第 55 卷 第 11 期 2006 年 11 月
1000-3290/2006/55(11)/5594-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55, No.11, November, 2006

Emden 方程的 Mei 对称性、Lie 对称性和 Noether 对称性*

顾书龙[1)2)] 张宏彬[2)]

1)(南京晓庄学院物理系,南京 210017)

2)(巢湖学院物理系,巢湖 238000)

(2006 年 3 月 20 日收到;2006 年 5 月 15 日收到修改稿)

研究 Emden 动力学方程的形式不变性即 Mei 对称性,给出其定义和确定方程,研究 Emden 方程的 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系,寻求系统的守恒量,给出一个例子说明结果的应用.

关键词:Emden 动力学方程, Mei 对称性, Noether 对称性, Lie 对称性

PACC:0320

1. 引 言

动力学系统的对称性与守恒量的研究在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位,也是分析力学的一个发展方向.近代利用对称性寻找系统守恒量的方法主要有 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 的形式不变性. Noether 对称性是指动力学系统的 Hamilton 作用量在无限小变换下保持不变的性质[1].但 Noether 对称性不仅限于 Hamilton 系统, Noether 对称性一定有它的守恒量,这是它的优点. Lie 对称性是运动微分方程在无限小变换下的一种不变性,或者说,将微分方程的解曲线集合映射为自身的一种对称性映射[2]. Lie 对称性不一定总导致守恒量,而要满足 Noether 等式或 Killing 方程才导致守恒量. Mei 的形式不变性是一种新的对称性,是梅凤翔于 2000 年提出来的.是力学系统的动力学函数在无限小变换下保持运动微分方程形式的一种不变性[3].

鉴于 Mei 的形式不变性与 Lie 对称性在寻求系统的守恒量方面具有同等的地位,为了使三种称谓相统一,文献[4]把 Mei 的形式不变性称为 Mei 对称性,把形式不变性的判据称为 Mei 对称性的确定方程.

Mei 对称性的提出受到学术界的关注,被迅速拓展到 Appell 系统[5—7], Nielsen 系统[8,9], Chaplygin 系统[10], Birkhoff 系统[11—15], Hamilton 系统[4,16],相空间中的力学系统[17], Vacco 系统[18],非保守系统[19]等.形成了利用对称性寻求系统守恒量的一种新的通用性方法.本文研究了 Emden 动力学方程的 Mei 对称性与守恒量,给出了 Emden 系统的 Mei 对称性的定义与确定方程,然后分别研究 Emden 系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性以及与 Lie 对称性的关系,寻求系统的守恒量.最后给出例子说明本文结果的应用.

2. Emden 方程的 Mei 对称性及其确定方程

Emden 约束方程表示为

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0, \tag{1}$$

满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q'', \tag{2}$$

式中 $L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - V(q)$ 为系统的 Lagrange 函数, T 为动能, V 为势能, Q'' 为非势广义力.引入 Euler 算子

$$E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial q}. \tag{3}$$

* 安徽省教育厅科研基金(批准号:2006KT263B)资助的课题.

方程(2)可写成

$$E(L) = Q''. \tag{4}$$

引入时间,广义坐标和广义动量的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t,$$
$$q^*(t^*) = q(t) + \Delta q, \tag{5}$$

其展开式为

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,q),$$
$$q^*(t^*) = q(t) + \varepsilon\xi(t,q), \tag{6}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ 为无限小变换的生成元.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial q}, \tag{7}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}}. \tag{8}$$

定义 如果方程(4)在无限小变换(6)式下形式保持不变,即

$$E(L^*) = Q''^* \tag{9}$$

成立,则称这种不变性为 Emden 方程的 Mei 对称性.

定理 1 对于给定的 Emden 方程(2),如果无限小变换(6)式的生成元 ξ_0,ξ 满足

$$E[\chi^{(1)}(L)] - \chi^{(1)}(Q'') = 0, \tag{10}$$

则系统(2)是 Mei 对称的.

证 展开 L^*,Q''^* 有

$$L^* = L(t,q,\dot{q}^*) + \varepsilon[\chi^{(1)}(L)] + o(\varepsilon^2), \tag{11}$$

$$Q''^* = Q''(t,q,\dot{q}) + \varepsilon[\chi^{(1)}(Q'')] + o(\varepsilon^2), \tag{12}$$

将(11),(12)式代入方程(9),并利用(4)式,且忽略 ε^2 及以上高级小量,便得(10)式.把方程(10)称为 Emden 方程的 Mei 对称性确定方程.

3. Emden 方程的 Mei 对称性与 Noether 对称性

Emden 方程(2)的 Mei 对称性不一定总导致守恒量.下面的定理给出系统的 Mei 对称性导致 Noether 守恒量的条件.

定理 2 对于给定的 Emden 方程(2),如果无限小变换(6)式的生成元 ξ_0,ξ 满足 Mei 对称性确定方程(10),且存在规范函数 $G(t,q,\dot{q})$ 使 Noether 等式

$$\xi_0\frac{\partial L}{\partial t} + \xi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + L\dot{\xi}_0 + Q''(\xi - \dot{q}\xi_0) = -\dot{G} \tag{13}$$

成立,或者使广义 Killing 方程

$$L\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q}\dot{q}\right) + \xi_0\frac{\partial L}{\partial t} + \xi\frac{\partial L}{\partial q} + Q''(\xi - \dot{q}\xi_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \xi_0}{\partial t}q - \frac{\partial \xi_0}{\partial q}\dot{q}\right) = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q}\dot{q},$$

$$L\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}} - \dot{q}\frac{\partial \xi_0}{\partial q}\right) = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \tag{14}$$

成立,则系统的 Mei 对称性将导致如下守恒量:

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\xi - \dot{q}\xi_0) + G = \text{const}. \tag{15}$$

下面给出定量 2 的逆定量.

定理 3 对于给定的 Emden 方程(2)如果有满足 Neother 等式(13)或 Killing 等式(14)的无限小生成元 ξ_0,ξ,使 Mei 对称性确定方程(10)成立,那么方程(2)存在守恒量(15)式是相应于 Mei 对称性守恒量.

比较(10)式和(13)式,(14)式可以看出,Emden 系统的对称性与 Noether 对称性一般是不同的.

4. Emden 方程的 Mei 对称性与 Lie 对称性

下面的定理给出 Emden 方程的 Mei 对称性与 Lie 对称性之间的关系,并给出相应的逆定量.

由方程(2)可求出 Emden 系统的广义加速度

$$\ddot{q} = \alpha(t,q,\dot{q}). \tag{16}$$

定理 4 对于给定的 Emden 方程(2),如果无限小变换(6)式的生成元 ξ_0,ξ 满足 Mei 对称性确定方程(10),而且使 Lie 对称性确定方程

$$\ddot{\xi} - \dot{q}\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha = \chi^{(1)}(\alpha) \tag{17}$$

成立,那么方程(2)的 Mei 对称性导致 Lie 对称性.

定理 5 对于给定的 Emden 方程(2),如果无限小变换(6)式的生成元 ξ_0,ξ 满足 Lie 对称性确定方程(17),而且使 Mei 对称性确定方程(10)成立,那么系统(2)的 Lie 对称性导致 Mei 对称性.

定理 6 对于给定的 Emden 系统(2),如果有满足 Mei 对称性确定方程(10)的无限小生成元 ξ_0,ξ,

使 Lie 对称性确定性方程(17)成立,且存在规范函数 $G(t,q,\dot{q})$,满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + \chi^{(1)}(L) + Q''(\xi - \dot{q}\,\xi_0) = -\dot{G}, \quad (18)$$

那么系统(2)的 Mei 对称性将导致如下守恒量:

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\xi - \dot{q}\,\xi_0) + G = \text{const}. \quad (19)$$

证

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \dot{L}\,\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\xi - \dot{q}\,\xi_0) \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{\xi} - \ddot{q}\,\xi_0 - \dot{q}\,\dot{\xi}_0) - L\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial q}\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{\xi} - \dot{q}\,\dot{\xi}_0) - Q''(\xi - \dot{q}\,\xi_0) \\ &= (\xi - \dot{q}\,\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q''\right) = 0. \quad (20)\end{aligned}$$

定理 7 对于给定的 Emden 系统(2),如果有满足 Lie 对称性确定方程(17)的无限小生成元 ξ_0,ξ,使 Mei 对称性确定方程(10)式成立,且存在规范函数 $G(t,q,\dot{q})$,使结构方程(19)成立,那么系统(2)存在的守恒量(19)式是相应于 Mei 对称性守恒量.

由定理 4、定理 5 可知,Emden 系统的 Mei 对称性与 Lie 对称性一般是不同的.

由于结构方程(18)等价于 Noether 等式(13),它们都可归结为广义 Killing 方程(14).比较定理 2 和定理 6 可知,Mei 对称性和 Lie 对称性都是在满足 Noether 等式的条件下导致 Noether 守恒量.在利用对称性寻找系统守恒量的理论研究与应用过程中,Mei 对称性是继 Lie 对称性之后的又一种寻找守恒量的方法.

5. 算 例

设系统受 Emden 约束

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0, \quad (21)$$

取

$$L = \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2, \quad (22)$$

$$Q'' = -t^2q^5, \quad (23)$$

讨论在群的无限小变换下的对称性.

5.1. Noether 对称性

Noether 等式(13)给出

$$\xi_0\frac{\partial L}{\partial t} + \xi\frac{\partial L}{\partial q} + (\dot{\xi} - \dot{q}\,\dot{\xi}_0)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + L\dot{\xi}_0 + Q''(\xi - \dot{q}\,\xi_0) = -\dot{G}, \quad (24)$$

可解得

$$\xi_0 = -t,\ \xi = \frac{1}{2}q,\ G = \frac{1}{6}t^3q^6. \quad (25)$$

代入(15)式,系统有 Noether 守恒量

$$I = \frac{1}{2}\dot{q}^2t^3 + \frac{1}{2}q\dot{q}t^2 + \frac{1}{6}q^6t^3. \quad (26)$$

5.2. Lie 对称性

由(21)式得

$$\alpha(t,q,\dot{q}) = -\frac{2}{t}\dot{q} - q^5, \quad (27)$$

代入 Lie 对称性确定方程(17)式解得

$$\xi_0 = -t,$$
$$\xi = \frac{1}{2}q. \quad (28)$$

显然,Lie 对称性生成元(28)导致 Noether 守恒量(26).

5.3. Mei 对称性

将(22),(23)式代入 Mei 对称性确定方程(10)式,解得 Mei 对称性生成元

$$\xi_0 = -3t,\ \xi = 2q. \quad (29)$$

显然,Mei 对称性生成元(29)不导致 Noether 守恒量(26).又因为(29)式不满足 Lie 对称性确定方程,所以,Mei 对称性也不导致 Lie 对称性.注意到,如果将 Emden 方程表为形式

$$L = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right), \quad (30)$$

则生成元(28)是 Mei 对称性的.此时,可导致一类新型守恒量[20].

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235
[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 105
[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Tech.* **9** 120
[4] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯

2003 物理学报 **52** 2941]

[5] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[6] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟　军 2002 物理学报 **51** 1]

[7] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[8] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[9] Fang J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会 2002 物理学报 **51** 2183]

[10] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[11] Mei F X 2001 *J. Beijing Inst. Tech.* **10** 138

[12] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Appl. Math.* **23** 53

[13] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[14] Gu S L, Zhang H B 2004 *Chin. Phys.* **13** 979

[15] Gu S L, Zhang H B 2004 *J. Chin. Elec. Scien. Tech.* **2** 73

[16] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[17] Fang J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 500 (in Chinese) [方建会 2005 物理学报 **54** 500]

[18] Gu S L, Zhang H B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3983 (in Chinese) [顾书龙、张宏彬 2005 物理学报 **54** 3983]

[19] Qiao Y F, Zhao S H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 499 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2006 物理学报 **55** 499]

[20] Mei F X 2003 *Mech. Eng.* **25** 69 (in Chinese) [梅凤翔 2003 力学与实验 **25** 69]

Mei symmetry, Noether symmetry and Lie symmetry of an Emden system *

Gu Shu-Long[1)2)]　Zhang Hong-Bin[2)]

1) (*Department of Physics, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing* 210017, *China*)

2) (*Department of Physics, Chaohu College, Chaohu* 238000, *China*)

(Received 20 March 2006; revised manuscript received 15 May 2006)

Abstract

The Mei symmetry, i.e. the form invariance, of an Emden system is studied. The definition and determining equation of Mei symmetry in the Emden system are given. The relations between the Mei symmetry, the Lie symmetry and the Noether symmetry are studied, and the conserved quantities of the Emden system are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: Emden system, Mei symmetry, Noether symmetry, Lie symmetry

PACC: 0320

* Project supported by the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant No. 2006KT263B).