子 α 有关, α 的取值越小,即长程作用衰减的越慢,则系统中自旋间的相互关联程度就越强,长程作用对系统

临界温度的影响就越大. 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, $K_2 = K_3 = \dots = 0$ 系统的临界点由 $K_{1c} = b/z_q$ 决定(z_q 为配位数, 超立方晶格上格点的配位数为 $2d$, 二维三角晶格上格

点的配位数为 $3d = 6$), 问题又回到只考虑最近邻作用的情况, 即系统的临界温度决定于晶格中格点的配位数. 这与已有的结果是完全一致的^[3,4].

- [1] Berlin T H and Kac M 1952 *Phys. Rev.* **86** 821
 [2] Editorial Group of Quantum Statistical Physics 1987 *Quantum Statistical Physics* (Beijing :Peking University Press) p380—415 (in Chinese) 量子统计物理学编写组 1987 量子统计物理学(北京大学出版社 第 380—415 页)
 [3] Stanley H E 1985 *Prog. Phys.* **5** 1 (in Chinese) [Stanley H E 1985 物理学进展 **5** 1]
 [4] Reichl L E 1980 *A Modern Course in Statistical Physics* (Austin : University of Texas Press)
 [5] Li Y , Kong X M and Huang J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1346 (in Chinese) [李 英、孔祥木、黄家寅 2002 物理学报 **51** 1346]
 [6] Kong X M , Lin Z Q and Zhu J Y 2000 *Sci. Chin. A* **30** 661
 [7] Lin Z Q , Kong X M and Yang Z R 1999 *Physica A* **271** 118
 [8] Kong X M and Li S 2000 *Commun. Theor. Phys.* **33** 63
 [9] Li S and Yang Z R 1997 *Phys. Rev. E* **55** 6656
 [10] Kong X M and Yang Z R 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 913

Critical temperature of the Gauss system under long-range interactions *

Wang Chun-Yang¹⁾ Kong Xiang-Mu^{1,2)}

¹⁾ *Department of Physics , Qufu Normal University , Qufu 273165 , China*

²⁾ *Institute of Theoretical Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100080 , China*

(Received 10 December 2004 ; revised manuscript received 18 January 2005)

Abstract

Using the Fourier transformation method ,we accurately solved the Gauss Model with long-range interactions on the d -dimensional hyper-cubic lattices and the two-dimensional triangular lattices. The long-range interactions we considered here include power exponential decreasing ,exponential decreasing and natural logarithmic decreasing. At the same time the critical behavior of the Gauss Model with long-range interactions decaying as $r^{-\alpha}$ on two-dimensional triangular lattices is studied. The critical points of the system under these circumstances are calculated. According to the results we have obtained ,we can easily compare the effect of different types of long-range interactions on the critical behavior of the system. As will be seen ,for the existence of long-range interactions ,the critical temperature of the system rises to some extent. And the effect of the long-range interaction on the critical temperature depends on its decaying rate.

Keywords : Gauss model , critical point , hyper-cubic lattice , Triangular lattice

PACC : 7540D , 3420F , 0570J