

# 一类两维光学格子中稳定的复合孤子\*

董亮伟<sup>1)</sup> 叶芳伟<sup>1)</sup> 王建东<sup>1)</sup> 李永平<sup>1)2)†</sup>

<sup>1)</sup>中国科学技术大学物理系,合肥 230026)

<sup>2)</sup>中国科学技术大学结构分析开放实验室,合肥 230026))

(2005 年 1 月 12 日收到,2005 年 2 月 28 日收到修改稿)

对两维光学格子中非线性薛定谔方程一类新的稳态解做了数值分析,发现其在传播过程中逐渐衰变为一种稳定的复合孤子,孤子的两分量在传播过程中不断交换能量,总能量守恒.

关键词:稳态解,两维格子,孤子

PACC: 9430P, 4225, 4290

## 1. 引言

非线性波导格子中光束自捕获现象,特别是离散孤子的形成,在全光驱动、光开关、光通讯等方面有着广泛的应用前景,具有重要的理论意义和实用价值,成为近年来备受关注的研究热点之一<sup>[1,2]</sup>. 有效地控制这类系统的衍射属性为设计多种光子设备提供了广泛的可能性<sup>[3,4]</sup>. 横向特征尺度,即光束宽度与横向折射率调制周期之间的竞争引发了多种不同光束传播方案<sup>[5]</sup>.

光波在非线性周期性介质,如波导阵列中的传播显示出了均匀介质中所没有的、独特的动力学属性. 比如说,横向非周期性的 Kerr 介质中不能够稳定存在的孤子在周期性介质中可稳定传输,这是由于线性谱中存在的导带和禁带所决定的. 在周期性结构中,波的动力学行为由相邻波导间波能量的穿透率与波导非线性间相互作用决定. 当离散衍射效应和自聚焦效应相互抵消时可产生所谓格子孤子(离散孤子)<sup>[6,7]</sup>. 在光波导阵列中,作为离散非线性薛定谔方程的解,Christodoulides 等从理论上预测了格子孤子的存在<sup>[8,9]</sup>. 随后实验上观测到了这类自俘获光<sup>[10,11]</sup>. 最近,文献[1,12,13]从实验上报道了一维和两维光折射晶体中的格子孤子. Yang 等对两维光学格子中的多种类型孤子,如基本孤子、偶(四)极

孤子,中心在格点上和格点间的涡流孤子做了系统的数值和实验研究,发现这几种孤子都存在着稳定的参数区域<sup>[14-18]</sup>.

本文主要讨论由带有周期性格子的非线性薛定谔方程在 Kerr 介质中一类新的稳态解传播所产生的一个稳定复合孤子的动力学行为.

## 2. 模型

在傍轴近似条件下,横向周期性折射率调制的非均匀自聚焦 Kerr 非线性介质中光束传播动力学行为由非线性薛定谔方程描述

$$i \frac{\partial U}{\partial Z} + \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) U - VU + |U|^2 U = 0, \quad (1)$$

其中  $U$  为沿  $Z$  方向传播的光场的慢变包络. 横向坐标  $(X, Y)$  单位为光学格子间距  $D$ , 纵向坐标  $Z$  单位为  $k_1 D^2$ ,  $k_1 = 2\pi n/\lambda$ ,  $\lambda$  为载波长,  $n$  为介质折射率.  $V = V_0(\cos^2 X + \cos^2 Y)$  为光学诱导产生的格子势,实验上可通过一对偏振的激光干涉产生<sup>[1]</sup>.  $V_0$  为横向折射率调制深度. 我们假定  $V_0$  值比未受扰动的折射率  $n$  小而与由于 Kerr 效应引起的非线性校正相当. 尽管近来实验上所用的光折射格子产生的饱和非线性效应与本文所讨论的聚焦 Kerr 效应不同,我们的结果显然可适用于饱和情形. 更为重要的是,由于方程(1)与两维光学格子玻色-爱因斯坦凝聚体中

\* 国家自然科学基金(批准号:10274078)资助的课题.

† E-mail: liyp@ustc.edu.cn

的 Gross-Pitaevskii 方程形式相同,我们的结论亦可直接应用于玻色-爱因斯坦凝聚体中.

方程(1)含有两个守恒量,整个横向平面内振幅模方的积分即功率

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dXdY \quad (2)$$

和能量

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( |\nabla U|^2 - \frac{1}{2} |U|^4 + V |U|^2 \right) dXdY. \quad (3)$$

我们求解如下形式的解:

$$U(X, Y, z) = \exp(-i\beta z)u(X, Y),$$

其中  $\beta$  为孤子的非线性传播常数,  $u(X, Y)$  满足下述方程:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) u + \beta u - V_0 (\cos^2 X + \cos^2 Y) u + |u|^2 u = 0. \quad (4)$$

### 3. 稳态解及其动力学行为

#### 3.1. 稳态解

方程(4)可用傅里叶迭代方法求其稳态解<sup>[14-18]</sup>,首先定义傅里叶变换和逆变换形式

$$F(f) = \hat{f}(k) = \int dx f(x) \exp(-ik \cdot x), \quad (5)$$

$$f(x) = F^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \int dk \hat{f}(k) \exp(+ik \cdot x). \quad (6)$$

对(4)式做傅里叶变换,得

$$\hat{u} = - \frac{1}{|k|^2 - \beta} F(Vu) + \frac{1}{|k|^2 - \beta} F(|u|^2 u). \quad (7)$$

为避免  $|k|^2 = \beta$  的奇点问题,可在不动点方程(4)两边同时加上一项  $cu$  ( $c > 0$ ).采用 Petviashvili 提出的均匀化方法<sup>[19]</sup>,可得如下迭代形式

$$\begin{aligned} \hat{u}_{m+1} = & \frac{1}{|k|^2 + c} \left[ \frac{F(\gamma_L)}{F(\gamma_N)} \right]^{1/2} [(\beta + c)\hat{u}_m \\ & - F(Vu_m)] + \frac{1}{|k|^2 + c} \left[ \frac{F(\gamma_L)}{F(\gamma_N)} \right]^{3/2} \\ & \times F(|u_m|^2 u_m), \end{aligned} \quad (8)$$

其中投影因子  $F(\hat{\phi}) \equiv \int dk u(k) \hat{\phi}(k)$ ,  $\gamma_L = (|k|^2 - \beta)\hat{u} + F(Vu)$ ,  $\gamma_N = F(|u|^2 u)$ .

选择适当的高斯、两个具有  $\pi$  相位差的高斯、带有螺

旋拓扑位错的涡流解作为迭代初始条件,可分别求解出基本孤子、偶极子孤子、涡流孤子解<sup>[14-18]</sup>.其中,基本孤子位于格子产生的势阱底部,即  $(\pm \pi/2, \pm \pi/2)$  处,偶极孤子则由两个关于原点对称的位相差为  $\pi$  的两个基本孤子组成,涡流孤子可分为中心位于势阱底部和势阱顶部两种情况,各种孤子在一定范围内稳定存在.

我们选择高斯初始输入条件,但选取的腰束半径比产生基本孤子腰束半径大两倍到四倍,可求出一类新的稳态解.需要指出的是,这类稳态解虽然在强度分布上类似于已有报道的涡流孤子稳态解,但其位相分布与后者完全不同,即前者各个分量之间位相差为 0.图 1 列出了几个典型的非线性传播常数和格子调制深度解的强度分布剖面及光学格子分布.显然,在调制深度一定时,在  $\beta$  值处于适当区域时,稳态解各个分量能量均匀分布(图 1(b)),而  $\beta$  值较大或较小时,能量分布沿其分量某一对角线不再对称分布(图 1(a)(c)).而且,随着  $\beta$  增大,各分量的重叠部分也逐渐增大,这与涡流孤子和基本孤子随着  $\beta$  增大光场分布逐渐展宽到多个格子上的情况也不相同.而且  $V_0$  较小时,稳态解各分量强度分布重叠较多,即离散性减弱(图 1(b)(d)),这是由于势阱对光场束缚作用大小引起的,这一点亦可从图 2 看出.

图 2 给出了不同调制深度的稳态解功率(2)式与  $\beta$  关系.与涡流稳态解不同的是,功率随着  $\beta$  增大而单调(几乎线性)下降,根据著名的  $V-K$  标准,即  $dP/d\beta < 0$  时(注意我们选取得解形式为  $U(X, Y, z) = \exp(-i\beta z)u(X, Y)$ ,该稳态解不存在  $V-K$  不稳定性,但从随后的讨论可知,这类稳态解存在明显得振荡不稳定性.调制深度大的稳态解的能量要大于调制深度小的,其物理原因为势阱的增大会导致非线性介质对光场束缚能力的增强.

#### 3.2. 稳态解动力学行为

我们对前面所求出的稳态解应用标准的光学传输方法做了数值模拟传输,证实了这类稳态解的不稳定性.图 3 给出了稳态解传输的功率随传播距离  $z$  的关系,可看出,稳态解在传播开始就伴随着辐射,在  $z = 500$  时经历一过渡的准稳定阶段,在  $z = 2600$  后,辐射能量可忽略,产生了一个稳定传播的复合孤子.需要指出的是,这里的辐射指的是光场能量分布随着传播距离增加而在横向平面内溢出计算

窗口的部分,功率(2)式定义为全空间积分,而图3所表示的是我们所关心的光场局域部分的功率,所以功率守恒与图3所述并不矛盾.另当计算窗口内

$P$  恒定时,说明整个光场已形成束缚态——孤子,不再向计算窗口之外扩散能量,而窗口外的光场分布最终趋于无穷远处.

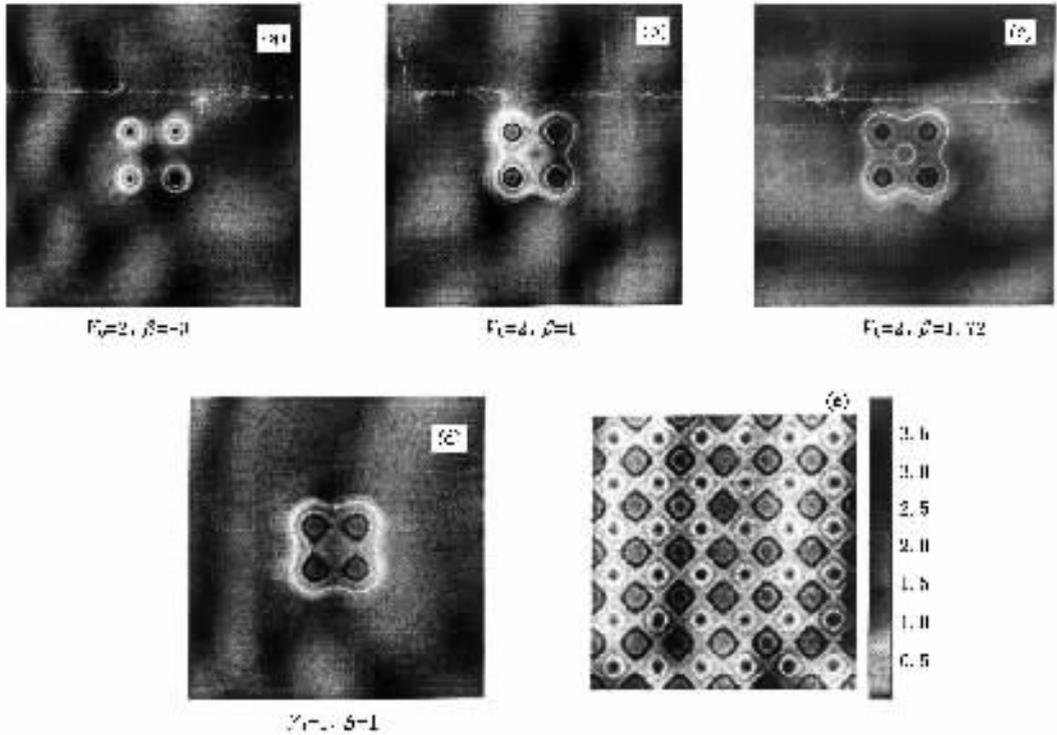


图1 不同  $\beta$  和  $V_0$  的稳态解强度分布剖面图(a)  $V_0=2, \beta=-3$  (b)  $V_0=2, \beta=1$  (c)  $V_0=2, \beta=1.72$  (d)  $V_0=1, \beta=1$  (e) 为光学格子分布

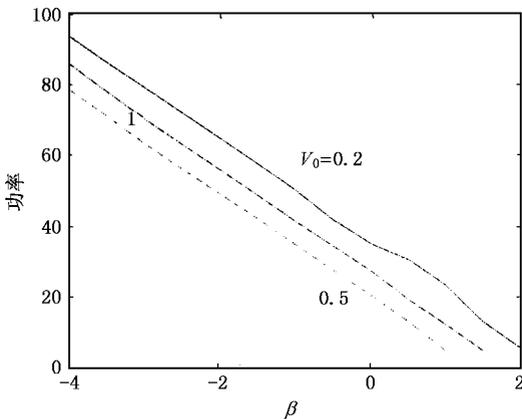


图2 功率与  $\beta$  关系图

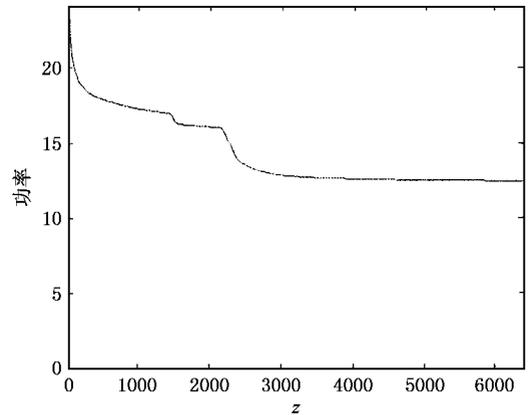


图3 功率随传播距离变化关系  $\beta=1, V_0=2$

稳态解强度剖面的传输情况由图4描述,初始输入解的四个分量关于原点对称分布,随着传播距离增大,强度分布迅速衰变为由两个对角分量为主的场,图4(c)描述了在某个传播距离处形成的两分量振幅相同的情形,从图4(d)(e)可明显看出,在

此时稳态解已演变为一个稳定传输的由两个分量构成的光学复合孤子.需要指出的是,两个分量间在不断地交换能量,而总能量保持守恒.物理上可解释为稳定的复合孤子由一个不稳定的稳态解传播产生,在此过程中,初始输入的几个分量之间存在相互

作用,而这个相互作用会对后面的传输过程起一个扰动作用,扰动的直接结果是激发了孤子的内模<sup>[20]</sup>.文献[20]指出孤子在内模扰动下,将会有“呼吸”、旋转等动力学属性.对于两分量复合孤子而言,“呼吸”现象即表现为能量在两个分量之间的来回转换,而由于格子势阱对光场的束缚作用,强度分布不会出现在横向非周期性调制介质中内模扰动所引起的旋转现象.这一点亦可从图5明显看出,孤子的振幅随传播距离而不断地振荡,两个分量振幅的振荡情况除极大值错位外完全相同,内模振荡周期也可

从图中简单算出.另外,由于格子势阱的存在,孤子两分量之间的作用也不同于横向折射率均匀分布介质中两涡流之间的相互作用,因为后者随传播距离增大而沿Y方向移动<sup>[21]</sup>.最后,我们强调这类复合孤子区别于所谓的偶极孤子,尽管其强度分布基本相同.我们检测了两分量在传输过程中各处的位相,发现两个分量之间并没有确定的位相关系,而偶极孤子两分量间位相差恒定为 $\pi$ .我们对不同传播常数和不同的调制深度的稳态解作了类似传输模拟,得出结论基本相似.

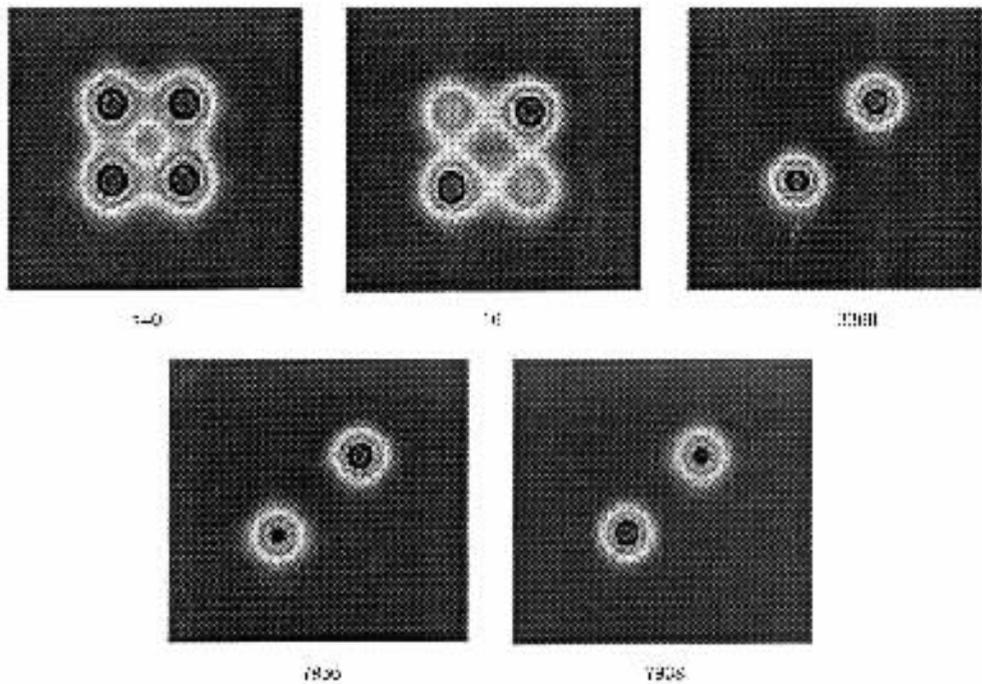


图4 复合孤子的产生过程及孤子在内模作用下“呼吸”示意图

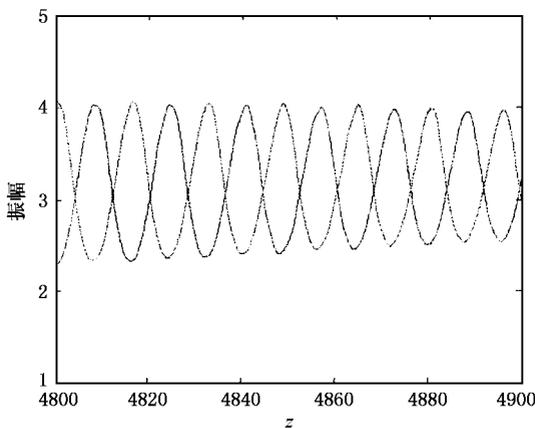


图5 复合孤子两分量振幅最大值随传播距离振荡示意图  
 $\beta = 1, V_0 = 2$

### 4. 结 论

我们研究了一类非线性薛定谔方程在带有周期性格子的 Kerr 介质中的稳态解的传播动力学行为.数值模拟结果表明,这类稳态解不存在稳定的参数区间.随着传播距离的增大,解剖面逐渐演化为一个由两分量组成的稳定的复合孤子,其间伴随着能量的辐射.稳定复合孤子的能量大约为原稳态解的一半.孤子的两个分量在达到稳定状态后的传输过程中不断地周期性地交换能量,这种现象可用内模振荡来定性地得到解释.

- [ 1 ] Fleischeretal J W 2003 *Nature*( London )**422** 147  
Kivshar Yu S and Agrawal G P 2003 *Optical Solitons : from Fibers to Photonic Crystals*( Academic , SanDiego , Calif. )  
Silberberg Y , Stegman G I 2001 *Spatial Solitons* ( Springer , NewYork )
- [ 2 ] Christodoulides D N , Lederer F and Silberberg Y 2003 *Nature* ( London )**424** 817
- [ 3 ] Eisenbergetal H S 2000 *Phys . Rev . Lett .* **85** 1863
- [ 4 ] Pertschetal T 2002 *Phys . Rev . Lett .* **88** 093901
- [ 5 ] Scharf R and Bishop A R 1993 *Phys . Rev . E* **47** 1375
- [ 6 ] Lederer F and Silberberg Y 2002 *Optics and Photonics News* **13** 48
- [ 7 ] Lederer F Darmanyan S and Kobayakov A 2001 "Discretesolitons in Spatial Solitons "( Springer , NewYork ) 269
- [ 8 ] Christodoulides D N and Joseph R J 1988 *Opt . Lett .* **13** 794
- [ 9 ] Aceves A B , Deangelis C , Peschel T *et al* 1996 *Phys . Rev . E* **53** 1172
- [ 10 ] Eisenberg H Silberberg Y , Morandotti R , Boyd A and Aitchison J 1998 *Phys . Rev . Lett .* **81** 3383
- [ 11 ] Morandotti R , Peschel U , Aitchison J , Eisenberg H and Silberberg Y 1999 *Phys . Rev . Lett .* **83** 2726
- [ 12 ] Fleischer J , Carmon T , Segev M , Efremidis N and Christodoulides D N 2003 *Phys . Rev . Lett .* **90** 023902
- [ 13 ] Neshev D N , Alexander T J , Ostrovskaya E A *et al* 2004 *Phys . Rev . Lett .* **92** 123903
- [ 14 ] Yang J and Musslimani Z H 2003 *Opt . Lett .* **28** 2094
- [ 15 ] Yang J , Imakasyuk , Beza A and Chen Z 2004 *Opt . Lett .* **29** 1662
- [ 16 ] Musslimani Z H and Yang J 2004 *J . Opt . Soc . Am . B.* **21** 973
- [ 17 ] Yang J 2004 *New Journal of Physics* **6** 47
- [ 18 ] Yang J and Makasyuk I 2004 *SAM* **24** 1539
- [ 19 ] Petviashvili V I 1976 *Plasma Physics* **2** 469
- [ 20 ] Dong L W , Ye F W , Wang J D *et al* 2004 *Physica D* **194** 219
- [ 21 ] Dong L W , Ye F W , Wang J D and Li Y P 2004 *Acta Phys . sin .* **53** 3353 ( in Chinese ) 董亮伟、叶芳伟、王建东、李永平 2004 物理学报 **53** 3353 ]

## A new class of stable composite soliton in two-dimensional photonic lattice \*

Dong Liang-Wei<sup>1)</sup> Ye Fang-Wei<sup>1)</sup> Wang Jian-Dong<sup>1)</sup> Li Yong-Ping<sup>1)†</sup>

<sup>1)</sup>( Department of Physics , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China )

<sup>2)</sup>( Structural Research Laboratory , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China )

( Received 12 January 2005 ; revised manuscript received 28 February 2005 )

### Abstract

We demonstrate that a new class of stable composite soliton exists in a two-dimensional lattice. It can be produced by the evolution of a stationary solution of nonlinear Schrödinger equation with a periodic potential modulation. We emphasize that this new kind of composite soliton is different from the dipole soliton reported before though they seem alike. The components of the soliton exchange energy during the propagations and the total energy of soliton conserves.

**Keywords :** stationary solution , two-dimensional lattice , composite soliton

**PACC :** 9430P , 4225 , 4290

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10274078 ).

† E-mail : liyp@ustc.edu.cn