

超强短脉冲激光在不同密度分布 等离子体中的自聚焦*

王伟民^{1)†} 郑春阳²⁾

1) 中国工程物理研究院研究生部, 北京 2101 信箱, 100088)

2) 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 8009 信箱, 100088)

(2004 年 12 月 28 日收到, 2005 年 3 月 18 日收到修改稿)

讨论高斯型强激光束在具有初始柱对称密度分布的低密度冷等离子体中传播时, 等离子体密度分布的不同对激光自聚焦的影响. 推导出可以判断更有利于自聚焦发生的评价函数, 这样通过比较不同密度分布的评价函数值就可以判断哪种密度分布更有利于自聚焦的发生. 为了说明这种方法的有效性, 对评价函数进行分析得出: 在相同的激光场中, 等离子体柱的轴心密度给定时(以激光的光轴为轴), 离轴越远的地方密度越大及密度变化越陡, 自聚焦越容易发生. 相对论效应与有质动力共同作用比相对论的单独作用, 自聚焦更容易发生. 数值模拟证实了评价函数能准确的预测在不同的等离子体密度分布中哪种密度分布使激光的自聚焦更容易发生.

关键词: 自聚焦, 相对论效应, 有质动力, 评价函数

PACC: 5240D, 5260, 5225

1. 引 言

强激光在等离子体中的传输与许多重要的应用密切相关, 如激光等离子体电子加速^[1,2], 谐波的产生^[3], X 射线激光^[4], 惯性约束核聚变中的快点火机理^[5-7]. 这些应用都要求激光在等离子体中能够稳定的传输几个甚至几十个 Rayleigh 长度的距离. 在真空中由于衍射效应, 激光传输一个 Rayleigh 长度就会严重的发散. 强激光在等离子体中传输时, 相对论效应和有质动力能阻止激光发散, 使激光自聚焦. 相对论效应即电子质量在激光场中的相对论增长, 导致局域的等离子体折射率增加; 激光场的不均匀造成的有质动力趋向于排斥电子, 使得局域电子密度减小, 也造成等离子体局域折射率增长. 这两种非线性效应主要发生在激光的光轴附近, 即等离子体在激光光轴附近的局域范围内的折射率会得到增长, 这样激光如同在光波导管中传播一样, 激光可以在等离子体中传播很远的距离而不会发散. 选择合适的等离子体密度通道也能阻止激光的发散, 在激光光轴上等离子体柱的密度最低, 越远离光轴等离

子体密度越高, 使得光轴附近折射率高, 越远离光轴折射率越低, 这样的密度分布也使等离子体能起到类似光波导管的作用阻止激光的发散. 所以选择合适的等离子体密度通道^[8], 使激光在等离子体中稳定的传输几十个 Rayleigh 长度的距离而保留更多的能量, 是很有现实意义的. 在文献 [9] 中提到了具有通道结构的等离子体柱比均匀分布的等离子体更有利于自聚焦的发生, 文献 [10] 中比较了激光在几种特殊的等离子体密度通道中的传输情况, 但都没有专门的推导和定量的分析激光在具有任意的密度分布的等离子体中传输时等离子体密度分布的不同对自聚焦的影响. 文献 [11] 中, 在定义了可以表征激光能量聚集程度的平均半径 R 后(R 的定义见本文 (6) 式), 推导出密度均匀时 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}$ 的表达式(其中 t 表示时间), 以此来讨论能使自聚焦发生的必要条件, 我们发现任意柱对称密度分布时 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}$ 的表达式可以用于定量的分析等离子体密度的不同对自聚焦的影响, 并且可由它推导出能判断更有利于自聚焦发生的评价函数, 这样通过分析和定量计算不同密度分

* 国家高技术研究发展计划及国家自然科学基金(批准号: 10375011, 10335020)资助的课题.

† E-mail: hbwwm1@126.com

布的评价函数值就可以判断哪种密度分布更有利于自聚焦. 本文以此种方法, 讨论激光在等离子体中传输时考虑相对论效应和有质动力的共同作用下, 具有怎样密度分布的等离子体能更有效的阻止激光的发散, 或者说使激光的自聚焦更有效的发生.

2. 评价函数的推导

考虑的入射激光很强, 使得电子在激光场中的振荡速度可以与真空中的光速比拟, 相对论效应远大于热效应, 可不考虑热压, 视等离子体为冷^[9, 12]; 激光脉冲持续的时间短, 离子由于较大的惯性在激光脉冲经过时没有明显的运动, 可视离子不动, 作为电中性背景^[9, 12, 13], 等离子体密度相对于临界密度很低, 激光包络的变化与激光振荡相比缓慢, 可以用准静态近似^[13]. 这样可以用单流体模型与 Maxwell 方程组来研究这个问题.

考虑的激光场和等离子体密度分布均满足柱对称, 采用柱坐标. 假设激光在等离子体中的传播方向始终不变, 且与等离子体柱的轴线重合, 以这条重合线为 z 轴建立柱坐标系, 与 z 轴垂直方向的距离称为半径以 r 表示. 半径 r 以 r_0 为单位, 纵向距离 z 以 $2k_0 r_0^2$ 为单位, 矢势以 $\frac{m_e c^2}{e}$ 为单位, 电子密度以 N_0 为单位, 其中 r_0 为激光在初始点 (即 $z=0$) 的焦斑半径, m_e 为电子的静止质量, e 为电子的带电量, c 为真空中的光速, N_0 为等离子体在轴线上的初始密度, $k_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{p,0}^2} / c$, ω_0 为激光角频率, $\omega_{p,0} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_0}{m_e}}$ 为轴上 (即 $r=0$) 初始等离子体振荡频率. 归一化矢势 $A = \frac{1}{2} \{ (x + yi) a(x, y, z, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)] + \text{c. c.} \}$ 表示圆偏振光, 表示 $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ x a(x, y, z, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)] + \text{c. c.} \}$ 线偏振光, 这两种偏振光在 Coulomb 规范场中传播方程均可表示为^[9, 13]

$$\frac{\partial a}{\partial z} + i \nabla_{\perp}^2 a + i a_1 \left(a - \frac{N_e}{Q} \right) a = 0, \quad (1)$$

式中第二项为衍射项使光束发散, 第三项是考虑了相对论效应和有质动力共同作用的非线性项使光束聚焦. N_e 是归一化的电子的密度, Q 相对论因子, 分别为

$$N_e = \max \left[0, f(r) + \frac{1}{a_1} \nabla_{\perp}^2 Q \right], \quad (2)$$

$$Q = \sqrt{1 + |a|^2}. \quad (3)$$

(2) 式保证了电子密度不小于零. $a_1 = k_{p,0}^2 r_0^2$ 为一无量纲常数, 其中 $k_{p,0} = \omega_{p,0} / c$, $\sqrt{a_1}$ 表征激光初始焦斑半径与等离子体波长相对大小, $f(r)$ 是归一化的初始柱对称密度分布函数, 因为它以轴上的初始电子密度为单位, 有 $f(r=0) = 1$, 并且为了方便选择 $f(r) = \text{常数}$.

以 $I_r = \frac{m_e c^3 \omega_0^2}{4\pi e^2}$ 为单位, 定义激光能量^[9, 11]

$$N = \int_0^{+\infty} |a|^2 r dr. \quad (4)$$

可以证明 N 是一个守恒量, 不随 z 的变化而变化, 详细证明见附录 A.

令 $F = F(r, |a|^2) = a_1 \left(1 - \frac{N_e}{Q} \right)$ 则方程 (1) 可表示为

$$\frac{\partial a}{\partial z} + i \nabla_{\perp}^2 a + i F a = 0, \quad (5)$$

F 是依问题的不同而改变的, 有如下几种情况.

1) 电子排空区, $N_e = 0$, $F = a_1 \left(1 - \frac{N_e}{Q} \right) = a_1$.

2) 不考虑有质动力, 仅考虑相对论效应, 则在演化过程中等离子体密度分布保持不变, $N_e = f(r)$, $F = a_1 \left(1 - \frac{N_e}{Q} \right) = a_1 \left(1 - \frac{f(r)}{Q} \right)$.

3) 考虑相对论和有质动力的共同作用, 电子未排空时, $F = a_1 \left(1 - \frac{N_e}{Q} \right) = a_1 \left(1 - \frac{f(r) + \frac{1}{a_1} \nabla_{\perp}^2 Q}{Q} \right)$, 与文献 [11, 12] 相同, 定义

$$R^2 = \frac{\int_0^{+\infty} |a|^2 r^2 r dr}{\int_0^{+\infty} |a|^2 r dr} = \frac{\int_0^{+\infty} |a|^2 r^2 r dr}{N}. \quad (6)$$

平均半径 R 能够描述激光能量的聚集程度, 一般来说, R 越大说明激光能量的发散程度越高, 相反, R 越小说明激光能量的聚集程度越高. 因此, 如果在时间演化到无穷大或激光传播到无穷远处, R 增加到无穷大, 说明激光是发散的; 反之, 在无穷远处 R 仍然保持着一个有限值, 说明激光没有被发散, 而发生了自聚焦. 从 (6) 式可以看出, R^2 只与激光的场分布

有关, 等离子体密度分布的不同对它没有影响.

对 R^2 求关于 z 的一阶导数可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2}{\partial z} &= \frac{1}{N} \int_0^{+\infty} \frac{\partial |a|^2}{\partial z} r^2 r dr \\ &= \frac{1}{N} \int_0^{+\infty} \left(a^* \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{a \partial a^*}{\partial z} \right) r^2 r dr. \quad (7) \end{aligned}$$

由(5)式得, $a^* \frac{\partial a}{\partial z} = -i(a^* \nabla_{\perp}^2 a + F |a|^2)$, 其共扼为 $a \frac{\partial a^*}{\partial z} = i(a \nabla_{\perp}^2 a^* + F |a|^2)$, 把它们代入(7)式得

$$\frac{\partial R^2}{\partial z} = \frac{i}{N} \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (a \nabla_{\perp} a^* - a^* \nabla_{\perp} a) r^3 dr. \quad (8)$$

从(8)式可以看出, $\frac{\partial R^2}{\partial z}$ 只与激光的场分布有关, 等离子体密度分布的不同对它没有影响. 初始点激光的场分布为 $a(r, z=0)$, 一般的情况下 $a(r, z=0)$ 是复数, 其虚部表示不同半径处的初始相位, 表征激光在初始点的发散和聚焦特性^[9], 如果在初始点激光是平行光束, 激光既不发散也不聚焦, 可以取 $a(r, z=0)$ 为实数. 本文取光束平行入射的高斯型激光, 即 $a(r, z=0) = a_0 \exp[-r^2/2]$ 为实数, 有 $a \nabla_{\perp} a^* - a^* \nabla_{\perp} a \equiv a \nabla_{\perp} a - a \nabla_{\perp} a \equiv 0$, 那么

$$\left. \frac{\partial R^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (9)$$

对 R^2 求关于 z 的二阶导数得(推导见附录 B),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} &= \frac{8}{N} \int_0^{+\infty} |\nabla_{\perp} a|^2 r dr \\ &\quad - \frac{1}{N} \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (2 |a|^2 \nabla_{\perp} F) r^3 dr. \quad (10) \end{aligned}$$

对于 $\int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (2 |a|^2 \nabla_{\perp} F) r^3 dr$ 项, 可分三种情况讨论.

1) 电子在全空间排空, $F = a_1$ (a_1 为常数),

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (2 |a|^2 \nabla_{\perp} F) r^3 dr \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (|a|^2 \nabla_{\perp} a_1) r^3 dr \\ &= 0, \end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} = \frac{8}{N} \int_0^{+\infty} |\nabla_{\perp} a|^2 r dr \geq 0. \quad (11)$$

初始场分布给定时, $R^2(z=0)$ 和 $\left. \frac{\partial R^2}{\partial z} \right|_{z=0}$ 就是一个定值, 考虑激光场的初始分布函数足够光滑 $R^2(z=0)$ 和 $\left. \frac{\partial R^2}{\partial z} \right|_{z=0}$ 还应是有限值. 特别地, 当初始场为高斯分布时(9)式成立, 即 $\left. \frac{\partial R^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$. 由(11)式知

$\frac{\partial R^2}{\partial z}$ 随 z 单调递增, 所以 $z > 0$ 时, $\frac{\partial R^2}{\partial z} > 0$, 那么 R^2 也随 z 单调递增, 在无穷远处就有 $R^2 \rightarrow \infty$, 激光发散. 这个结果是显然的, 这时激光相当于是在真空中传播, 只有衍射效应, 激光发散.

2) 仅考虑相对论效应时, $F = a_1 \left(1 - \frac{\mathcal{K}(r)}{Q}\right)$ 得

(推导见附录 C)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} &= \frac{8}{N} \int_0^{+\infty} |\nabla_{\perp} a|^2 r dr - \frac{8a_1}{N} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} + Q - 2 \right) \mathcal{K}(r) \right. \\ &\quad \left. + (Q-1)r \frac{\partial \mathcal{K}(r)}{\partial r} \right] r dr. \quad (12) \end{aligned}$$

3) 考虑相对论和有质动力共同作用, 电子未完全

排空时 $F = a_1 \left(1 - \frac{\mathcal{K}(r)}{Q}\right) - \frac{\nabla_{\perp}^2 Q}{Q}$, 得(推导见附录 D)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} &= \frac{8}{N} \int_0^{+\infty} |\nabla_{\perp} a|^2 r dr - \frac{8a_1}{N} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} + Q - 2 \right) \mathcal{K}(r) \right. \\ &\quad \left. + (Q-1)r \frac{\partial \mathcal{K}(r)}{\partial r} \right] r dr \\ &\quad - \frac{8}{N} \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q}\right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r} \right)^2 \right] r dr. \quad (13) \end{aligned}$$

(12) 和(13)式右边第一项恒为正, 是真空中项, 第二项是由相对论效应和等离子体初始密度分布决定的(13)式第三项恒为负, 是有质动力作用项, 表示有质动力使激光聚焦.

假设在某点 $z = z_0$ 处的激光场的分布是已知的, 计算出不同情形下 $R^2(z = z_0)$, $\left. \frac{\partial R^2}{\partial z} \right|_{z = z_0}$,

$\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}(z = z_0)$ 的值, 由(6)(8)式可知不同密度分布对 $R^2(z = z_0)$ 和 $\left. \frac{\partial R^2}{\partial z} \right|_{z = z_0}$ 的值没有影响, 由(12),

(13)式知 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}(z = z_0)$ 的值是依初始密度分布不同

而不同, 如果情形 A 中 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}(z = z_0, A)$ 值小于情形 B 中的 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}(z = z_0, B)$ 值, 则在下一地点 $z_0 + dz$ 处

就有 $\frac{\partial R^2}{\partial z}(z = z_0 + dz, A) < \frac{\partial R^2}{\partial z}(z = z_0 + dz, B)$, 那么在地点 $z_0 + dz + dz'$ 处就有 $R^2(z_0 + dz + dz', A) < R^2(z_0 + dz + dz', B)$ 则情形 A 中的等离子体条件更有利于自聚焦的发生. 从这个意义上看 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 可以作为自聚焦的评价函数.

(13) 式减去 (12) 式得

$$\left. \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} \right|_{\text{相对论和有质动力共同作用}} - \left. \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} \right|_{\text{相对论的单独作用}} = -\frac{8}{N} \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)^2 \right] r dr < 0. \quad (14)$$

可以看到有质动力对 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 单独的贡献是

$$-\frac{8}{N} \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)^2 \right] r dr, \text{ 这一项恒为负值, 说明有质动力的存在使自聚焦更容易发生, 这一点文献 } 9, 11 \text{ 可以证实.}$$

仍假设在某点 $z = z_0$ 处的激光场的分布是已知的 $f_1(r)$ 和 $f_2(r)$ 表示两种不同的密度分布, 与之对应的一阶导数为 $\frac{\partial f_1(r)}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial f_2(r)}{\partial r}$, 单独考虑相对论效应时用 (12) 式计算两种密度分布的 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 值, 得到其差值 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}[f_1(r), z = z_0] - \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}[f_2(r), z = z_0]$ 与考虑相对论效应和有质动力共同作用时, 用 (13) 式计算两种密度分布的 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 值, 得到的差值是相同, 即

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}[f_1(r), z = z_0] - \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}[f_2(r), z = z_0] \\ &= -\frac{8a_1}{N} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} + Q - 2\right) (f_1(r) - f_2(r)) \right. \\ & \quad \left. + (Q - 1) \left(r \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} - r \frac{\partial f_2(r)}{\partial r} \right) \right] r dr, \quad (15) \end{aligned}$$

所以不管是考虑相对论效应单独作用还是考虑相对论效应与有质动力的共同作用都只须讨论这个差值, 不用分开讨论, 不失一般性以下仅讨论相对论效应与有质动力共同作用的情形. 观察 (15) 式, 可以用另一个更简单的评价函数代替. 定义评价函数,

$$\begin{aligned} u[f(r)] &= \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} + Q - 2\right) f(r) \right. \\ & \quad \left. + (Q - 1) r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] r dr, \quad (16) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}[f_1(r)] - \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}[f_2(r)] \\ &= -\frac{8a_1}{N} \{ u[f_1(r)] - u[f_2(r)] \}. \quad (17) \end{aligned}$$

(17) 式说明 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 与 $u[f(r)]$ 作为评价函数是等价的, 只是 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 越小说明更有利于自聚焦, 对应着 $u[f(r)]$ 的值越大更有利于自聚焦.

由于在相对论因子 $Q \geq 1$ 的条件下 $\left(\frac{1}{Q} + Q - 2\right)$ 和 $(Q - 1)$ 大于等于 0 恒成立, 则由 (16) 式, $f(r)$ 和 $r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ 越大, $u[f(r)]$ 的值也越大, 就说明越有利于自聚焦的发生.

应该说明 (11) 式是电子全空间排空的情形, (13) 式是全空间未出现电子排空的情形. 对于在 $[0, r_1]$ 上电子排空, 在 $[r_1, +\infty]$ 上电子未被排空的情形, 应该分成两个积分区域求 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 的值, 但依然有 (17) 式成立, 只是评价函数 $u[f(r)]$ 的积分区域由 $[0, +\infty]$ 变成 $[r_1, +\infty]$ 了.

特别地,

$$\begin{aligned} & u[f(r)] - u[f(r)] \equiv 1 \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} + Q - 2\right) (f(r) - 1) \right. \\ & \quad \left. + (Q - 1) r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] r dr, \quad (18) \end{aligned}$$

(18) 式可以说明 $f(r) > 1$ 且 $\frac{\partial f(r)}{\partial r} \geq 0$ 的密度分布比 $f(r) \equiv 1$ 所表示的均匀密度分布更容易发生自聚焦, 即只要在 $f(r) \equiv 1$ 情形发生自聚焦, $f(r) > 1$ 且 $\frac{\partial f(r)}{\partial r} \geq 0$ 的情形就一定会发生自聚焦.

3. 评价函数有效性的验证

把上面的讨论总结起来, 有如下结论:

1) 考虑有质动力和相对论效应的共同作用比仅仅考虑相对论效应, 自聚焦更容易发生, 这一点在文献 9, 11 中都可以看到.

2) 特别重要的是 $f(r)$ 和 $r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ 越大, 评价函数 $u[f(r)]$ 的值也越大, 就说明越有利于自聚焦的

发生.

3) 初始密度分布 $f(r)$ 使得 $\frac{\partial f(r)}{\partial r} > 0$ 比 $\frac{\partial f(r)}{\partial r} \leq 0$ 更有利于自聚焦, 即等离子体轴上密度最低, 离轴越远密度越大的密度分布比轴上密度最高, 离轴越远密度越低或密度分布均匀的等离子体柱更容易自聚焦.

4) 初始密度分布 $f(r)$ 值越大, 越有利于自聚焦的发生. 特别地, 如果激光在密度分布为 $f(r) \equiv 1$ 的等离子体中发生自聚焦, 它在密度分布为 $f(r) > 1$ 且 $\frac{\partial f(r)}{\partial r} \geq 0$ 的等离子体中就一定会发生自聚焦.

5) 在 (16) 式 $v[f(r)]$ 表达式中由于 $f(r)$ 前面的系数是 $(\frac{1}{Q} + Q - 2)$, $r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ 前面的系数是 $(Q - 1)$, 则它们的差值为 $(\frac{1}{Q} + Q - 2) - (Q - 1) = \frac{1}{Q} - 1 \leq 0$, 说明 $r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ 和 $f(r)$ 变化相同的值, $r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ 的影响要大.

通过数值计算对以上结论进行检验, 在数值计算中如果第一个自聚焦脉冲出现的越早或者在相同的距离内出现的自聚焦脉冲越多, 就认为增长率越大, 从而认为对应的情形越有利于自聚焦发生, 以下以此为判据. 数值模拟的数据, 都是以菱形差分格式解广义非线性薛定谔方程, 即 (1) 式得到的, 基本参数为入射激光波长是 $0.248 \mu\text{m}$, 初始点的激光场为 $a(r, z=0) = a_0 \exp[-\frac{r^2}{2r_0^2}]$, $r_0 = 3 \mu\text{m}$, 等离子体轴心的密度是 $7.5 \times 10^{20} \text{cm}^{-3}$. 每个图同一行是相同情形的两幅图, 左边是 $|a(z, r=0)|$ 随 z 的演化图, 右边是 $|a(r, z)|$ 随 r 和 z 的演化图.

1) 在图 1 中分别取

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{cases} f(r) = 1 + 0.005r/3, & r < 3, \\ f(r) = 1.005, & r \geq 3, \end{cases} \\ \text{(b)} & \begin{cases} f(r) = 1 + 0.01r/3, & r < 3, \\ f(r) = 1.01, & r \geq 3, \end{cases} \\ \text{(c)} & \begin{cases} f(r) = 1 + 0.02r/3, & r < 3, \\ f(r) = 1.02, & r \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

为初始密度分布, 入射激光的能量都是 $1.50 \times 10^{18} \text{Wcm}^{-2}$. 显然这三个分布函数对应的评价函数值是递增的, 即有 $v(a) < v(b) < v(c)$. 从右边的三维图中可以看到这三种情形都发生了自聚焦, 从左边的二维平面图中可以看到, 这三种情形中第一个自聚焦脉冲出现的地点依次前移, 分别出现在 (a) 498.3

μm (b) 403.6 μm (c) 309.0 μm ; 激光传输相同的长度 (2679 μm , 24 个 Rayleigh 长度), 出现的自聚焦脉冲个数依次是 3 个, 4 个, 和 5 个. 这符合评价函数的判断.

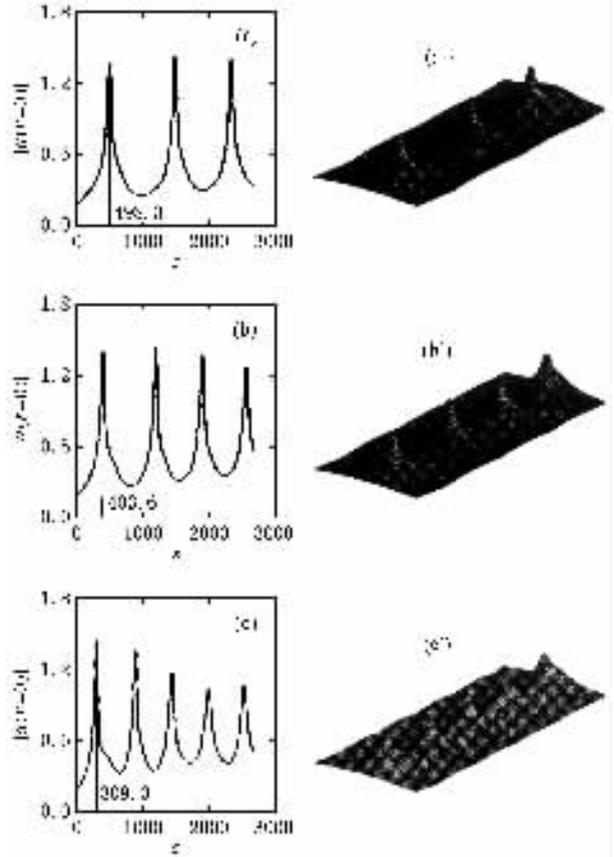


图 1 三对图对应的初始密度分布函数依次为 (a) (b) (c), 左边是 $|a(z, r=0)|$ 随 z 的演化图, 右边是 $|a(r, z)|$ 随 r 和 z 的演化图

2) 在图 2 中分别取

$$\begin{aligned} \text{(a)} & f(r) \equiv 1, \\ \text{(b)} & \begin{cases} f(r) = 1, & r < 3, \\ f(r) = 1.1, & r \geq 3, \end{cases} \\ \text{(c)} & \begin{cases} f(r) = 1, & r < 1.5, \\ f(r) = 1.1, & r \geq 1.5 \end{cases} \end{aligned}$$

为初始密度分布, 入射激光的能量都是 $1.5 \times 10^{18} \text{Wcm}^{-2}$. 显然这三个分布函数对应的评价函数值是递增的, 即有 $v(a) < v(b) < v(c)$. 从右边的三维图中可以看到这三种情形都发生了自聚焦, 从左边的二维平面图中可以看到, 这三种情形中第一个自聚焦脉冲出现的地点依次前移, 分别出现在 (a) 746.5 μm (b) 651.8 μm (c) 226.8 μm ; 激光传输相同的长度 (2679 μm , 24 个 Rayleigh 长度), 出现的自聚焦脉

冲个数依次是 2 个 4 个 和 6 个. 这符合评价函数的判断.

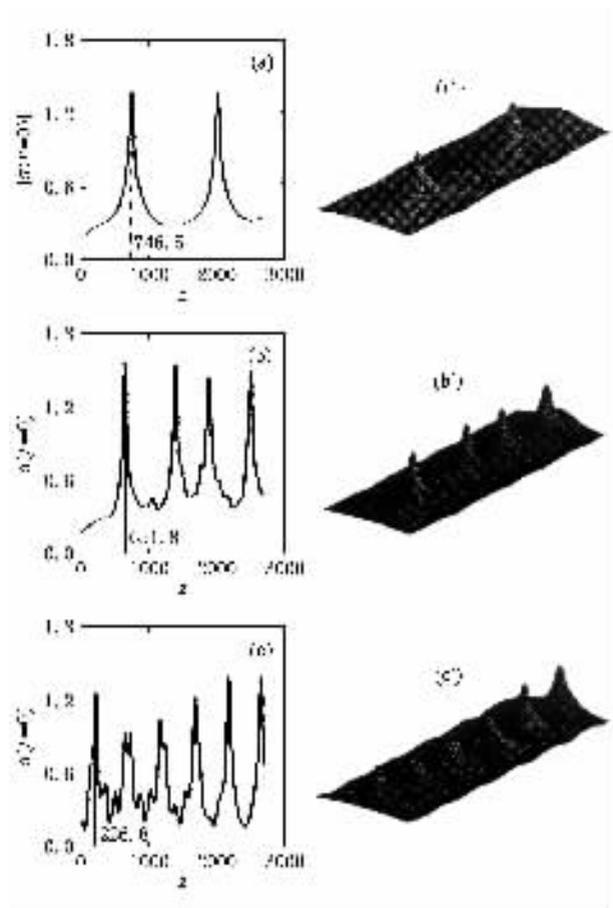


图2 三对图对应的初始密度分布函数依次为(a)(b)(c) 左边是 $|a(z, r=0)|$ 随 z 的演化图 右边是 $|a(r, z)|$ 随 r 和 z 的演化图

3)图 3 中,入射激光的能量都是 $1.30 \times 10^{18} \text{ Wcm}^{-2}$. 激光在初始密度分布均匀的等离子体中传输时出现发散, 见(a)图. 选择适当的初始密度可使激光自聚焦, 在图 3 中分别取

$$\begin{aligned} (a) & \rho(r) \equiv 1, \\ (b) & \begin{cases} \rho(r) = 1 + 0.03r/2, & r < 2, \\ \rho(r) = 1.03, & r \geq 2, \end{cases} \\ (c) & \begin{cases} \rho(r) = 1 + 0.05r/2, & r < 2, \\ \rho(r) = 1.05, & r \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

为初始密度分布, 显然这三个分布函数对应的评价函数值是递增的, 即有 $v(a) < v(b) < v(c)$. 在右边的三维图中可以看到(a)情形激光发散 (b)(c)情形都发生了自聚焦, 在左边的二维平面图中可以看到, 后两种情形中第一个自聚焦脉冲出现的地点此次前移, 分别出现在 (b) 246.5 μm (c) 187.5 μm . 激光传输相同的长度(2679 μm , 24 个 Rayleigh 长度), 出现的自聚焦脉冲个数依次是 6 个和 8 个. 这符合评

价函数的判断.

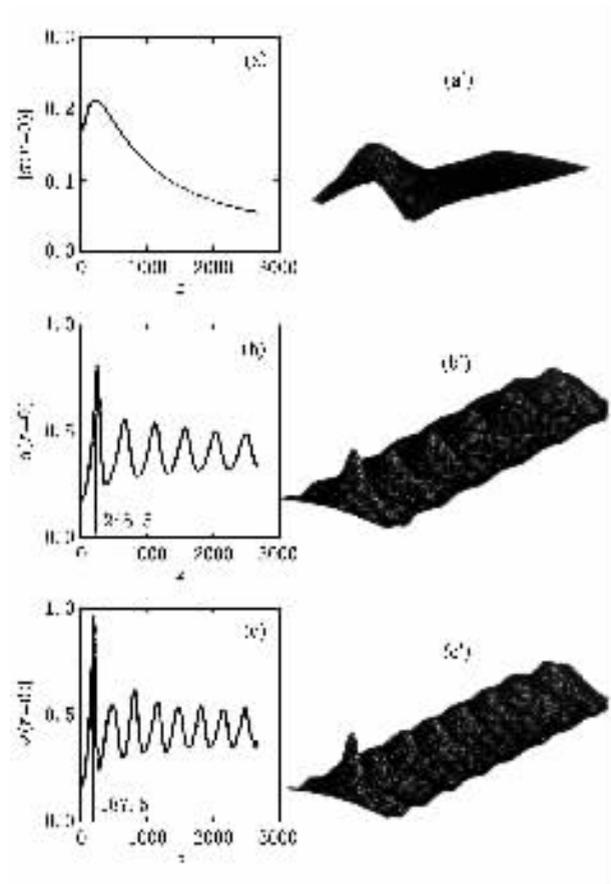


图3 三对图对应的初始密度分布函数依次为(a)(b)(c) 左边是 $|a(z, r=0)|$ 随 z 的演化图 右边是 $|a(r, z)|$ 随 r 和 z 的演化图

4)在图 4 中分别取

$$\begin{aligned} (a) & \rho(r) \equiv 1, \\ (b) & \begin{cases} \rho(r) = 1 - 0.03\left(\frac{r}{2}\right)^2, & r < 2, \\ \rho(r) = 0.97, & r \geq 2, \end{cases} \\ (c) & \begin{cases} \rho(r) = 1 - 0.005\left(\frac{r}{2}\right)^2, & r < 2, \\ \rho(r) = 0.95, & r \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

为初始密度分布, 入射激光的能量都是 $1.50 \times 10^{18} \text{ Wcm}^{-2}$. 显然这三个分布函数对应的评价函数值是递减的, 即有 $v(a) > v(b) > v(c)$. 从图 4 可以看到, 在(a)中, 初始密度分布均匀, 出现了自聚焦, 在(b)和(c)中激光是发散的. 轴心处初始场值都是有是 $|a(r=0, z=0)| = 0.1837$, 在(b)图中激光传输 367.9 μm 和 1269.8 μm 的距离时, $|a(r=0, z)|$ 分别下降到 0.05 和 0.001, 而(c)图中激光只传输了 280.4 μm 和 823.4 μm 的距离, $|a(r=0, z)|$ 就分别下降到 0.05 和 0.001, 说明(c)比(b)发散的更快. 这符合评价函数的判断.

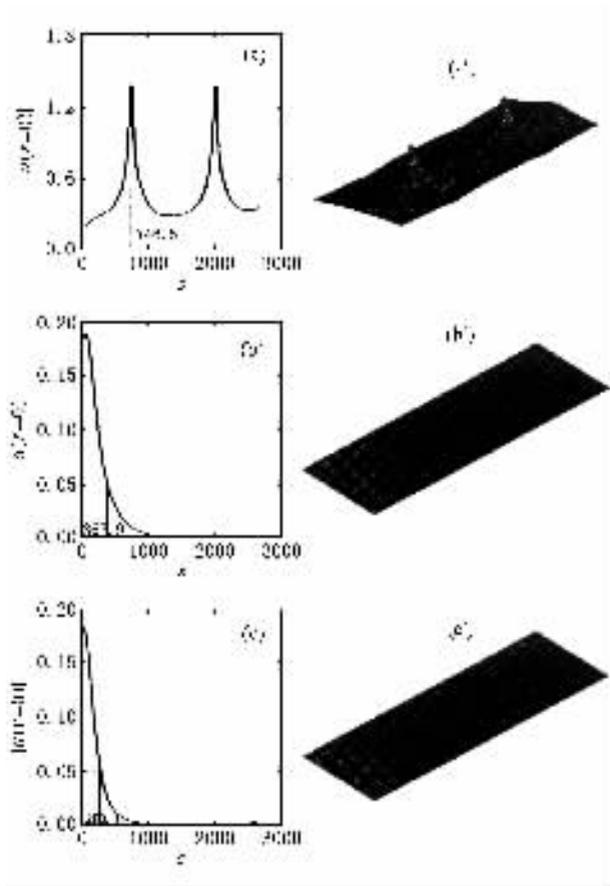


图4 三对图对应的初始密度分布函数依次为(a)(b)(c)左边是 $|\alpha(z, r=0)|$ 随 z 的演化图 右边是 $|\alpha(r, z)|$ 随 r 和 z 的演化图

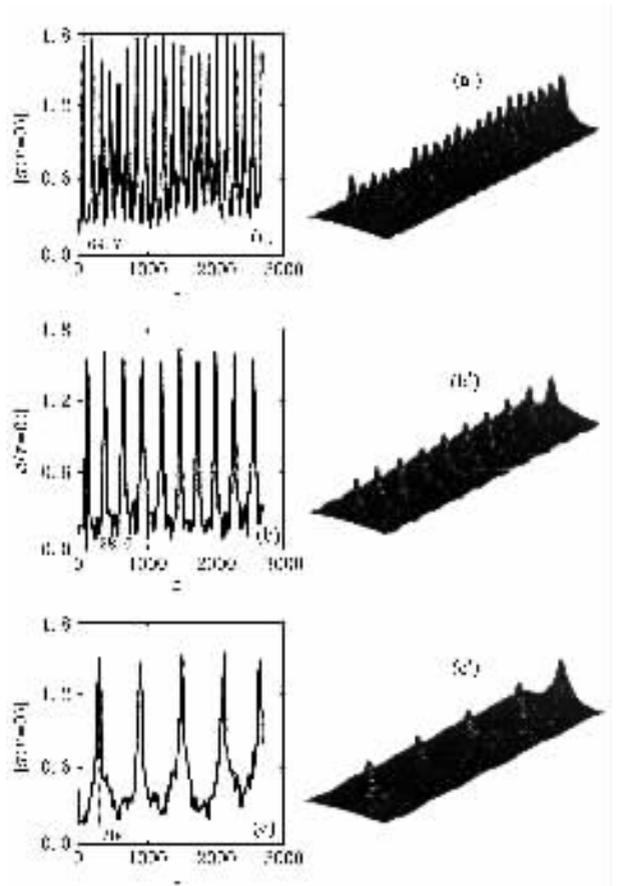


图5 三对图对应的初始密度分布函数依次为(a)(b)(c)左边是 $|\alpha(z, r=0)|$ 随 z 的演化图 右边是 $|\alpha(r, z)|$ 随 r 和 z 的演化图

以上数值结果表明以 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 和 $v[f(r)]$ 为评价函数来判断哪种初始密度分布更容易出现自聚焦是有效的. 但怎样利用这些评价函数去判断更普遍的初始密度分布还有待考虑, 因为对于更一般的情形, 两个分布函数没有在全空间中恒定的大小关系, 取决于分布函数具体的空间特性. 如

$$f(r) = 2 - \exp[-(r/r^*)^2],$$

$$f(r) = 2 - \exp[-(r/r^*)^4],$$

$$f(r) = 2 - \exp[-(r/r^*)^6]$$

这几种分布谁更有利于自聚焦呢? 能不能以评价函数在初始点的值进行判断, 即这个判断结果应用于整个时间和空间的演化是否一直有效? 通过分析发现, 如果激光整个演化过程中, 在 $z > 0$ 时激光能量的聚焦程度都比初始点 ($z = 0$) 激光能量的聚焦程度高, 那么初始点处评价函数的判断结果在激光的整个演化过程中就一直有效. 但我们现在还没有找到合适的参数来说明激光在等离子体中的自聚焦一定有这个性质, 还需要进一步研究. 在图 5 中, 入射激

光能量都是 $1.50 \times 10^{18} \text{ Wcm}^{-2}$, 分别取

$$(a) f(r) = 2 - \exp[-(r/r^*)^2],$$

$$(b) f(r) = 2 - \exp[-(r/r^*)^4],$$

$$(c) f(r) = 2 - \exp[-(r/r^*)^6]$$

为初始密度分布, $r^* = 3.0$, 对应的评价函数分别 $v(a), v(b), v(c)$, 按照激光场的初始分布计算评价函数的值, 有 $v(a), z=0 = 6.9679 \times 10^{-5}$, $v(b), z=0 = 6.967235173 \times 10^{-5}$, $v(c), z=0 = 6.967235171 \times 10^{-5}$, 即 $v(a), z=0 > v(b), z=0 > v(c), z=0$, 如果评价函数在初始点的判断结果一直有效, 可以得出 (a) 比 (b) 更易于发生自聚焦, (b) 比 (c) 更易于发生自聚焦. 在右边的三维图中可以看到这三种情形都发生了自聚焦, 在左边的二维平面图中可以看到, 这三种情形中第一个自聚焦脉冲发生地点依次后移, 分别出现在 (a) $69.7 \mu\text{m}$ (b) $128.6 \mu\text{m}$ (c) $304 \mu\text{m}$; 激光传输相同的长度 ($2679 \mu\text{m}$ 24 个 Rayleigh 长度), 出现的自聚焦脉冲个数依次是 21 个, 10 个, 和 5 个. 数值计算结果表明在这种情况下评价函数在初始点的判断结果是有效的.

4. 结 论

本文讨论了强激光束在初始柱对称分布密度分布的冷等离子体中传播时, 等离子体密度分布的不同对激光自聚焦的影响. 推导出密度为任意柱对称分布时 $\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2}$ 的表达式, 各项代表的物理意义明确, 并且可以通过它及由它导出的评价函数选择更有利于自聚焦发生的等离子体密度分布. 以这种方法可以得出, 电子被完全排空, 激光必然发散; 考虑有质动力与相对论效应的共同作用比仅仅考虑相对论效应, 自聚焦更容易发生. 这些结论可以从文献 [9], [11] 中看到是正确的. 更重要的是, 以往没有专门讨论怎样的密度分布更有利于激光的自聚焦或仅仅从定性的角度上来判断^[9], 而在这篇文章中这些结论是通过对评价函数的分析和定量计算得到的. 第三节的数值模拟结果表明评价函数能有效的判断哪种密度分布更有利于自聚焦的发生. 但我们也看到, 把这种方法应用到更一般的等离子体密度分布中去, 还需要对自聚焦的特性进行进一步的了解, 这也是有意义而需要深入研究的问题.

附录 A

由(5)式得

$$\frac{\partial a}{\partial z} = -[\nabla_{\perp}^2 a + F(r, |a|^2)a]$$

及其共轭

$$\frac{\partial a^*}{\partial z} = [\nabla_{\perp}^2 a^* + F(r, |a|^2)a^*],$$

分别以 a^* 和 a 乘以上两式得

$$a^* \frac{\partial a}{\partial z} = -[a^* \nabla_{\perp}^2 a + F|a|^2]$$

和

$$a \frac{\partial a^*}{\partial z} = [a \nabla_{\perp}^2 a^* + F|a|^2],$$

两式相加得

$$a^* \frac{\partial a}{\partial z} + a \frac{\partial a^*}{\partial z} = [a \nabla_{\perp}^2 a^* - a^* \nabla_{\perp}^2 a],$$

$$\frac{\partial |a|^2}{\partial z} = [\nabla_{\perp} \cdot (a \nabla_{\perp} a^*) - \nabla_{\perp} a \cdot \nabla_{\perp} a^*]$$

$$- \nabla_{\perp} \cdot (a^* \nabla_{\perp} a) + \nabla_{\perp} a^* \cdot \nabla_{\perp} a],$$

$$\frac{\partial |a|^2}{\partial z} = [\nabla_{\perp} \cdot (a \nabla_{\perp} a^* - a^* \nabla_{\perp} a),$$

则

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial |a|^2}{\partial z} r dr$$

$$= i \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (a \nabla_{\perp} a^* - a^* \nabla_{\perp} a) r dr = 0,$$

所以 N 是守恒量.

附录 B

由(8)式得

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} = \frac{i}{N} \int_0^{+\infty} \frac{\nabla_{\perp} \cdot (a \nabla_{\perp} a^* - a^* \nabla_{\perp} a)}{\partial z} r^3 dr,$$

应用(5)式得

$$\frac{\partial a}{\partial z} = -[\nabla_{\perp}^2 a + Fa]$$

和

$$\frac{\partial a^*}{\partial z} = [\nabla_{\perp}^2 a^* + Fa^*],$$

则

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla_{\perp} \cdot (a \nabla_{\perp} a^* - a^* \nabla_{\perp} a)}{\partial z} \\ &= \nabla_{\perp} \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial z} \nabla_{\perp} a^* + a \nabla_{\perp} \frac{\partial a^*}{\partial z} - \frac{\partial a^*}{\partial z} \nabla_{\perp} a - a^* \nabla_{\perp} \frac{\partial a}{\partial z} \right) \\ &= \nabla_{\perp} \cdot [-[\nabla_{\perp}^2 a + Fa] \nabla_{\perp} a^* + a \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp}^2 a^* + Fa^*] \\ &\quad - [\nabla_{\perp}^2 a^* + Fa^*] \nabla_{\perp} a + a^* \nabla_{\perp} [\nabla_{\perp}^2 a + Fa]] \\ &= i \nabla_{\perp} \cdot \{ \nabla_{\perp} (a \nabla_{\perp}^2 a^*) - \nabla_{\perp} a \nabla_{\perp}^2 a^* + \nabla_{\perp} (a^* \nabla_{\perp}^2 a) \\ &\quad - \nabla_{\perp} a^* \nabla_{\perp}^2 a + a F \nabla_{\perp} a^* + |a|^2 \nabla_{\perp} F + a^* F \nabla_{\perp} a \\ &\quad + |a|^2 \nabla_{\perp} F \} - (\nabla_{\perp}^2 a \nabla_{\perp} a^* + Fa \nabla_{\perp} a^* \\ &\quad + \nabla_{\perp}^2 a^* \nabla_{\perp} a + Fa^* \nabla_{\perp} a) \} \\ &= i \nabla_{\perp} \cdot \{ \nabla_{\perp} (a \nabla_{\perp}^2 a^*) + \nabla_{\perp} (a^* \nabla_{\perp}^2 a) \\ &\quad + 2 |a|^2 \nabla_{\perp} F - [\nabla_{\perp}^2 a \nabla_{\perp} a^* + \nabla_{\perp}^2 a^* \nabla_{\perp} a] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} &= \frac{-1}{N} \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \{ \nabla_{\perp} (a \nabla_{\perp}^2 a^*) + \nabla_{\perp} (a^* \nabla_{\perp}^2 a) \\ &\quad + 2 |a|^2 \nabla_{\perp} F - [\nabla_{\perp}^2 a \nabla_{\perp} a^* + \nabla_{\perp}^2 a^* \nabla_{\perp} a] \} r^3 dr \\ &= \frac{-1}{N} \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp}^2 (a \nabla_{\perp}^2 a^* + a^* \nabla_{\perp}^2 a) + \nabla_{\perp} \cdot (2 |a|^2 \nabla_{\perp} F) \\ &\quad - 2 \nabla_{\perp} \cdot (\nabla_{\perp}^2 a \nabla_{\perp} a^* + \nabla_{\perp}^2 a^* \nabla_{\perp} a) r^3 dr, \end{aligned}$$

应用

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp}^2 g r^3 dr &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) r^3 dr \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) r^2 dr \\ &= r^3 \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial r} 2r^2 dr \\ &= r^3 \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_0^{+\infty} - 2r^2 g \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 4g r dr, \end{aligned}$$

g 和 $\frac{\partial g}{\partial r}$ 在 $r \rightarrow \infty$ 处为 0, 则 $\int_0^{+\infty} \nabla_{\perp}^2 g r^3 dr = \int_0^{+\infty} 4g r dr$. 而 Q , $a \nabla_{\perp}^2 a^*$ 及其一阶偏导数均满足 $r \rightarrow \infty$ 时为 0, 于是

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp}^2 (a \nabla_{\perp}^2 a^* + a^* \nabla_{\perp}^2 a) r^3 dr \\
&= \int_0^{+\infty} \mathcal{A} (a \nabla_{\perp}^2 a^* + a^* \nabla_{\perp}^2 a) r dr \\
&= 4 \int_0^{+\infty} [\nabla_{\perp} \cdot (a \nabla_{\perp} a^*) - (\nabla_{\perp} a \cdot \nabla_{\perp} a^*) \\
&\quad + \nabla_{\perp} \cdot (a^* \nabla_{\perp} a) - (\nabla_{\perp} a^* \cdot \nabla_{\perp} a)] r dr \\
&= -8 \int_0^{+\infty} |\nabla_{\perp} a|^2 r dr,
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (\nabla_{\perp}^2 a \nabla_{\perp} a^* + \nabla_{\perp}^2 a^* \nabla_{\perp} a) r^3 dr \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) \frac{\partial a^*}{\partial r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a^*}{\partial r} \right) \frac{\partial a}{\partial r} \right] r^3 dr \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) \frac{\partial a^*}{\partial r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a^*}{\partial r} \right) \frac{\partial a}{\partial r} \right] r^2 dr \\
&= r^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) \frac{\partial a^*}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a^*}{\partial r} \right) \frac{\partial a}{\partial r} \right] \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) \frac{\partial a^*}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a^*}{\partial r} \right) \frac{\partial a}{\partial r} \right] 2r dr \\
&= - \int_0^{+\infty} \left[r \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} \frac{\partial a^*}{\partial r} + r \frac{\partial^2 a^*}{\partial r^2} \frac{\partial a}{\partial r} + 2 \frac{\partial a^*}{\partial r} \frac{\partial a}{\partial r} \right] 2r dr \\
&= - \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} \frac{\partial a^*}{\partial r} 2r^2 dr - \int_0^{+\infty} \left[r \frac{\partial^2 a^*}{\partial r^2} \frac{\partial a}{\partial r} + 2 \frac{\partial a^*}{\partial r} \frac{\partial a}{\partial r} \right] 2r dr \\
&= -2r^2 \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} \frac{\partial a^*}{\partial r} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial r} \left(4 \frac{\partial a^*}{\partial r} r + 2r^2 \frac{\partial^2 a^*}{\partial r^2} \right) dr \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial r} \left(4 \frac{\partial a}{\partial r} r + 2r^2 \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} \right) dr \\
&= 0,
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R^2}{\partial z^2} &= \frac{8}{N} \int_0^{+\infty} |\nabla_{\perp} a|^2 r dr \\
&\quad - \frac{1}{N} \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (2 |a|^2 \nabla_{\perp} F) r^3 dr.
\end{aligned}$$

附录 C

考虑相对论的单独作用时,

$$\int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (2 |a|^2 \nabla_{\perp} F) r^3 dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left[2 |a|^2 \nabla_{\perp} a_1 \left(1 - \frac{\mathcal{K} r}{Q} \right) \right] r^3 dr \\
&= 2a_1 \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left[(Q^2 - 1) \nabla_{\perp} \left(1 - \frac{\mathcal{K} r}{Q} \right) \right] r^3 dr \\
&= -2a_1 \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left[(Q^2 - 1) \left(\frac{\mathcal{K} r}{Q} \right) \right] r^3 dr \\
&\quad + 2a_1 \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left[\frac{\mathcal{K} r}{Q} \nabla_{\perp} (Q^2 - 1) \right] r^3 dr \\
&= -8a_1 \int_0^{+\infty} \left[(Q^2 - 1) \left(\frac{\mathcal{K} r}{Q} \right) \right] r dr + 2a_1 r^3 \left[\frac{\mathcal{K} r}{Q} \frac{\partial}{\partial r} Q^2 \right] \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad - 4a_1 \int_0^{+\infty} \left[\frac{\mathcal{K} r}{Q} 2Q \frac{\partial}{\partial r} Q \right] r^2 dr \\
&= -8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\left(Q - \frac{1}{Q} \right) \mathcal{K} r \right] r dr \\
&\quad - 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\mathcal{K} r \right] \frac{\partial}{\partial r} Q r^2 dr \\
&= 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} - Q \right) \mathcal{K} r \right] r dr \\
&\quad - 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\mathcal{K} r \right] \frac{\partial}{\partial r} (Q - 1) r^2 dr \\
&= 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} - Q \right) \mathcal{K} r \right] r dr - 8a_1 r^2 \mathcal{K} r \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[(Q - 1) \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{K} r) r^2 \right] dr \\
&= 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} - Q \right) \mathcal{K} r \right] r dr \\
&\quad + 8a_1 \int_0^{+\infty} (Q - 1) \left[2\mathcal{K} r + r \frac{\partial (\mathcal{K} r)}{\partial r} \right] r dr \\
&= 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} - Q + 2Q - 2 \right) \mathcal{K} r + (Q - 1) r \frac{\partial (\mathcal{K} r)}{\partial r} \right] r dr \\
&= 8a_1 \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{Q} + Q - 2 \right) \mathcal{K} r + (Q - 1) r \frac{\partial (\mathcal{K} r)}{\partial r} \right] r dr.
\end{aligned}$$

附录 D

考虑相对论效应与有质动力的共同作用时,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot (2 |a|^2 \nabla_{\perp} F) r^3 dr \\
&= \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left[2 |a|^2 \nabla_{\perp} a_1 \left(1 - \frac{\mathcal{K} r}{Q} \right) \right] r^3 dr \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left(2 |a|^2 \nabla_{\perp} \frac{\nabla_{\perp}^2 Q}{Q} \right) r^3 dr,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left(2 |a|^2 \nabla_{\perp} \frac{\nabla_{\perp}^2 Q}{Q} \right) r^3 dr &= 2 \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp}^2 \left[(Q^2 - 1) \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 Q}{Q} \right) \right] r^3 dr - 2 \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left[\frac{\nabla_{\perp}^2 Q}{Q} \nabla_{\perp} (Q^2 - 1) \right] r^3 dr \\
&= 8 \int_0^{+\infty} \left[(Q^2 - 1) \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 Q}{Q} \right) \right] r dr - 4 \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left[\nabla_{\perp}^2 Q \nabla_{\perp} Q \right] r^3 dr \\
&= 8 \int_0^{+\infty} \left[\left(Q - \frac{1}{Q} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \right] dr - 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \frac{\partial Q}{\partial r} \right] r^3 dr \\
&= 8 \left(Q - \frac{1}{Q} \right) \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \Big|_0^{+\infty} - 8 \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r} \right)^2 \right] r dr - 4 \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \frac{\partial Q}{\partial r} \right] r^2 dr \\
&= -8 \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r} \right)^2 \right] r dr - 4 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \frac{\partial Q}{\partial r} \right] r^2 \Big|_0^{+\infty} + 8 \int_0^{+\infty} \left[\left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \right] dr \\
&= -8 \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r} \right)^2 \right] r dr + 4 \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right)^2 \right] dr \\
&= -8 \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r} \right)^2 \right] r dr,
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left(2 |a|^2 \nabla_{\perp} F_3 \right) r^3 dr = \int_0^{+\infty} \nabla_{\perp} \cdot \left(2 |a|^2 \nabla_{\perp} F_2 \right) r^3 dr + 8 \int_0^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial r} \right)^2 \right] r dr.$$

-
- [1] Wagner R , Chen S Y , Maksimchuk A , Umstadter D 1997 *Phys. Rev. Lett.* **21** 3125
- [2] Lai G J , Ji P Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2399 (in Chinese) 赖国俊、季沛勇 2000 *物理学报* **49** 2399]
- [3] Milchberg H M , Durfee D G , III , McIlrath T J 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2494
- [4] Eder D C , Amendt P , DaSilva L B *et al* 1994 *Phys. Plasmas* **1** 1744
- [5] Tabak M , Hammer J , Glinsky M E *et al* 1994 *Phys. Plasmas* **1** 1626
- [6] Pukhov A , Meyer-ter-Vehn J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2686
- [7] Zhang J T 2001 *Acta Phys. Sin.* **5** 921 (in Chinese) 张家泰 2001 *物理学报* **5** 921]
- [8] Liu M W , Guo H , Zhang Y *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1419 (in Chinese) 刘明伟、郭宏、张宇等 2004 *物理学报* **53** 1419]
- [9] Borisov A B , Borovskiy A V , Shiryayev O B *et al* 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5830
- [10] Chiou T C 1996 *Phys. Plasmas* **3** 1700
- [11] Chen X L , Sudan R N 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2082
- [12] Sun G Z , Ott E , Lee Y C *et al* 1987 *Phys. Fluids* **30** 526
- [13] Kurki-suonio T , Morrison P J , Tajima T 1989 *Phys. Rev. A* **40** 3230

Self-focusing of ultra-intense short laser pulses in plasmas with various density distributions^{*}

Wang Wei-Min^{1)†} Zheng Chun-Yang²⁾

1) *Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China*

2) *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*

(Received 28 December 2004 ; revised manuscript received 18 March 2005)

Abstract

Effects of plasma density distributions on self-focusing of intense laser pulses propagating in an underdense cold plasma are investigated, where the laser intensity has a Gaussian distribution and the initial plasma density is cylindrical-symmetrically distributed. An evaluation function is derived to judge which type of plasma density distribution is more beneficial for the occurrence of self-focusing. Through analyzing and calculating the evaluation function, it is found that for a given laser field and with fixed initial plasma density along the central axis, which coincides with the axis of the laser beam, increasing plasma density with the distance from the axis favors self-focusing. Furthermore, the greater the density gradient, the more favorable. It is also found that the combined action of both relativistic and ponderomotive effects is of more advantage to self-focusing than that of relativistic effect alone. Numerical simulation confirms that the evaluation function is capable of accurately predicting the favorable role of plasma density distribution in producing laser self-focusing.

Keywords : self-focusing, relativistic effect, ponderomotive force, evaluation function

PACC : 5240D, 5260, 5225

^{*} Project supported by the National High Technology Development Program of China, the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 10375011, 10335020).

[†] E-mail : hbwwm1@126.com