

# 势阱中玻色-爱因斯坦凝聚气体的势场有效性和粒子数极限判据

余学才<sup>†</sup> 叶玉堂 程琳

(电子科技大学光电信息学院, 成都 610054)

(2005 年 5 月 10 日收到, 2005 年 6 月 13 日收到修改稿)

基于最小动量态上的玻色-爱因斯坦凝聚(简称 BEC)给出了指数吸引势场中超冷玻色原子气体的势场有效性和势阱中所装载的原子数目极限判据. 此判据给出了当所装载的原子数确定时, 所需要的势场强度, 或势场给定时, 所装载的原子数目的极限.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 临界温度, 最小动量态

PACC: 0530J, 6500, 7430E

## 1. 引言

文献[1]基于局域密度近似(local density approximation, 简称 LCD)给出了超冷玻色气体在指数形式吸引势场

$$U(r) = \epsilon_1 \left| \frac{x}{a} \right|^p + \epsilon_2 \left| \frac{y}{b} \right|^l + \epsilon_3 \left| \frac{z}{c} \right|^q \quad (1)$$

中的凝聚温度

$$T_c = T_c^* \left( \left( \frac{\epsilon_1}{kT_c^*} \right)^{1/p} \left( \frac{\epsilon_2}{kT_c^*} \right)^{1/l} \left( \frac{\epsilon_3}{kT_c^*} \right)^{1/q} \right)^{\frac{1}{1+\eta}} \times \left( \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}}{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\eta}} \right)^{\frac{1}{1+\eta}}, \quad (2)$$

其中  $k$  为玻尔兹曼常数,  $\eta = 1/p + 1/l + 1/q + 1/2$ ,

$$T_c^* = \frac{h^2}{2\pi kM} \left( \frac{N}{V^*} \frac{1}{2.612} \right)^{2/3} \quad (3)$$

为势场为零时在有效体积  $V^* = 8abc\Gamma(1/l)\Gamma(1/p)\Gamma(1/q)\Gamma(1+\eta)$  中玻色气体凝聚的临界温度, 可称为等效临界温度,  $h$  为普朗克常数,  $M$  为粒子质量,  $N$  为粒子数目,  $\Gamma(1/\kappa) = \int_0^{\infty} \xi^{1/\kappa-1} \exp(-\xi) d\xi$  ( $\kappa = p, l, q$ ). 等效临界温度的物理意义是当势场强度等于  $kT_c^*$  时, 系统可视为一个体积为  $V^*$  的腔体中装

载了  $N$  个玻色粒子的无势场约束的系统. 此时临界温度近似等于等效临界温度. 凝聚原子比例为

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\eta+1}, \quad (4)$$

当  $p, l, q = 2$  时, 势场为简谐势场. 四极磁阱所提供的势场在中心附近很接近简谐形式. 在离开中心较远处, 势场偏离简谐形式, 逐渐变成排斥势. 文献[2]研究了势场非简谐部分对玻色-爱因斯坦凝聚(Bose Einstein condensation, 简称 BEC)的影响. 结果表明了基态能量和化学势比简谐势情况下低, 非简谐部分对基态的原子密度和速度分布有重要的影响.

凝聚温度表达式(2)不同于已发表的其他文献的结果<sup>[3-4]</sup>. 原因是所考虑的 BEC 发生在最小动量的量子态上, 而其他文献所考虑的 BEC 发生在能量基态上. 目前实验所实现的 BEC 是在磁光阱中实现的. 四极磁阱提供了一个二维或三维简谐势场以囚禁凝聚玻色气体<sup>[5-8]</sup>, 光学冷却过程使气体原子的热运动速度达到每秒几米的极限<sup>[9-12]</sup>. 在磁光阱中原子一方面受到简谐势场力的作用, 另一方面受到一个相当大的冷却力的作用. 后者强迫原子动量接近于零. 文献[1]所考虑的最小动量量子态上的 BEC 更为接近磁光阱中的实际物理条件.

在文献[1]的基础上, 本文给出 BEC 的系统判据. 此判据对于一个已知的势阱, 当参数( $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, a, b, c, p, l, q$ )给定时, 给出了阱中所装载的原子

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: yxc@uestc.edu.cn

数目  $N$  的极限, 或者阱中装载原子数目  $N$  确定时, 给出了所需要的势场强度.

## 2. 势场有效性判据和原子数目极限判据

定义等效势场强度

$$\bar{\epsilon} = (\epsilon_1^{1/p} \epsilon_2^{1/l} \epsilon_3^{1/q})^{(1/p+1/l+1/q)}. \quad (5)$$

(2) 式可重写为

$$\frac{T_c}{T_c^*} = \zeta(\eta) \left( \frac{\bar{\epsilon}}{kT_c^*} \right)^{\frac{\eta-1/2}{\eta+1}}, \quad (6)$$

其中  $\zeta(\eta) = [(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}) / (\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\eta})]^{1/(\eta+1)}$ . 对于一维、二维和三维简谐势,  $\eta$  分别为 1, 3/2 和 2, 因子  $\zeta(\eta)$  分别为  $\zeta(1) = 1.26$ ,  $\zeta(3/2) = 1.29$  和  $\zeta(2) = 1.31$ . 图 1 给出了一维、二维和三维简谐势阱中归一化临界温度  $T_c/T_c^*$  和归一化等效势场强度  $\bar{\epsilon}/kT_c^*$  的关系.  $\bar{\epsilon}/kT_c^* < 1$  时, 低维势阱临界温度随归一化等效势  $\bar{\epsilon}/kT_c^*$  的增加上升较快;  $\bar{\epsilon}/kT_c^* = 1$  时, 一维、二维和三维简谐势阱中归一化临界温度近似相等; 当  $\bar{\epsilon}/kT_c^* > 1$  时, 低维势阱临界温度随归一化等效势  $\bar{\epsilon}/kT_c^*$  的增加上升较慢. 文献 [13] 考虑了低维简谐势阱中粒子数对凝聚温度和热容量的影响. 也假设凝聚态为基态, 结果表明粒子数对一维、二维和三维简谐势阱的临界温度的影响具有基本相同的规律, 但对热容量具有不同的影响.

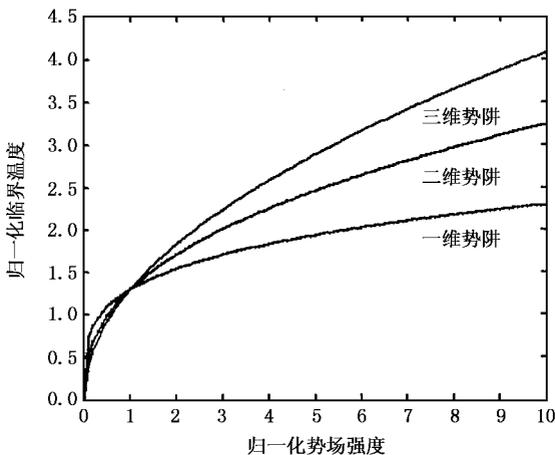


图 1 归一化临界温度  $T_c/T_c^*$  随归一化等效势  $\bar{\epsilon}/kT_c^*$  的关系

当等效势 1)  $\bar{\epsilon} > kT_c^*$  时,  $T_c > T_c^*$  临界温度有效增加 2)  $\bar{\epsilon} \sim kT_c^*$  时,  $T_c \sim T_c^*$  临界温度近似等于无外加势场时在有效体积  $V^*$  中的临界温度 3)  $\bar{\epsilon} \ll$

$kT_c^*$  时,  $T_c \ll T_c^*$  临界温度接近于零, 相当于在一个体积无穷大的腔体中装载有限粒子数情况下的临界温度. 所以不等式

$$\bar{\epsilon} > kT_c^* \quad (7)$$

给出了有效势场强度的大小, 可以称为势场有效性判据. 由 (3) 式可得上式的另外一个表达形式

$$N < N_l = 2.612 V^* \left( \frac{2\pi M \bar{\epsilon}}{h^2} \right)^{3/2}, \quad (8)$$

此式给出了阱中装载的原子数目极限  $N_l$ . 装载原子数目远大于  $N_l$  时, 临界温度接近于零, 势场是无效的. 所有 (8) 式可以称为原子数目极限判据.

定义一个势场温度

$$T_u = \bar{\epsilon}/k, \quad (9)$$

临界温度表达式更为简洁,

$$\frac{T_c}{T_c^*} = \zeta(\eta) \left( \frac{T_u}{T_c^*} \right)^{\frac{\eta-1/2}{\eta+1}}. \quad (10)$$

对于一维、二维、三维简谐势, 临界温度、有效体积、等效势强度分别总结在表 1 中, 其中  $S, L$  分别表示一维和二维情况下垂直于势场方向的腔体的面积和长度.

表 1 一维、二维、三维简谐势中 BEC 气体的临界温度、有效体积分别和等效势强度

简谐势	临界温度	有效体积	等效势场强度
$U(r) = \epsilon_1 (x/a)^2$	$T_c = 1.260 T_c^* \left( \frac{\bar{\epsilon}}{kT_c^*} \right)^{1/4}$	$V^* = \pi^{1/2} a S$	$\bar{\epsilon} = \epsilon_1$
$U(r) = \epsilon_1 (x/a)^2 + \epsilon_2 (y/b)^2$	$T_c = 1.295 T_c^* \left( \frac{\bar{\epsilon}}{kT_c^*} \right)^{1/5}$	$V^* = \pi a b L$	$\bar{\epsilon} = (\epsilon_1 \epsilon_2)^{1/2}$
$U(r) = \epsilon_1 (x/a)^2 + \epsilon_2 (y/b)^2 + \epsilon_3 (z/c)^2$	$T_c = 1.305 T_c^* \left( \frac{\bar{\epsilon}}{kT_c^*} \right)^{1/6}$	$V^* = \pi^2 a b c$	$\bar{\epsilon} = (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3)^{1/3}$

定义等效临界温度下的德布罗意波长

$$\lambda^* = \left( \frac{h^2}{2\pi M k T_c^*} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

粒子数极限可表示为

$$N_l = 2.612 \frac{V^*}{\lambda^{*3}} \left( \frac{\bar{\epsilon}}{kT_c^*} \right)^{3/2}, \quad (12)$$

可见等效体积的大小须与等效临界温度下的德布罗意波长比较才有意义. 当  $V^* \ll \lambda^{*3}$  时, 除非势场非常强 ( $\bar{\epsilon} \gg kT_c^*$ ), 否则所装载的原子数极限  $N_l \approx 0$ . 因为  $\lambda^*$  表示单个原子波函数在温度  $T_c^*$  时所延展的平均空间尺度, 而  $V^*$  表示势场延展的有效空间, 所以  $V^* > \lambda^{*3}$  的物理意义是势场延展的有效空间须覆盖单个原子波函数所延展的平均空间尺度.

### 3. 玻色-爱因斯坦凝聚系统设计原则

(7)(8)式实际上给出了玻色-爱因斯坦气体凝聚系统设计原则.例如在一个长为  $L$  的二维简谐势场  $U(r) = \epsilon_1(x/a)^2 + \epsilon_2(y/b)^2$  中装载  $N_b$  个玻色原子,首先计算出系统的有效体积  $V^* = \pi abL$ ,再计算出系统等效凝聚温度  $T_c^* = \frac{h^2}{2\pi kM} \left( \frac{N_b}{V^*} \frac{1}{2.612} \right)^{2/3}$ . 所需要有效势场强度、临界温度下的德布罗意波长和凝聚在最小动量态上的原子数和总原子数目比例分别由下面公式计算

$$\bar{\epsilon} \geq \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} = kT_c^* \quad (13)$$

$$T_c = 1.295 T_c^* \left( \frac{\bar{\epsilon}}{kT_c^*} \right)^{1/5} \quad (14)$$

$$\lambda_c = \left( \frac{h^2}{2\pi M k T_c} \right)^{1/2} \quad (15)$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \quad (T < T_c) \quad (16)$$

当势阱所提供的最大等效势场强度和参数( $a, b$ )已知时,先计算出有效体积  $V^*$ ,再根据(8)式计算出原子极限数目  $N_l$ .

### 4. 分析与讨论

本文导出的势场中 BEC 气体的势场强度和原子数极限判据是基于文献[1]所给出的最小动量态上凝聚的临界温度表达式.所假设的前提——最小动量态上凝聚比较符合势阱中超冷玻色气体的物理条件.特别是对于光学冷却机制,通过减速原子降低原子气体的温度,冷却过程是一个减小动量的过程.所以原子的动能很小,但处于外势场中时,原子具有一定的势能.相关实验和理论研究表明,谐振子系统

凝聚的量子态可以是动量和位置被压缩的量子态<sup>[14-16]</sup>,不一定是能量基态.最小动量量子态可以展开为能量本征态的叠加,最小动量量子态在各个激发态和基态都有一定的概率.文献[1]所采用的局域密度能够近似给出玻色气体的热力学参数的解析表达式.最近对<sup>87</sup>Rb弱相互作用的玻色气体凝聚临界温度的实验测量结果和局域密度近似给出的结果符合较好<sup>[17]</sup>.本文所考虑的势场为指数规律的吸引势场,所得到的结果可以直接用于一维、二维和三维的四极磁光阱囚禁 BEC 气体.对于排斥势,由于粒子密度空间积分的发散性,局域密度近似不能得到正确的结果,需要用其他理论模型;对于光晶格周期势,临界温度表达式需要重新推导.本文未考虑原子之间的相互作用.对弱相互作用的玻色粒子系统的凝聚有很多研究模型<sup>[18]</sup>.但所给出的凝聚温度表达式中的关键参数差别较大,目前没有一个公认的结果.文献[19]研究了外势场中弱相互作用玻色气体在最小动量态上的凝聚温度,所给出的凝聚温度偏差与实验结果<sup>[17]</sup>符合最好.文献[20]研究了原子相互作用导致的非线性对 BECs 干涉的影响,所得到的结果对实验观察到 BECs 干涉图案的一些奇异特性给出了直观的解释.从另一个侧面反映了 BECs 中丰富和奇特的物理现象.

本文所给出的势场有效性判据和原子数极限判据是基于临界温度相对于不加势场时是否得到有效提高的比较结果.如果临界温度有效提高,此时态密度得到有效压缩,则势场是有效的;反之,态密度未被有效压缩,势场是无效的.此判据给出了当所装载的原子数确定时,所需要的势场强度;或势场给定时,所装载的原子数目不能超过的极限.当实际势场强度远小于所需要的势场强度或原子数超过极限数目太多时,势场是无效的.

[1] Yu X C, Mo Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4075 (in Chinese) 余学才、莫影 2004 物理学报 **53** 4075]

[2] Wang D L, Yan X H, Tang Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 2030

[3] Bangato V, Pritchard D E, Kleppner D 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4354

[4] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P *et al* 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463

[5] Alan L M, John V P, Philips W M *et al* 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2596

[6] Raab E L, Prentiss M, Alex C *et al* 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2631

[7] Monroe C, Swann W, Robinson H *et al* 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1571

[8] Ketterle W, Davis K B, Joffe M A *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2253

[9] Doyle D M, Sandberg J C, Yu U A *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 603

[10] Bradley C C, Sackett C A, Tolett J J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.*

- 75 1687
- [ 11 ] Davis K B , Mewes M O , Andrews M R *et al* 1995 *Phys . Rev . Lett .* **75** 3969
- [ 12 ] Ensher J R , Jin D S , Matthews M R *et al* 1996 *Phys . Rev . Lett .* **77** 498
- [ 13 ] Cui H T , Wang L C , Yi X X 2004 *Acta Phys . Sin .* 53 991 ( in Chinese ) [ 崔海涛、王林成、衣学喜 2004 物理学报 **53** 991 ]
- [ 14 ] Cirac J I , Parkins A S , Blatt R *et al* 1993 *Phys . Rev . Lett .* **70** 556
- [ 15 ] Poyatos J F , Cirac J I , Zoller P 1996 *Phys . Rev . Lett .* **77** 4728
- [ 16 ] Rabl P , Shnirman A , Zoller P 2004 *Phys . Rev . B* **70** 205304
- [ 17 ] Gerbier E , Thywissen J H , Richard S *et al* 2004 *Phys . Rev . Lett .* **92** 030405-1
- [ 18 ] Andersen J O 2004 *Rev . Mod . Phys .* **76** 599
- [ 19 ] Yu X C , Ye Y T , Wu Y F *et al* 2005 *Science in China Ser . G* **48** 521
- [ 20 ] Liu W M , Wu B , Niu Q 2000 *Phys . Rev . Lett .* **84** 2294

## Criterion for validity of potential and limiting atom number in a potential well for Bose-Einstein condensation gas

Yu Xue-Cai<sup>†</sup> Ye Yu-Tang Cheng Lin

( College of Opto-Electronic Information , University of Electronic Science and Technology of China , Chengdu 610054 , China )

( Received 10 May 2005 ; revised manuscript received 13 June 2005 )

### Abstract

Based on Bose-Einstein condensation at minimized momentum state , a criterion for the validity of potential and the limited atom number loaded in a power law attractive potential well for ultra-cold atom gas is deduced. The criterion gives the required potential intensity when the loaded atom number is defined , or the limited atom number when the potential intensity is decided.

**Keywords** : Bose-Einstein condensation , critical temperature , minimized quantum state

**PACC** : 0530J , 6500 , 7430E

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : yxc@uestc.edu.cn