

运用量子约束动力学对具有耗散 的量子位的追踪控制*

祝敬敏¹⁾ 王顺金^{1) 2)}

1) 四川大学物理系, 成都 610064)

2) 兰州重离子加速器国家实验室核理论中心, 兰州 730000)

(2006 年 1 月 16 日收到, 2006 年 3 月 23 日收到修改稿)

在有限温度环境内, 量子约束动力学及其追踪控制可使退相干系统的相干性稳定一段时间. 约束方程产生的控制场能够按量子比特的动力学状态进行控制(量子动力学轨道的反馈控制), 依靠量子比特的这种反馈效应, 可使量子位稳定在设定的时间内. 同时, 在量子位的稳定方面, 温度扮演一种消极的角色.

关键词: 量子约束动力学, 耗散量子位的控制, 追踪控制, 量子比特的反馈效应

PACC: 0365, 0367

1. 引 言

追踪控制在经典的工程动力学系统内已有很久的历史^[1,2]. 在最近几年, 它已被应用于量子分子系统^[3-6]. 2004 年, Lidar 和 Schneider 用此技术来控制存在于马尔柯夫环境中的单个量子比特的耗散, 他们阐述了一个量子比特的相干性可以被稳定一段有限的时间, 直到控制场发生奇异. 在这个方案里, 控制场被量子比特的状态瞬时调制. 在他们的文章里, 只讨论了纯失相过程, 系统与环境之间没有能量交换.

最近, 安钧鸿等^[7]用此技术讨论了在有限的温度环境内, 怎样控制与环境相互作用的单个量子比特的耗散过程以及与此相关的相干性稳定性问题. 他们讨论了一个量子比特在布洛赫球的一个大平面内的相干性可以被稳定一段有限的时间, 直到控制场发生奇异. 但是, 对一个耗散的量子比特最重要的控制, 是保持量子位的上下两个状态的稳定性. 这正是本文的目的.

在这篇文章里, 我们将应用类似的方法进一步研究一个量子比特的量子位的稳定性问题. 我们将阐明, 依据量子约束动力学, 可以设计一个具有量子比特动力学反馈效应的哈密顿量, 使一个量子比特

的量子位稳定一段有限的时间. 同时也将阐明, 控制的时间段的长短与量子比特的初始状态有关.

2. 主方程

考虑一个被时间有关的磁场驱动的二能级原子与环境热辐射场相互作用的系统, 环境效应被描述为一个量子比特与一个热辐射场的耦合, 其哈密顿量为^[8]

$$H = H_s + \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k (g_k b_k \sigma_+ + h.c.) \quad (1)$$

其中

$$H_s = \frac{1}{2} [W_z(t) \sigma_z + W_x(t) \sigma_x + W_y(t) \sigma_y],$$

$$W_z = \hbar \omega_0 + \frac{e\hbar}{mc} B_z,$$

$$W_x = \frac{e\hbar}{mc} B_x,$$

$$W_y = \frac{e\hbar}{mc} B_y.$$

上式第一项是在外磁场中的二能级原子的哈密顿量, 第二项是环境热辐射场(光子)的哈密顿量, 第三项是两者的相互作用, 其中 b_k^\dagger, b_k 分别表示环境热辐射场光子的产生、湮灭算符; ω_0, ω_k 分别是二能级原子的跃迁频率和辐射场频率; g_k 表示二能级原

* 国家自然科学基金(批准号: 10375039, 90503008), 教育部博士点基金和中国科学院兰州重离子加速器国家实验室理论中心基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

子和环境热辐射场的耦合强度.

按常规方法,考虑相互作用的二级微扰,在马尔柯夫近似下,可得到原子的约化密度矩阵的主方程为^[9,10](在自然单位中)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & - [H_s, \rho] - \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1) \\ & \times (\sigma_+ \sigma_- \rho + \rho \sigma_+ \sigma_- - 2\sigma_- \rho \sigma_+) \\ & - \frac{\gamma}{2}\bar{n}(\sigma_- \sigma_+ \rho + \rho \sigma_- \sigma_+ - 2\sigma_+ \rho \sigma_-), \quad (2) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{n} &= 1/e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1, \\ \gamma &= 2\pi \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega_k - \omega_0), \end{aligned}$$

参数 \bar{n} 是环境的平均光子数,参数 γ 是二能级原子的衰变率.

在一个量子比特的布洛赫球表示法中^[11],任意一个量子比特的密度矩阵为

$$\rho = \frac{1 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2},$$

式中 \mathbf{r} 是物理空间的三维矢量,称为密度矩阵 ρ 的布洛赫矢量,可以证明: $|\mathbf{r}| \leq 1$, 当且仅当 ρ 是纯态时,等号成立.在这种表示法中,纯度为^[12]

$$P = 2\text{Tr}(\rho^2) - 1 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2.$$

已证明,保持主方程初态的纯度 P 不变,是不可能的^[13,14].

可证明

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \text{Tr}(\rho \sigma_i) \\ &= \text{Tr} \frac{1 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \sigma_i \\ &= r_i \quad (i = x, y, z), \end{aligned}$$

很显然 r_i 是相应 σ_i 的期望值.根据 σ_i 间的对易关系可知,在量子力学中不能同时测得 r_x, r_y 和 r_z 的确切本征值.

在量子比特的布洛赫球表示法中,从原子的约化密度矩阵的主方程(2)对 σ_i 求平均可得

$$\dot{\mathbf{r}} = (M_0 + M(t))\mathbf{r}(t) + \mathbf{k}, \quad (3)$$

其中环境退相干部分为

$$M_0 = \begin{pmatrix} -\frac{(2\bar{n}+1)\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(2\bar{n}+1)\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -(2\bar{n}+1)\gamma \end{pmatrix},$$

外场控制部分为

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & -W_z(t) & W_y(t) \\ W_z(t) & 0 & -W_x(t) \\ -W_y(t) & W_x(t) & 0 \end{pmatrix},$$

常数项为

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \end{pmatrix};$$

具体写出后的运动方程为

$$\dot{r}_x = -\frac{2\bar{n}+1}{2}\gamma \cdot r_x - W_z r_y + W_y r_z, \quad (4)$$

$$\dot{r}_y = -\frac{2\bar{n}+1}{2}\gamma \cdot r_y + W_z r_x - W_x r_z, \quad (5)$$

$$\dot{r}_z = -(2\bar{n}+1)\gamma \cdot r_z - W_y r_x + W_x r_y - \gamma. \quad (6)$$

从这些方程,很容易解出不加外磁场时主方程(3)的定态解为

$$\begin{aligned} r_x &= 0, \\ r_y &= 0, \\ r_z &= -\frac{1}{2\bar{n}+1}. \end{aligned}$$

3. 量子位的稳定性

方程(6)的结构如下:第一项为环境耗散项,第二、三两项为外场控制项,用于抵消环境耗散,第四项为常数项.取初值时,一定要注意,外场控制项的值不能为零,否则将达不到控制的目的.

控制的目的是保持 $r_z = \text{常数}$,即使方程(6)的右边等于零,这是微分动力学约束条件.很显然,加上约束条件后,共有四个方程,但有六个未知函数(三个 r_i 和三个 W_i),必须给定(输入)两个函数关系式才能确定(输出)其余两个未知函数.当然有多种方法可达到此目的,其中一个方法是:令 $W_x(t) = W_x(0), W_y(t) = W_y(0)$. 以下我们将证明,依据量子约束动力学,借助于由一个量子比特本身的动力学状态控制的外场,一个量子比特的量子位能被稳定一段时间,其稳定时间的长短依赖于这个量子比特的初态.

由于 $r_z = \text{常数}$, $\dot{r}_z = 0$.由(6)式可推出

$$r_z = \frac{W_x r_y - W_y r_x - \gamma}{(2\bar{n}+1)\gamma},$$

进而可得

$$W_x \dot{r}_y = W_y \dot{r}_x, \quad (7)$$

由(4)和(5)式可得

$$r_x \dot{r}_x + r_y \dot{r}_y = -\frac{(2\bar{n}+1)}{2}\gamma(r_x^2 + r_y^2) + (W_y r_x - W_x r_y)r_z, \quad (8)$$

由方程(5)可求出

$$W_z = \frac{1}{r_x}(\dot{r}_y + \frac{2\bar{n}+1}{2}\gamma r_y + W_x r_z). \quad (9)$$

控制场的一个重要特征是 W_z 依赖于 $r_x(t)$, $r_y(t)$ 和 $r_z(t)$ 这正显示了由动力学约束而导致的动力学追踪和反馈效应. 因此我们称这种方法为基于约束动

力学的追踪控制(追踪控制,是借助于动力学约束而实现的,利用被控制系统的瞬时动力学状态的反馈效应而实现的控制^[13]). 这种技术最近已在腔场量子电动力学的实验中被证实^[15].

给定一组初值时,由方程(7)和(8)可得 r_x, r_y 的解析解,由上述解析解代入方程(9)可得不同温度、不同初值 r_z 下的控制场 W_z 随时间的演化(图1),以及有控制与无控制的 r_z, r_x 和 r_y 随时间的演化(图2).

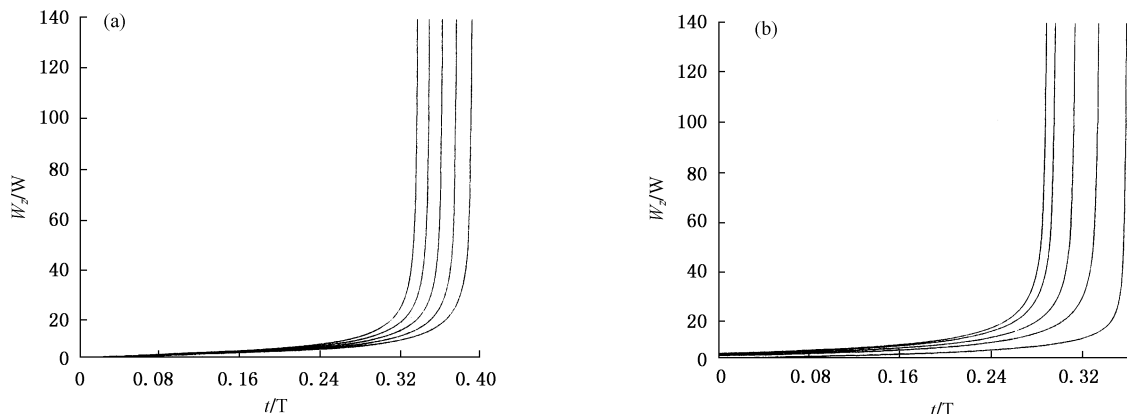


图1 (a)不同温度情况下的控制场随时间的演化,温度用 \bar{n} 标志,从外到内依次代表 $r_z = \sqrt{0.5}$ 时, $\bar{n} = 1, 2, 3, 4, 5$ 时的 W_z 的演化 (b)不同初值 r_z 下的控制场随时间的演化情况,从外到内依次代表 $\bar{n} = 1$ 时, $r_z = \sqrt{0.5}, \sqrt{0.7}, \sqrt{0.8}, \sqrt{0.9}, \sqrt{0.95}$ 时的 W_z 的演化(由初值可知 $0 \leq r_z \leq \sqrt{0.95}$) 其他参数值依次取: $\gamma = 0.1, W_x = 1, W_y = 1.2, r_x = 0.1, r_y = 0.2, \chi, W_x, W_y$ 均代表能量,在本文中,我们以 $W = W_x$ 为基本能量单位, \bar{n}, r_i 为无量纲的量,则 t 的单位为: $T = 1/W$)

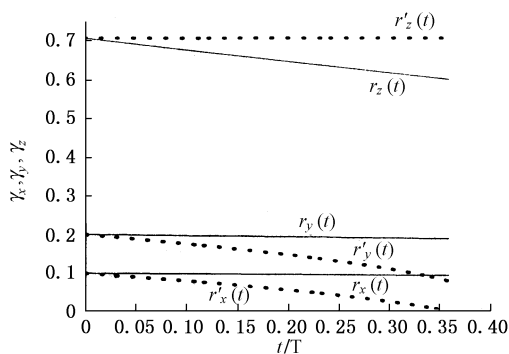


图2 有控制的 r'_x, r'_y, r'_z (虚线)与无控制的 r_x, r_y, r_z (实线)随时间的演化情况(参数值依次取: $\gamma = 0.1, W_x = 1, W_y = 1.2, r_x = 0.1, r_y = 0.2, r_z = \sqrt{0.5}$)

图1(a)画出了不同温度下的控制场随时间的演化情况.在这里,温度用 \bar{n} 标志,从外到内依次代表 $\bar{n} = 1, 2, 3, 4, 5$ 时的 W_z 的演化曲线.很显然,在演化过程中,控制场最终趋于无穷大,温度越高,控制场趋于无穷大的程度越强.图2中表明有控制的 r_x 的演化情况,是 r_x 很快趋于零.根据方程(9),

这也正是控制场趋于无穷大的原因.这意味着我们用有限的控制场只能使单个量子比特的量子位稳定一段有限的时间,事实上控制场的奇异行为是追踪控制的一个重要特征^[5];文献[13]已证明这种奇异行为是不可避免.图1(a)也说明了随着温度的升高,能控制的量子位的稳定的时间段越来越短,这表示温度在量子位控制方面起着消极的作用.图1(b)画出了不同初值 r_z 下的控制场随时间的演化情况,从外到内依次代表 $r_z = \sqrt{0.5}, \sqrt{0.7}, \sqrt{0.8}, \sqrt{0.9}, \sqrt{0.95}$ 时的 W_z 的演化曲线,它表明了能控制的时间的长短与 r_z 的初值有关,随着 r_z 的增大,能控制的时间段变短.

图2画出了受控制的 r'_x, r'_y, r'_z (虚线)与不受控制的 r_x, r_y, r_z (实线)随时间的演化情况.从图2可看出,在保持量子位 r_z 为一常数即控制了 r_z 的衰减的同时,加速了 r_x, r_y 的衰减.这正体现了泡利算符 σ_x, σ_y 和 σ_z 之间的不对易性.

4. 结 论

综上所述, 依靠量子约束动力学, 可在有限温度环境下, 存在耗散的单个量子比特的量子位保持

稳定. 本文提供了一种简单的追踪控制方案. 我们发现, 单个量子比特的量子位可以稳定一段时间, 但以加速布洛赫矢量的其他两个矢量的衰减为代价. 在这篇文章里所运用的控制策略在量子信息或量子计算方面也许有着潜在的应用价值.

-
- [1] Hirschorn R M 1979 *SIAM J. Control Optim.* **17** 289
- [2] Hirschorn R M 1981 *IEEE Trans. Autom. Control.* **26** 593
- [3] Chen Y, Gross P, Ramakrishna V, Rabitz H 1995 *J. Chem. Phys.* **102** 8001
- [4] Gross P, Singh H, Rabitz H 1993 *Phys. Rev. A* **47** 4593
- [5] Zhu W, Smit M, Rabitz H 1999 *J. Chem. Phys.* **110** 1905
- [6] Zhu W, Rabitz H 2003 *J. Chem. Phys.* **119** 3619
- [7] An J H, Wang S J, Luo H G 2005 *Chin Phys. Lett.* **22** 3009
- [8] Wang S J. 2005 *Advanced Quantum theory and quantum many-body theory* (Chengdu : Sichuan University Press) [王顺金 2005 高等量子论与量子多体理论(成都 四川大学出版社)]
- [9] Wang S J, Nemes M C, Salgeriro A N, Weidenmuller H A 2002 *Phys. Rev. A* **66** :033608 – 1 – 8
- [10] Wang S J, An J H, Luo H G, Jia C L 2003 *Phys. A* **36** 829
- [11] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum computation and Quantum Information* (London : Cambridge University Press)
- [12] Alicki R, Lendi K 1987 *Quantum Dynamical Semi-groups and Applications*, No. 286 in *Lecture Notes in Physics* (Berlin : Springer-Verlag)
- [13] Lidar D A, Schneider S, quant-ph/0410048
- [14] Ketterle W, Pritchard D E 1992 *Phys. Rev. A* **46** 4051
- [15] Steck D A, Jacobs K, Mabuchi H, Bhattacharya T, Habib S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 223004

Quantum constraint dynamics and tracking control of a thermal dissipative qubit^{*}

Zhu Jing-Min¹⁾ Wang Shun-Jin^{1 2)†}

1) *Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*

2) *Nuclear Theory Center of HIRFL, Lanzhou 730000, China*

(Received 16 January 2006; revised manuscript received 23 March 2006)

Abstract

Quantum constraint dynamics and tracking control strategy to stabilize the coherence of a decoherent system is applied to a dissipative qubit system at a finite temperature. By using a control field dependent on the dynamical state of the qubit through the constraint equations, we show that the quantum state of the qubit can be preserved within a finite time duration by the feedback effect of the qubit system. It is also shown that the temperature plays a negative role in the control strategy.

Keywords : quantum constraint dynamics, control of the dissipative qubit, tracking control strategy, feedback effect from the qubit system

PACC : 0365, 0367

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10375039, 90503008), the Doctoral Fund of Ministry of Education of China and the Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, China.

[†] Corresponding author. E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn