第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0521-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.2,February,2006

Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态

张民仓† 王振邦

(陕西师范大学物理学与信息技术学院,西安 710062)

(2005 年 5 月 24 日收到;2005 年 6 月 29 日收到修改稿)

给出了具有 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解,其解可用超几何函数表示.

关键词:Manning-Rosen 势,Klein-Gordon 方程,Dirac 方程,束缚态

PACC:0365

1. 引 言

在强耦合条件下,势场中的运动粒子的相对论效应变得十分重要[1,2],而在考虑到相对论效应时(本文不涉及量子力学中的诠释问题),处于势场中的运动粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程描述,因而近年来,寻找 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程在典型势场中的精确解引起人们的普遍重视.在以前的工作中,Dominguez-Adame[3] 和 Talukdar 等[4] 分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解和散射态解;胡嗣柱等[5] 在标量势大于矢量势的条件下给出了 Hulthén 势的一维 Dirac 方程的束缚态解以及在标量势等于矢量势的条件下三维 Dirac 方程的束缚态解.文献[6—12]在标量势等于矢量势的条件下,给出了 Morse 势、Woods-Saxon 势、$\tan^2(\pi\eta r)$势、谐振子势、Pöschl-Teller 势、修正 Pöschl-Teller 势及四参数双原子分子势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解.文献[13,14]在标量势等于矢量势的条件下运用超对称量子力学和形不变性,得到了 Rosen-Morse 势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解及 double ring-shaped oscillater 势的 Klein-Gordon 方程的束缚态解.本文将考虑粒子在 Manning-Rosen 势场中的相对论效应.Manning-Rosen 势函数为[15]

$$V(r) = \frac{1}{\gamma\rho^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)\mathrm{e}^{-2r/\rho}}{(1-\mathrm{e}^{-r/\rho})^2} - \frac{A\mathrm{e}^{-r/\rho}}{1-A\mathrm{e}^{-r/\rho}}\right],$$

其中

$$\gamma = \frac{8\pi^2\mu_1\mu_2}{h^2(\mu_1+\mu_2)} \tag{1}$$

是一种双原子分子势,用以描述双原子分子的振动,具有 Manning-Rosen 势的 Schrödinger 方程的束缚态解已经获得[16].本文在 Manning-Rosen 型标量势等于矢量势的条件下,分别得到了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解,给出了 s 波束缚态满足的能谱方程及相应的波函数.

2. Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

文献[3]指出,具有标量势 $S(r)$与矢量势 $V(r)$的 s 波 Klein-Gordon 方程为($\hbar = c = 1$)

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + [E - V(r)]^2 - [M + S(r)]^2\right\}u(r) = 0, \tag{2}$$

其中粒子的径向波函数 $R(r)$ 与 $u(r)$的关系为

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}. \tag{3}$$

对于 Manning-Rosen 势,在标量势与矢量势相等的条件下(且 $\gamma = 1$),作变换

† 通讯联系人.E-mail:mincangzhang@yahoo.com.cn

$$z = e^{-r/\rho}, \tag{4}$$

则方程(2)变为

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2}u(z) + z\frac{d}{dz}u(z) + \left[a - \frac{bz^2}{(1-z)^2} + \frac{cz}{1-z}\right]u(z) = 0. \tag{5}$$

其中

$$a = \rho^2(E^2 - M^2), \tag{6}$$

$$b = 2(E+M)\beta(\beta-1), \tag{7}$$

$$c = 2(E+M)A. \tag{8}$$

求解方程(5)的边界条件为[17,18]

当 $z = 0$,即 $r \to \infty$ 时,$u = 0$,

当 $z = 1$,即 $r \to 0$ 时,$u = 0$.

设方程(5)的解为

$$u(z) = (1-z)^{\lambda} z^m f(z). \tag{9}$$

把(9)式代入方程(5)可得

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}f(z)[(2m+1) - (1+2\lambda+2m)z]\frac{d}{dz}f(z) - [\lambda(2m+1) + m^2 + a - c]f(z) = 0. \tag{10}$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{1/4 + b}, \tag{11}$$

$$m = \rho\sqrt{M^2 - E^2}. \tag{12}$$

方程(10)为超几何方程,其解可用超几何函数表示为[19]

$$f(z) \approx {}_2F_1(i,j,k,z), \tag{13}$$

其中

$$i = (\lambda + m) + \sqrt{b + c - a}, \tag{14}$$

$$j = (\lambda + m) - \sqrt{b + c - a}, \tag{15}$$

$$k = 2m + 1. \tag{16}$$

为保证方程(10)的解满足边界条件,必须使

$$i = -n, n = 1,2,3,\cdots \tag{17}$$

或

$$j = -n, n = 1,2,3,\cdots \tag{18}$$

考虑到波函数对于交换参数 i 和 j 是不变的,所以这两个条件给出的结果是相同的,因此本文取(18)式.由(6,7,8,11,12,15)式和(18)式得

$$\sqrt{(E+M)[2\beta(\beta-1) + 2A - \rho^2(E-M)]} - \sqrt{1/4 + 2(E+M)\beta(\beta-1)} - \rho\sqrt{M^2 - E^2} = n + \frac{1}{2}. \tag{19}$$

(19)式为具有相等的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态满足的能谱方程,相应的束缚态波函数为

$$u_n(z) = N_n(1-z)^{\lambda} z^m {}_2F_1(i,j,k,z). \tag{20}$$

即

$$u_n(r) = N_n(1 - e^{-r/\rho})^{\lambda} e^{-mr/\rho} {}_2F_1(i,j,k,e^{-r/\rho}). \tag{21}$$

其中 N_n 为归一化因子

$$N_n = \left[\frac{(i+n)}{n!}\frac{\Gamma(i)\Gamma(k+n)}{\Gamma^2(k)\Gamma(i-k+1)}\right]^{1/2}. \tag{22}$$

3. Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Dirac 方程的束缚态解

文献[5]指出,具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 Dirac 方程为($\hbar = c = 1$)

$$\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta[M + S(r)]\}\psi = [E - V(r)]\psi. \tag{23}$$

在相对论情况下,中心力场中粒子的守恒量完全集可以取为($\boldsymbol{H},\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_Z$),($\boldsymbol{H},\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_Z$)的共同本征函数为[20]

$$\psi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} f_{n,K}(r)\phi^A_{jm_j} \\ ig_{n,K}(r)\phi^B_{jm_j}\end{pmatrix} \quad \left(\text{当 } K = j + \frac{1}{2} \text{ 时}\right), \tag{24}$$

$$\psi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} f_{n,K}(r)\phi^B_{jm_j} \\ ig_{n,K}(r)\phi^A_{jm_j}\end{pmatrix} \quad \left(\text{当 } K = -\left(j + \frac{1}{2}\right)\text{时}\right), \tag{25}$$

其中

$$\phi^A_{jm_j} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{j-m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$\phi^B_{jm_j} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{j-m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{j+m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

把(24)式或(25)式代入(23)式,可分离出 Dirac 方程的径向部分为

$$\frac{df}{dr} - \frac{K}{r}f = [M + E + S(r) - V(r)]g, \tag{27}$$

$$\frac{dg}{dr} + \frac{K}{r}g = [M - E + S(r) + V(r)]f, \tag{28}$$

对于 Manning-Rosen 势,在标量势与矢量势相等的条件下(且 $\gamma = 1$),方程(27)和方程(28)式变为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{K}{r}f=(M+E)g,\tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{K}{r}g=\left\{(M-E)+\frac{2}{\rho^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)\mathrm{e}^{-2r/\rho}}{(1-\mathrm{e}^{-r/\rho})^2}-\frac{A\mathrm{e}^{-r/\rho}}{1-\mathrm{e}^{-r/\rho}}\right]\right\}f.\tag{30}$$

把(29)式代入(30)式消去 g 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}f+\left\{(M^2-E^2)-\frac{2(M+E)}{\rho^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)\mathrm{e}^{-2r/\rho}}{(1-\mathrm{e}^{-r/\rho})^2}-\frac{A\mathrm{e}^{-r/\rho}}{1-\mathrm{e}^{-r/\rho}}\right]-\frac{K(K-1)}{r^2}\right\}f=0.\tag{31}$$

对于 s 波,即当 $K=1$,方程(31)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}f+\left\{(M^2-E^2)-\frac{2(M+E)}{\rho^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)\mathrm{e}^{-2r/\rho}}{(1-\mathrm{e}^{-2r/\rho})^2}-\frac{A\mathrm{e}^{-r/\rho}}{1-\mathrm{e}^{-r/\rho}}\right]\right\}f=0.\tag{32}$$

作变换 $z=\mathrm{e}^{-r/\rho}$ 则方程(32)与方程(5)完全类似,于是立即可得

$$\sqrt{(E_{n,1}+M)[2\beta(\beta-1)+2A-\rho^2(E_{n,1}-M)}-\sqrt{1/4+2(E_{n,1}+M)\beta(\beta-1)}-\rho\sqrt{M^2-E_{n,1}^2}=n+\frac{1}{2}.\tag{33}$$

(33)式为具有相等的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Dirac 方程的 s 波束缚态满足的能谱方程.与 $E_{n,1}$ 相应的波函数的 $f_{n,1}$ 分量为(未归一化)

$$f_{n,1}(r)=(1-\mathrm{e}^{-r/\rho})^{\lambda}\mathrm{e}^{-mr/\rho}\,{}_2F_1(i,j,k,\mathrm{e}^{-r/\rho}).\tag{34}$$

由(29)式可得波函数的 $g_{n,1}(r)$ 分量为(未归一化)

$$\begin{aligned}g_{n,1}(r)=\frac{1}{M+E_{n,1}}\Big\{&\Big[\frac{\lambda+m}{\rho}\mathrm{e}^{-r/\rho}-\frac{m}{\rho}-\frac{1}{r}(1-\mathrm{e}^{-r/\rho})\Big](1-\mathrm{e}^{-r/\rho})^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-mr/\rho}\\&\times{}_2F_1(i,j,k,\mathrm{e}^{-r/\rho})\\&-\frac{1}{\rho}(1-\mathrm{e}^{-r/\rho})^{\lambda}\mathrm{e}^{-mr/\rho}\frac{i\cdot j}{k}\\&\times{}_2F_1(i+1,j+1,k+1,\mathrm{e}^{-r/\rho})\Big\}.\end{aligned}\tag{35}$$

把 $f_{n,1}(r)$ 和 $g_{n,1}(r)$ 代入(24)式,即可给出具有相等的 Manning-Rosen 型标量势和矢量势的 Dirac 方程的 s 波旋量波函数.

4. 结　论

综上所述,具有相等的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解可以严格地求出,即在与通常非相对论量子力学中处理双原子分子问题的相同的近似条件下,s 波的 Klein-Gordon 方程能够转化为超几何方程,其解可用超几何函数表示.并且 s 波的 Dirac 方程的 f 分量所满足的方程与 Klein-Gordon 方程完全类似,其解可用相同的方法得到,从而可求出 s 波的 Dirac 方程的 g 分量,由此可得出 Dirac 方程的 s 波束缚态旋量波函数.

[1] Greiner W, Müller B, Rafelski J 1985 *Quantum electrodynamics of strong fields* (New York:Spring-Verlag)

[2] Wang R C, Wang C Y 1988 *Phys. Rev.* D **38** 348

[3] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[4] Talukdar B, Yunus A, Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[5] Hu S Z, Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese)[胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[6] Hou C F, Li Y, Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese)[侯春风、李　炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[7] Hou C F, Zhou Z X, Zi Y 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 561

[8] Gou J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese)[郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[9] Qiang W C 2002 *Chin. Phys.* **11** 757

[10] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese)[陈　刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[11] Chen G, Lou Z M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1071 (in Chinese)[陈刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1071]

[12] Chen G, Lou Z M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1075 (in Chinese)[陈刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1075]

[13] Chen G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 684 (in Chinese)[陈　刚 2004 物理学报 **53** 684]

[14] Lu F L, Chen C Y, Sun D S 2005 *Chin. Phys.* **14** 463

[15] Manning M F, Rosen N 1933 *Phys. Rev.* **44** 953

[16] Infeld I, Hull T E 1951 *Rev. Mod. Phys.* **23** 21

[17] Sun J X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1992 (in Chinese)[孙久勋 1999 物理学报 **48** 1992]

[18] Flügge S 1974 *Practical Quantum Mechanics* (Berlin:Springer) Vol. I

[19] Wang Z X, Guo D R 2000 *Introdution to special Function* (Beijing: Peking Univ. Press) (in Chinese)[王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论 北京 北京大学出版社]

[20] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* (2nd) (Beijing: Science press) Vol Ⅱ, (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学 第二版(北京 科学出版社)卷Ⅱ].

Bound states of the Klein-Gordon equation and Dirac equation with the Manning-Rosen scalar and vector potentials

Zhang Min-Cang† Wang Zhen-Bang

(*School of Physics and Information Technology*, *Shaanxi Normal University*, *Xi'an* 710062, *China*)

(Received 24 May 2005; revised manuscript received 29 June 2005)

Abstract

The s-wave bound states of the Klein-Gordon equation and Dirac equation with equal Manning-Rosen scalar and vector potentials are obtained, and the solutions are expressed by the hypergeometric function.

Keywords: Manning-Rosen potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound state

PACC: 0365

† Corresponding author. E-mail: mincangzhang@yahoo.com.cn