第 55 卷 第 12 期 2006 年 12 月
1000-3290/2006/55(12)/6222-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.12,December,2006

纠缠相干态的量子隐形传态*

刘传龙 郑亦庄†

(温州大学物理与电子信息学院,温州 325027)

(2005 年 10 月 13 日收到;2006 年 7 月 31 日收到修改稿)

提出利用双模纠缠相干态作为量子信道,实现纠缠相干态量子隐形传态的方案. 分别在非正交的相干态表象和另一个由相干态构成的正交态表象对双模纠缠相干态的隐形传态进行具体分析. 发现在相干态表象,虽然只要线性光学元件就可以完成隐形传态,但成功的概率小于 1/2,而在正交态表象,只要能分辨 4 个由相干态构成的 Bell 态,成功的概率就是 1.

关键词:隐形传态, 纠缠相干态, 纠缠相干态量子信道

PACC:0365

1. 引 言

量子隐形传态[1](quantum teleportation)是量子信息领域最令人惊奇的发现之一,它不但是量子力学系统存在非局域性质绝好的演示,而且在量子信息领域得到了一系列很有意义的应用,例如远程量子计算(telecomputation)[2]、远程量子克隆(telecloning)[3]和量子远程控制(quantum remote control)[4,5]等. 但是对量子隐形传态的研究大部分都集中在具有正交性的量子纠缠态上,而事实上非正交性的量子纠缠态在量子信息处理过程中也发挥着很大的作用[6].

最近一种非正交性的纠缠态——纠缠相干态(entangled coherent state)[7]引起了许多关注. van Enk 和 Hirota[8]研究了纠缠相干态的消相干问题,提出了如何利用纠缠相干态隐形传输一个薛定谔猫态的方案. 王晓光等[9]对纠缠相干态的特性进行分析计算,给出了一大类拥有一个纠缠比特(ebit)的两组分和多组分系统的纠缠相干态,他们还提出了一个简单方案用于实现两组分和多组分纠缠相干态的隐形传态[10]. Jeong 等[11]随后提出了通过一个混合纠缠相干信道隐形传输一个相干叠加态的方案. 此后,郑亦庄等[12]提出通过非最大纠缠相干信道对一个相干叠加态进行隐形传输的方案和利用线性光学装置采用一个两粒子最大纠缠相干态和一个三粒子纠缠相干态作为量子信道实现三粒子纠缠相干态的隐形传态的方案[13]. 新近,Cheong 等[14]提出运用线性光学方法可以近完全的(near-complete)隐形传输一个相干叠加态的方案. 人们对纠缠相干态感兴趣,首先是因为先前利用光场实现的隐形传态不是使用光子的极化纠缠态[15]就是使用光子的压缩态[16],而相干态是最接近经典态的量子态,由它构成的纠缠态对于光子吸收所造成的消相干有很强的鲁棒性[8]. 另外一个重要原因是大量基于纠缠相干态的量子信息处理过程有可能用已有的实验技术(例如线性光学)来实现.

本文提出利用两个双模纠缠相干态作为量子信道,实现纠缠相干态量子隐形传态的两种方案. 首先考虑直接用纠缠相干态作量子信道的隐形传态,这种方法不需要 Bell 测量,只需要光子数奇偶测量,但成功传输的概率小于 1/2. 然后用非正交的相干态构造一对正交基,并由此构造 4 个 Bell 态,通过 Bell 测量来完成双模纠缠相干态的隐形传态,这时只要量子信道是最大纠缠态,隐形传态成功的概率是 1. 还对信道是非最大纠缠态的情况作了讨论,指出在信道不是最大纠缠时,对不同的方案可以采用不同的策略来完成纠缠相干态的量子隐形传态.

* 浙江省自然科学基金(批准号:102068)资助的课题.

† E-mail:yzzheng@wzu.edu.cn

2. 纠缠相干态隐形传态的量子通道

假设发送者(Alice)想要把一个未知的双模纠缠相干态传送给远处的接收者(Bob)，我们将这个态写为

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{N_{12}}}(x|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2 + y|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2), \tag{1}$$

式中，N_{12}是归一化因子，x 和 y 是未知复数. 根据 Bennett 的理论[1]，实现量子隐形传态的先决条件是 Alice 和 Bob 要共享有纠缠态粒子构成的量子信道. 在标准的隐形传态方案中，量子信道是由某种最大纠缠态构成，而且传输一个两粒子纠缠态至少需要一个三粒子最大纠缠态作信道[17]. 然而两粒子以上的纠缠态性质尚不完全清楚，制备的难度也相当大，所以我们选择两个双模纠缠相干态作为量子信道来实现双模纠缠相干态的隐形传态. 由于相干态是非正交的，我们先对它的纠缠性质作简单介绍.

一个一般的两组分纠缠相干态可写为

$$|\psi\rangle = \mu|\alpha\rangle|\beta\rangle + \nu|\gamma\rangle|\delta\rangle, \tag{2}$$

式中，μ，ν 是复数，$|\alpha\rangle$|$\gamma\rangle$是组分 1 的相干态，$|\beta\rangle$，$|\delta\rangle$是组分 2 的相干态，$\langle\alpha|\gamma\rangle$，$\langle\beta|\delta\rangle$不为零. 可以证明[8]，$|\psi\rangle$是最大纠缠态的条件为

$$\begin{aligned}\mu &= -\nu,\\ \langle\alpha|\gamma\rangle &= \langle\beta|\delta\rangle.\end{aligned} \tag{3}$$

对于玻色子纠缠相干态，通常构造以下的 4 个双模纠缠态作为准 Bell 态：

$$|C_1\rangle^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{N_1}}(|\alpha\rangle|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle|-\alpha\rangle), \tag{4}$$

$$|C_2\rangle^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{N_2}}(|\alpha\rangle|-\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle|\alpha\rangle), \tag{5}$$

式中 N_1，N_2 是归一化因子. 容易看出，$|C_1\rangle^-$，$|C_2\rangle^-$是最大纠缠态，$|C_1\rangle^+$，$|C_2\rangle^+$不是最大纠缠态，而且由于相干态是非正交的，这 4 个准 Bell 态不能构成一组完整的测量基. 因此，若直接用纠缠相干态作量子信道，我们无法用 Bennett 的方案完成纠缠相干态的隐形传态. Jeong 等[11]为此用两个线性独立的非正交相干态$|\alpha\rangle$和$|-\alpha\rangle$构造了一对正交基

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\omega}}(\cos\omega|\alpha\rangle - \sin\omega|-\alpha\rangle), \tag{6}$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\omega}}(-\sin\omega|\alpha\rangle + \cos\omega|-\alpha\rangle), \tag{7}$$

式中 $N_\omega = \cos^2 2\omega$ 是归一化因子，其中参数 ω 由下式定义：

$$\sin 2\omega = \langle\alpha|-\alpha\rangle = \exp(-2|\alpha|^2). \tag{8}$$

利用$|\psi_+\rangle$和$|\psi_-\rangle$可以定义 4 个最大纠缠的 Bell 态，

$$|B_1\rangle^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle|\psi_+\rangle \pm |\psi_-\rangle|\psi_-\rangle), \tag{9}$$

$$|B_2\rangle^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle|\psi_-\rangle \pm |\psi_-\rangle|\psi_+\rangle). \tag{10}$$

将它们用$|\alpha\rangle$和$|-\alpha\rangle$重新表示，有

$$\begin{aligned}|B_1\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{2}N_\omega}\Big[&|\alpha\rangle|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle|-\alpha\rangle\\ &- \sin2\omega(|\alpha\rangle|-\alpha\rangle + |-\alpha\rangle|\alpha\rangle)\Big],\end{aligned} \tag{11}$$

$$|B_1\rangle^- = \frac{1}{\sqrt{2N_\omega}}(|\alpha\rangle|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle|-\alpha\rangle), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}|B_2\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{2}N_\omega}\Big[&|\alpha\rangle|-\alpha\rangle + |-\alpha\rangle|\alpha\rangle\\ &- \sin2\omega(|\alpha\rangle|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle|-\alpha\rangle)\Big],\end{aligned} \tag{13}$$

$$|B_2\rangle^- = \frac{1}{\sqrt{2N_\omega}}(|\alpha\rangle|-\alpha\rangle - |-\alpha\rangle|\alpha\rangle). \tag{14}$$

容易看出，$|B_1\rangle^-$，$|B_2\rangle^-$是与$|C_1\rangle^-$，$|C_2\rangle^-$同类型的最大纠缠态，而$|B_1\rangle^+$，$|B_2\rangle^+$只在$|\alpha|\to\infty$时才成为与$|C_1\rangle^+$，$|C_2\rangle^+$同类型的非最大纠缠态. 但是在以$|\psi_+\rangle$和$|\psi_-\rangle$为正交基的表象里$|B_1\rangle^{\pm}$，$|B_2\rangle^{\pm}$都是最大纠缠态. 我们将以$|C_1\rangle^-$，$|C_2\rangle^-$类的最大纠缠态作量子信道，分别在相干态表象和以$|\psi_+\rangle$和$|\psi_-\rangle$为正交基的表象里进行纠缠相干态的隐形传态.

3. 纠缠相干态的量子隐形传态

3.1. 相干态表象里的隐形传态

假设 Alice 与 Bob 事先建立了两个最大纠缠的双模纠缠相干态作为量子信道，

$$|D\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{N}}(|\alpha\rangle_3|\alpha\rangle_4 - |-\alpha\rangle_3|-\alpha\rangle_4), \tag{15}$$

$$|D\rangle_{56} = \frac{1}{\sqrt{N}}(|\alpha\rangle_5|\alpha\rangle_6 - |-\alpha\rangle_5|-\alpha\rangle_6), \tag{16}$$

式中，

$$N = 2[1 - \exp(-4|\alpha|^2)]. \tag{17}$$

他们欲传送的纠缠相干态为

$$|\psi\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{N_{12}}}(x|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2+y|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2),\tag{18}$$

式中，N_{12}是归一化因子，x 和 y 是未知复数. 由以上讨论可知，由于相干态是非正交态，在相干态表象不能构造最大纠缠的 4 个 Bell 态，所以不能通过 Bell 测量来完成隐形传态. 但是已经发现[8]，可以利用简单的线性光学元件和光子计数器以一定的概率来完成这一任务. 这种方法的关键是用一个分束器 B 和两个 $-\pi/2$ 移相器 P 构成一个基本操作

$$T_{ij}=P_jB_{ij}P_j,$$

因为一个无损耗的 50/50 分束器对组分 i,j 的作用为

$$B_{ij}=\exp[\mathrm{i}\pi(a_i^\dagger a_j+a_j^\dagger a_j)/4],$$

而一个 $-\pi/2$ 移相器的作用为

$$P_j=\exp(-\mathrm{i}a_j^\dagger a_j/2).$$

这里的 $a_i^\dagger$ 和 a_i 等分别是玻色子的产生和湮没算符，所以 $T_{ij}=P_jB_{ij}P_j$ 可以对相干态产生以下作用：

$$T_{ij}|\alpha\rangle_i|\beta\rangle_j=|(\alpha+\beta)/\sqrt{2}\rangle_i|(\alpha-\beta)/\sqrt{2}\rangle_j.\tag{19}$$

使用这个基本操作器件，可以在相干态表象实现纠缠相干态的隐形传态.

已知 Alice 和 Bob 拥有的初态为

$$|\Psi\rangle=|\psi\rangle_{12}|D\rangle_{34}|D\rangle_{56},\tag{20}$$

其中模式 1、模式 2、模式 3、模式 5 在 Alice 一边，模式 4、模式 6 在 Bob 一边. Alice 首先将 T_{ij} 作用在模式 1 和模式 3 上，初态转化为

$$\begin{aligned}|\Psi'\rangle&=T_{13}|\psi\rangle_{12}|D\rangle_{34}|D\rangle_{56}\\&=\frac{1}{\sqrt{N_{12}N}}\Big[x(|\sqrt{2}\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2|0\rangle_3|\alpha\rangle_4\\&\quad-|0\rangle_1|\alpha\rangle_2|\sqrt{2}\alpha\rangle_3|-\alpha\rangle_4)\\&\quad+y(|0\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\sqrt{2}\alpha\rangle_3|\alpha\rangle_4\\&\quad-|-\sqrt{2}\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|0\rangle_3|-\alpha\rangle_4)\Big]|D\rangle_{56}.\end{aligned}\tag{21}$$

接着，Alice 对模式 1、模式 3 进行一次双模光子数测量，我们知道对态(21)式在模式 1 和模式 3 分别发现 k 个和 l 个光子的概率为

$$P(k,l)=|{}_1\langle k|{}_3\langle l|\Psi'\rangle|^2.\tag{22}$$

因此，要得到非零的测量结果，k,l 不能同时为零. 假设 $k\neq0,l=0$，光子数测量后，量子态为

$$\begin{aligned}|\Psi''\rangle_{k0}&={}_1\langle k|{}_3\langle 0|\Psi'\rangle\\&=\frac{F_k}{\sqrt{N_{12}N}}\Big[x|\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_4\\&\quad-(-1)^ky|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_4\Big]|D\rangle_{56},\end{aligned}\tag{23}$$

式中

$$\begin{aligned}F_k&=\langle k|\sqrt{2}\alpha\rangle\\&=\exp(-|\alpha|^2)(\sqrt{2}\alpha)^k/\sqrt{k!}.\end{aligned}$$

假设 $k=0,l\neq0$，光子数测量后，量子态为

$$\begin{aligned}|\Psi''\rangle_{0l}&={}_1\langle 0|{}_3\langle l|\Psi'\rangle\\&=\frac{F_l}{\sqrt{N_{12}N}}\Big[-x|\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_4\\&\quad+(-1)^ly|-\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_4\Big]|D\rangle_{56},\end{aligned}\tag{24}$$

式中

$$\begin{aligned}F_l&=\langle l|\sqrt{2}\alpha\rangle\\&=\exp(-|\alpha|^2)(\sqrt{2}\alpha)^l/\sqrt{l!}.\end{aligned}$$

Alice 再次将 T_{25} 作用在态(23)或(24)式上，然后再进行一次双模光子数测量，可以得到以下 4 种结果：

$$\begin{aligned}|\Psi'''\rangle_{n0k0}&={}_2\langle n|{}_5\langle 0|T_{25}|\Psi''\rangle_{k0}\\&=\frac{F_kF_n}{N\sqrt{N_{12}}}\Big[x|\alpha\rangle_4|\alpha\rangle_6\\&\quad+(-1)^{k+n}y|-\alpha\rangle_4|-\alpha\rangle_6\Big],\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}|\Psi'''\rangle_{n00l}&={}_2\langle n|{}_5\langle 0|T_{25}|\Psi''\rangle_{0l}\\&=-\frac{F_lF_n}{N\sqrt{N_{12}}}\Big[x|-\alpha\rangle_4|\alpha\rangle_6\\&\quad+(-1)^{l+n}y|\alpha\rangle_4|-\alpha\rangle_6\Big],\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}|\Psi'''\rangle_{0mk0}&={}_2\langle 0|{}_5\langle m|T_{25}|\Psi''\rangle_{k0}\\&=-\frac{F_kF_m}{N\sqrt{N_{12}}}\Big[x|\alpha\rangle_4|-\alpha\rangle_6\\&\quad+(-1)^{k+m}y|-\alpha\rangle_4|\alpha\rangle_6\Big],\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}|\Psi'''\rangle_{0m0l}&={}_2\langle 0|{}_5\langle m|T_{25}|\Psi''\rangle_{0l}\\&=\frac{F_lF_m}{N\sqrt{N_{12}}}\Big[x|-\alpha\rangle_4|-\alpha\rangle_6\\&\quad+(-1)^{l+m}y|\alpha\rangle_4|\alpha\rangle_6\Big],\end{aligned}\tag{28}$$

式中

$$\begin{aligned}F_n&=\langle n|\sqrt{2}\alpha\rangle\\&=\exp(-|\alpha|^2)(\sqrt{2}\alpha)^n/\sqrt{n!},\end{aligned}$$

$$F_m = \langle m | \sqrt{2}\alpha \rangle = \exp(-|\alpha|^2)(\sqrt{2}\alpha)^m / \sqrt{m!}.$$

Alice 将测量结果通过经典信道告诉 Bob. 根据 Alice 的信息,若 Bob 处的态是(25)式则 Bob 不必做任何操作,若态是(26),(27)或(28)式,则 Bob 要分别对它们进行以下操作:$(-1)^{a_4^\dagger a_4}$,$(-1)^{a_6^\dagger a_6}$ 或 $(-1)^{a_4^\dagger a_4 + a_6^\dagger a_6}$ 使它们转变为态(25)式. 这里的 $a_i^\dagger$ 和 a_i 分别是玻色子的产生和湮没算符. 由(25)式可以看出,如果 $k+n$ 为偶数,则方括号内的态就是要传送的态(18)式,隐形传态成功;如果 $k+n$ 为奇数,则只有完成转换

$$\begin{aligned} &|\alpha\rangle_4 |\alpha\rangle_6 \to |\alpha\rangle_4 |\alpha\rangle_6, \\ &|-\alpha\rangle_4 |-\alpha\rangle_6 \to -|-\alpha\rangle_4 |-\alpha\rangle_6, \end{aligned} \tag{29}$$

隐形传态才能成功,但是一般情况下转换(29)式不能由幺正变换完成,所以当 $k+n$ 为奇数隐形传态失败. 同理,对(26),(27)和(28)式的态,当 $l+n$,$k+m$ 和 $l+m$ 为偶数,隐形传态成功,当 $l+n$,$k+m$ 和 $l+m$ 为奇数,隐形传态失败.

由(25)—(28)式,我们可以计算隐形传态成功的概率. 因为在模式 1、模式 3 和模式 2、模式 5 中测到 k,n,l,m 个光子的概率为

$$\begin{aligned} &P(n,m,k,l) \\ &= |{}_2\langle n|{}_5\langle m| T_{25}\,{}_1\langle k|{}_3\langle l|\Psi'\rangle|^2, \end{aligned} \tag{30}$$

所以

$$\begin{aligned} P(n,0,k,0) &= P(n,0,0,l) \\ &= P(0,m,k,0) \\ &= P(0,m,0,l) \\ &= \frac{(\sqrt{2}\alpha)^{2n}(\sqrt{2}\alpha)^{2k}\exp(-4|\alpha|^2)}{4[1-\exp(-4|\alpha|^2)]^2 n!k!}. \end{aligned} \tag{31}$$

于是隐形传态成功的概率为

$$\begin{aligned} P &= 4\sum_{k+n=2j} P(n,0,k,0) \\ &= 4\sum_{n=2j+1}\sum_{k=2j+1} P(n,0,k,0) \\ &\quad + 4\sum_{n=2j}\sum_{k=2j} P(n,0,k,0) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{[1-\exp(-2|\alpha|^2)]^2}{[1+\exp(-2|\alpha|^2)]^2}\right) < \frac{1}{2} \\ &\qquad (j = 0,1,2,\cdots). \end{aligned} \tag{32}$$

以上的方案只要用分束器、移相器和光子计数器就能完成纠缠相干态的隐形传态,但是成功概率介于 50% 与 25% 之间,而且要求光子计数器能够区分光子数的奇偶,这在实验上还是很难做到的.

3.2. 正交基表象里的隐形传态

根据以上的讨论,可以将 Alice 和 Bob 共享的量子信道,即(15)和(16)式表示的态,用(6),(7)两式表示的正交基 $|\psi_+\rangle$ 和 $|\psi_-\rangle$ 表示为

$$|D\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle_3|\psi_+\rangle_4 - |\psi_-\rangle_3|\psi_-\rangle_4), \tag{33}$$

$$|D\rangle_{56} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle_5|\psi_+\rangle_6 - |\psi_-\rangle_5|\psi_-\rangle_6). \tag{34}$$

被传输的未知态(18)式则可以写为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{12} &= w'|\psi_+\rangle_1|\psi_+\rangle_2 + x'|\psi_+\rangle_1|\psi_-\rangle_2 \\ &\quad + y'|\psi_-\rangle_1|\psi_+\rangle_2 \\ &\quad + z'|\psi_-\rangle_1|\psi_-\rangle_2. \end{aligned} \tag{35}$$

式中

$$w' = (x\cos^2\omega + y\sin^2\omega)/\sqrt{N_{12}},$$

$$x' = y' = [(x+y)\cos\omega\sin\omega]/\sqrt{N_{12}},$$

$$z' = (x\sin^2\omega + y\cos^2\omega)/\sqrt{N_{12}}.$$

于是要传送的纠缠相干态和作为量子信道的两个纠缠对所构成的量子体系的总量子初态 $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{12}|D\rangle_{34}|D\rangle_{56}$ 也可以用正交基 $|\psi_+\rangle$ 和 $|\psi_-\rangle$ 表示,这使得我们可以通过 Bell 测量来完成纠缠相干态的隐形传态.

Alice 对粒子 1 和粒子 3 以及粒子 2 和粒子 5 分别进行由(9),(10)两式表示的 Bell 基测量,并将测量结果通过经典信道告诉 Bob,Bob 根据 Alice 的信息再进行适当的幺正操作,就可以得到所要传送的量子态,从而完成隐形传态. 例如,Alice 对粒子 1 和粒子 3 进行 Bell 测量,若结果为 $|B_1\rangle^+$,测量之后初态坍缩为

$$\begin{aligned} {}^{+}_{13}\langle B_1|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\Big[& w'|\psi_+\rangle_2|\psi_+\rangle_4 + x'|\psi_-\rangle_2|\psi_+\rangle_4 \\ & - y'|\psi_+\rangle_2|\psi_-\rangle_4 \\ & - z'|\psi_-\rangle_2|\psi_-\rangle_4\Big]|D\rangle_{56}. \end{aligned} \tag{36}$$

Alice 再对粒子 2 和粒子 5 做一次 Bell 测量,若结果为 $|B_2\rangle^-$,Bob 处的量子态为

$$\begin{aligned} &{}^{-}_{25}\langle B_2|{}^{+}_{13}\langle B_1|\Psi\rangle \\ &= \frac{1}{4}\Big[-w'|\psi_+\rangle_4|\psi_-\rangle_6 - x'|\psi_+\rangle_4|\psi_+\rangle_6 \end{aligned}$$

$$+ y'|\psi_-\rangle_4|\psi_-\rangle_6 + z'|\psi_-\rangle_4|\psi_+\rangle_6\Big]. \qquad (37)$$

这时 Bob 只要对粒子 4 和粒子 6 进行幺正操作 $(\mathrm{i}\sigma_y)_6(\sigma_z)_4(\sigma_z)_6$ 就可以将态(37)式转换为(35)式. 这里 $\sigma_i(i = x, y, z)$ 是 Pauli 算符,其作用是

$$\sigma_x|\psi_+\rangle = |\psi_-\rangle, \quad \sigma_x|\psi_-\rangle = |\psi_+\rangle; \qquad (38)$$

$$\mathrm{i}\sigma_y|\psi_+\rangle = -|\psi_-\rangle, \quad \mathrm{i}\sigma_y|\psi_-\rangle = |\psi_+\rangle; \qquad (39)$$

$$\sigma_z|\psi_+\rangle = |\psi_+\rangle, \quad \sigma_z|\psi_-\rangle = -|\psi_-\rangle. \qquad (40)$$

Alice 两次测量的 16 种结果和 Bob 应当进行的幺正操作列于表 1. 表 1 中的 I 为单位算子.

表 1 Alice 测量的结果和 Bob 应当进行的幺正操作

Alice 的测量基	测量之后 Bob 处模 4,6 可能的量子态	Bob 要做的幺正操作
$\lvert B_1\rangle_{13}^+\lvert B_1\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	$(\sigma_z)_4(\sigma_z)_6$
$\lvert B_1\rangle_{13}^+\lvert B_1\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	$(\sigma_z)_4$
$\lvert B_1\rangle_{13}^+\lvert B_2\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\sigma_z)_4(\mathrm{i}\sigma_y)_6$
$\lvert B_1\rangle_{13}^+\lvert B_2\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_6(\sigma_z)_4(\sigma_z)_6$
$\lvert B_1\rangle_{13}^-\lvert B_1\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	$(\sigma_z)_6$
$\lvert B_1\rangle_{13}^-\lvert B_1\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	(I)
$\lvert B_1\rangle_{13}^-\lvert B_2\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_6$
$\lvert B_1\rangle_{13}^-\lvert B_2\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - x'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - y'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - z'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_6(\sigma_z)_4(\sigma_z)_6$
$\lvert B_2\rangle_{13}^+\lvert B_1\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	$(\sigma_z)_6(\mathrm{i}\sigma_y)_4$
$\lvert B_2\rangle_{13}^+\lvert B_1\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_4$
$\lvert B_2\rangle_{13}^+\lvert B_2\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_4(\mathrm{i}\sigma_y)_6$
$\lvert B_2\rangle_{13}^+\lvert B_2\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_4(\sigma_x)_6$
$\lvert B_2\rangle_{13}^-\lvert B_1\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_4(\sigma_z)_4(\sigma_z)_6$
$\lvert B_2\rangle_{13}^-\lvert B_1\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[-\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 - z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6]$	$(\mathrm{i}\sigma_y)_4(\sigma_z)_4$
$\lvert B_2\rangle_{13}^-\lvert B_2\rangle_{25}^+$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 - z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\sigma_x)_4(\sigma_x)_6(\sigma_z)_6$
$\lvert B_2\rangle_{13}^-\lvert B_2\rangle_{25}^-$	$\frac{1}{4}[\omega'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + x'\lvert\psi_-\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6 + y'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_-\rangle_6 + z'\lvert\psi_+\rangle_4\lvert\psi_+\rangle_6]$	$(\sigma_x)_4(\sigma_x)_6$

由表 1 可以看出,两次测量后得到一种可能态的概率是 $(1/4)^2 = 1/16$,但因为一共有 16 种可能的态,所以隐形传态成功的概率为 1,这是第二种方案比第一种方案强的方面. 但是我们知道,只利用线性元件是不可能完全分辨 4 个 Bell 态的[18],因此如何对纠缠相干态进行 Bell 测量是第二种方案是否有价值的关键. 实际上,Jeong 等[11]已提出一种实验方案,可以用分束器、移相器和光子计数器来分辨 4 个由相干态构成用(11)—(14)式表示的 Bell 态,并且证明,虽然完全分辨 4 个 Bell 态不可能,但是当相干态的振幅趋近无限大时,分辨率可以达到任意精度. 所以这个方案在实验上也是可行的.

3.3. 使用非最大纠缠量子信道的隐形传态

下面讨论使用非最大纠缠的态作为量子信道进行纠缠相干态隐形传态时,上述两种方案是否仍然可以实施. 我们发现,对于相干态表象方案,使用非最大纠缠的态 $|C_1\rangle^+$ 或 $|C_2\rangle^+$ 作为量子信道与使用

最大纠缠的态$|C_1\rangle^-$或$|C_2\rangle^-$作为量子信道,得到的结果是相同的,即只要进行同样的操作,隐形传态成功的概率都是(32)式的结果——成功概率介于50%与25%之间. 这一点与传送一个相干叠加态$(\varepsilon_+|\alpha\rangle+\varepsilon_-|-\alpha\rangle)/\sqrt{N_\varepsilon}$不一样,在那种情况下用最大纠缠的态$|C_1\rangle^-$或$|C_2\rangle^-$作为量子信道,隐形传态成功的概率与相干态的振幅$|\alpha|$无关,总是等于1/2,而用非最大纠缠的态$|C_1\rangle^+$或$|C_2\rangle^+$作为量子信道时,隐形传态成功的概率小于1/2,而且与振幅$|\alpha|$有关[8]. 其原因很简单,在传相干叠加态时Alice只需要做一次光子数测量,对$|C_1\rangle^+$或$|C_2\rangle^-$量子信道,只有在测得奇数光子时隐形传态才成功,而对于$|C_1\rangle^+$或$|C_2\rangle^+$量子信道,只有在测得偶数光子时隐形传态才成功. 而在传送纠缠相干态时Alice需要做两次光子数测量,这时无论是$|C_1\rangle^-$,$|C_2\rangle^-$或$|C_1\rangle^+$,$|C_2\rangle^+$作量子信道,隐形传态是否成功均取决于两次测量的光子数之和是否为偶数,所以总概率是相同的.

在以正交态$|\psi_+\rangle$和$|\psi_-\rangle$为基的表象里,$|C_1\rangle^+$和$|C_2\rangle^+$表示为

$$|C_1\rangle^+=\frac{1}{N_\omega}\Big[|\psi_+\rangle|\psi_+\rangle+|\psi_-\rangle|\psi_-\rangle + 2\sin2\omega\big(|\psi_+\rangle|\psi_-\rangle+|\psi_-\rangle|\psi_+\rangle\big)\Big], \tag{41}$$

$$|C_2\rangle^+=\frac{1}{N_\omega}\Big[|\psi_+\rangle|\psi_-\rangle+|\psi_-\rangle|\psi_+\rangle + 2\sin2\omega\big(|\psi_+\rangle|\psi_+\rangle+|\psi_-\rangle|\psi_-\rangle\big)\Big]. \tag{42}$$

在一般情况下,它们甚至不是纠缠态,所以不能用来作为量子信道. 但是对于一个一般的非最大纠缠相干态

$$|D\rangle=\frac{1}{\sqrt{N_\eta}}(\cos\eta|\alpha\rangle|\alpha\rangle-\sin\eta|-\alpha\rangle|-\alpha\rangle), \tag{43}$$

式中归一化因子
$N_\eta=[1-\sin2\eta\exp(-4|\alpha|^2)]$ $(0<\eta<\pi/2)$,一般可以采用纠缠集中协议(entanglement concentration protocol)[19]从多个相同的非最大纠缠态集合中提取出最大纠缠态来做量子信道,这可以通过纠缠交换(entanglement swapping)[20,21]来实现,但是需要进行Bell测量. 由上述讨论可知,我们要在正交基表象才能构成Bell基(9),(10)式,这时

$$\begin{aligned}|D\rangle=\frac{1}{\sqrt{N_\eta}}\Big[&\frac{1}{2}\sin2\omega(\cos\eta-\sin\eta)\\&\times(|\psi_+\rangle|\psi_+\rangle+|\psi_-\rangle|\psi_-\rangle)\\&+(\cos^2\omega\cos\eta-\sin^2\omega\sin\eta)|\psi_+\rangle|\psi_-\rangle\\&+(\sin^2\omega\cos\eta-\cos^2\omega\sin\eta)|\psi_-\rangle|\psi_+\rangle\Big].\end{aligned} \tag{44}$$

当$|\alpha\to\infty|$时,$\sin2\omega\to0$,$\sin^2\omega\to0$,$\cos^2\omega\to1$,有

$$|D\rangle\to|E\rangle=\cos\eta|\psi_+\rangle|\psi_-\rangle-\sin\eta|\psi_-\rangle|\psi_+\rangle. \tag{45}$$

这种情况下,记Alice和Bob共享的态为

$$|E\rangle_{AB}=\cos\eta|\psi_+\rangle_A|\psi_-\rangle_B-\sin\eta|\psi_-\rangle_A|\psi_+\rangle_B,$$

Alice在自己一边再制备一个相同的态

$$|E\rangle_{A'B'}=\cos\eta|\psi_+\rangle_{A'}|\psi_-\rangle_{B'}-\sin\eta|\psi_-\rangle_{A'}|\psi_+\rangle_{B'},$$

然后Alice对AB'做Bell测量. 如果测量基是$|B_1\rangle^+$或$|B_1\rangle^-$,Alice和Bob就得到一个最大纠缠的量子信道$|B_1\rangle^+_{A'B}$或$|B_1\rangle^-_{A'B}$,成功的概率$P=\cos^2\eta\sin^2\eta$. 如果测量基是$|B_2\rangle^+$或$|B_2\rangle^-$,得到的信道是非最大纠缠的.

如果$|\alpha|$不是很大,$|D\rangle_{AB}$不能简化为$|E\rangle_{AB}$,只有$|B_1\rangle^-$和$|B_2\rangle^-$可以精确测量. 通过直接的计算可以知道,这时按照以上的步骤操作,作$|B_2\rangle^-$测量时,得到的不是最大纠缠的信道,但是作$|B_1\rangle^-$测量时,得到的是最大纠缠态$|B_1\rangle^-_{A'B}$,成功的概率是

$$P_2=\frac{\cos^4 2\omega\sin^2 2\eta}{4(1-\sin^2 2\omega\sin2\eta)}. \tag{46}$$

最后应当指出,以上两种实现纠缠相干态隐形传态的方案虽然只对双模情况作了讨论,实际上可以很自然地推广到N模情况,只要Alice和Bob拥有N个双模纠缠相干态作为量子信道. 这是用$N+1$模纠缠相干态作量子信道很难做到的,因为对三粒子以上纠缠态的性质我们了解得还很不够,在实验上得到它们也很不容易.

4. 结 论

本文讨论了利用双模纠缠相干态做量子信道来实现纠缠相干态隐形传态的两种方案. 首先对纠缠相干态量子信道的特性做了介绍,然后分别在相干态表象和由相干态构成的正交态表象完成了双模纠缠相干态的隐形传态. 发现在相干态表象虽然操作比较简单,但是隐形传态成功的概率小于1/2,在正交态表象,虽然利用线性元件不可能完全分辨4个Bell态,但当态振幅充分大时,可以使隐形传态的成

功概率接近1. 与已有的纠缠相干态隐形传态方案相比,本文的方案在实验上更容易实现.

[1] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
[2] Cirac J I, Ekert A, Huelga S F *et al* 1999 *Phys. Rev.* A **59** 4249
[3] Murao M, Jonathan D, Plenio M B *et al* 1999 *Phys. Rev.* A **59** 156
[4] Huelga S F, Vaccaro J A, Chefles A *et al* 2001 *Phys. Rev.* A **63** 042303
[5] Chen L B, Lu H 2004 *Chin. Phys.* **13** 14
[6] Fuchs C A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1162
[7] Sanders B C 1992 *Phys. Rev.* A **45** 6811
[8] van Enk S J, Hirota O 2001 *Phys. Rev.* A **64** 022313
[9] Wang X 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 165
Wang X, Sanders B C 2002 *Phys. Rev.* A **65** 012303
[10] Wang X 2001 *Phys. Rev.* A **64** 022302
[11] Jeong H, Kim M S, Lee J 2001 *Phys. Rev.* A **64** 052308
[12] Zheng Y Z, Gu Y J, Guo G C 2003 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5** 29
[13] Zheng Y Z, Wang X H, Guo G C 2003 *Acta Photon. Sin.* **32** 765
[14] Cheong Y W, Kim H, Lee H W 2004 *Phys. Rev.* A **70** 032327
[15] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K *et al* 1997 *Nature* **390** 575
[16] Furusawa A, Sorensen J L, Braunstein S L *et al* 1998 *Science* **282** 706
[17] Gorbachev V N, Trubilko A I 2000 *JETP* **91** 894
[18] Lutkenhaus N, Calsamiglia J, Suominen A 1999 *Phys. Rev.* A **59** 3295
[19] Bennett C H, Popescu S, Schumacher B *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 722
[20] Zukowski M, Zeilinger A, Horne M A *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 4287
[21] Pan J W, Bouwmeester D, Weinfurter H *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3891

Teleportation of entangled coherent state through bipartite entangled quantum channels*

Liu Chuan-Long Zheng Yi-Zhuang†

(*School of Physics and Electrical Information Science, Wenzhou University, Wenzhou* 325027, *China*)

(Received 13 October 2005; revised manuscript received 31 July 2006)

Abstract

We propose a scheme for teleportation of an entangled coherent state through bipartite entangled quantum channels. We study the problem in both coherent state picture and orthogonal basis picture composed of coherent states, and find that in the coherent state picture teleportation can be implemented using only linear elements, but the probability of success is less than 1/2, while in the orthogonal basis picture the probability of successful teleportation reaches 1 as long as the four Bell states can be discriminated.

Keywords: teleportation, entangled coherent state, entangled coherent quantum channel

PACC: 0365

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 102068).

† E-mail: yzzheng@wzu.edu.cn