第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0572-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.2,February,2006

多变量时间序列最大李雅普诺夫指数的计算

卢 山† 王海燕

(东南大学经济管理学院,南京 210096)

(2005 年 5 月 26 日收到;2005 年 6 月 17 日收到修改稿)

根据单变量时间序列计算最大 Lyapunov 指数的算法思想,本文提出了一种于多变量时间序列最大 Lyapunov 指数计算的方法.针对原有算法需要使用重构相空间的特点,推广算法给出了多变量时间序列相空间重构参数的选择方法,并采用多变量重构相空间进行最大 Lyapunov 指数计算.经耦合 Rössler 系统产生多变量时间序列的仿真计算,验证了该算法的有效性,推广算法的计算结果表明多变量时间序列的计算结果优于单变量的结果,且更加接近理论计算结果.

关键词:多变量时间序列,相空间重构,Lyapunov 指数

PACC:0545

1. 引 言

最大 Lyapunov 指数定量地描述复杂系统相空间相邻轨道呈指数发散或收敛的性质,是描述系统混沌动力学特性的重要参数之一[1].当系统的模型已知时,可以利用相空间的切向量精确计算最大 Lyapunov 指数.当复杂系统只能获得观测时间序列时,为了计算最大 Lyapunov 指数,Wolf 提出了轨道跟踪法,随后 Rosenstein 等人[2]进行了改进,但仍然存在精度不高、受噪声影响大、计算量大等问题.为此文献[3]在深入研究相空间重构技术和轨道跟踪法的基础上提出了一种比较稳健的计算方法.这些方法都是对观测的单变量时间序列进行处理的,在实际问题中,被观测的复杂系统往往是由多个变量描述,通过试验或者观测都可以获取到多变量时间序列,理论上多变量时间序列比单变量时间序列包含了更多关于原动力系统的信息,采用多变量时间序列计算得到的 Lyapunov 指数应更加真实[4].同时,实际问题中观测到的时间序列可能不是很长,较短的多变量时间序列是否也能获得较精确的最大 Lyapunov 指数,这是一个很有实际意义的问题.本文将给出多变量时间序列最大 Lyapunov 指数的计算方法,通过耦合 Rössler 混沌系统[5,6]产生的多变量时间序列进行仿真计算,以比较单变量和多变量时间序列计算最大 Lyapunov 指数的精度,并分析数据长度对计算精度的影响.

2. 多变量时间序列的相空间重构

考虑有 M 个变量的时间序列 $\{x_n\}_{n=1}^{N} = \{x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{M,n}\}_{n=1}^{N}$,作以下时间延迟重构

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{V}_n(m_1, \cdots, m_i, \cdots, m_M) \\
&= (x_{1,n}, x_{1,n-\tau_1}, \cdots, x_{1,n-(m_1-1)\tau_1}; \\
&\quad \cdots; \\
&\quad x_{i,n}, x_{i,n-\tau_i}, \cdots, x_{i,n-(m_i-1)\tau_i}; \\
&\quad \cdots; \\
&\quad x_{M,n}, x_{M,n-\tau_M}, \cdots, x_{1,n-(m_M-1)\tau_M}; \\
&\quad \cdots)^{\mathrm{T}},
\end{aligned} \tag{1}
$$

这里,$n = J_0, J_0+1, \cdots, N$;$J_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant M}(m_i - 1)\tau_i + 1$.其中 τ_i 和 m_i,$i = 1,2,\cdots,M$ 分别是延迟时间间隔和嵌入维数.

延迟时间间隔 τ_i,$i = 1,2,\cdots,M$ 采用最小互信息法对每一时间序列分别计算.为了计算嵌入维数 m_i,$i = 1,2,\cdots,M$,定义

$$
\| \boldsymbol{V}_n(m_1, \cdots, m_i, \cdots, m_M) - \boldsymbol{V}_j(m_1, \cdots, m_i, \cdots, m_M) \|
$$

---

† 通讯联系人.E-mail:shine@seu.edu.cn

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant M} \left\{ \begin{array}{c} | x_{i,n} - x_{i,j} |, | x_{i,n-\tau_i} - x_{i,j-\tau_i} |, \\ \cdots, \\ | x_{i,n-(m_i-1)\tau_i} - x_{i,j-(m_i-1)\tau_i} | \end{array} \right\}, \quad (2)$$

记 $V_n(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M)$ 的最近邻点为 $V_{\eta(n)}(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M)$,即

$$\left\| \begin{array}{c} V_{\eta(n)}(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) - \\ V_n(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) \end{array} \right\| = \max_{j=J_0,\cdots,N;j\neq n} \left\| \begin{array}{c} V_j(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) - \\ V_n(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) \end{array} \right\|, \quad (3)$$

则 $J_0 \leqslant \eta(n) \leqslant N$,且 $\eta(n)$ 与 $m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M$ 有关.

定义

$$e(n;m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_J) = \frac{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \left\| \begin{array}{c} V_{\eta(n)}(m_1,\cdots,m_{i+1},\cdots,m_M) - \\ V_n(m_1,\cdots,m_{i+1},\cdots,m_M) \end{array} \right\|}{\left\| \begin{array}{c} V_{\eta(n)}(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) - \\ V_n(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) \end{array} \right\|}, \quad (4)$$

这里,$n = J_0, J_0+1,\cdots,N$,以及

$$E(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) = \frac{\sum_{n=J_0}^{N} e(n;m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M)}{N - J_0 + 1}, \quad (5)$$

记集合

$$U(m) = \left\{ \begin{array}{l} E(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M) \mid \\ m_1 + \cdots + m_i + \cdots + m_M = m) \end{array} \right\}, \quad (6)$$

定义

$$E(m) = \frac{\sum_{E(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M)\in U(m)} E(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M)}{| U(m) |}, \quad (7)$$

其中,$|U(m)|$ 表示 $U(m)$ 中元素的个数.参照文献[7,8]的改进,再定义

$$E_1(m) = E(m+1)/E(m), \quad (8)$$

其中,$m = M, M+1,\cdots$.通过观测 $E_1(m)$ 随嵌入维数的变化情况寻找相对平稳的区间,避免采用固定阈值作为收敛条件,计算 $E_1(m)$ 直到平稳,如果 $m > m_0$ 时,$E_1(m)$ 平稳,则 m_0+1 为整个被观测系统的最小相空间嵌入维数.进一步计算 $m_{1e},\cdots,m_{ie},\cdots,m_{Me}$,使

$$E(m_{1e},\cdots,m_{ie},\cdots,m_{Me}) = \min_{E(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M)\in U(m_0+1)} (E(m_1,\cdots,m_i,\cdots,m_M)), \quad (9)$$

则 $m_{1e},\cdots,m_{ie},\cdots,m_{Me}$ 为 M 维多变量时间序列重构时各独立系统的子相空间维数.利用这个结果可以给出多变量数据的重构相空间[4,9—11],下面的计算机仿真结果表明通过该方法重构的相空间更加贴近实际被观测系统,由此计算出的非线性不变量更加接近理论数值.

3.多变量时间序列最大 Lyapunov 指数计算方法

在多变量时间序列重构的相空间中,对每个点 V_j 寻找其最近邻点 $V_{\hat{j}}$,这两个点之间必须有短暂的分离,以保证两个点沿着不同的轨道运行.定义分离间隔 $\omega = \max(\tau_i)/\Delta t, i = 1,2,\cdots,M$.假定 $d_j(0)$ 为 V_j 到其最近邻点 $V_{\hat{j}}$ 的距离,采用(2)式计算,即

$$d_j(0) = \| V_j - V_{\hat{j}} \|, | j - \hat{j} | > \omega, \quad (10)$$

对相空间中的每个点 V_j,计算出其最近邻点在第 i 步前向演化后的距离

$$d_j(i) = \| V_{j+1} - V_{\hat{j}+i} \|, \quad (11)$$

其中 $i = J_0, J_0+1,\cdots,N$.假定 V_j 的最近邻点以最大 Lyapunov 指数的速率发散,即 $d_j(i) = d_j(0) \times e^{\lambda(i\cdot\Delta t)}$,两边取对数,得 $\ln d_j(i) = \ln d_j(0) + \lambda(i\cdot\Delta t)$,针对 $<\ln d_j(i)>$ 相对 $i\cdot\Delta t$ 的曲线,利用最小二乘法拟合得到最大 Lyapunov 指数 λ_1 为

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sum i^2}[i \times y(i)], \quad (12)$$

其中 $y(i) = \frac{1}{p\Delta t}\sum_{j=1}^{p}\ln d_j(i)$,$p$ 为非零的 $d_j(i)$ 个数.

该算法充分利用了能够利用的数据,并对他们进行了某种意义上的平均,文献[3]对单变量的情况分析表明此类算法比较稳定.对于耦合混沌系统的关键不变量计算,文献[12,13]也给出了详细的说明.

4.仿真分析

为了说明上述方法的有效性,下面通过两个混沌系统进行仿真分析.

系统 1

Rössler 混沌系统的结构非常简单,但具有混沌

的基本结构特征，是一个较理想的理论检验模型广泛使用. 这里选择以下两类不同的 Rössler 耦合混沌系统[5,14].

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}),\\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + 0.15y_{1,2},\\ \dot{z}_{1,2} &= 0.2 + z_{1,2}(x_{1,2} - 10),\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\omega_1 = 0.99$，$\omega_2 = 0.95$. 系统(13)是两个不完全相同的 Rössler 系统的耦合，系统初始环境为 $x_1 = 0.1$，$y_1 = 0.2$，$z_1 = 0.3$，$x_2 = y_2 = 0$，$z_2 = 15$，这里取 ε 分别为 0.05 和 0.50，经数值积分可以得到来自系统(13)的 6 维离散时间序列. 随着系统耦合参数 ε 的增加，系统(13)将出现间歇延迟同步和完全同步.

系统 2

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -\omega y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2 - x_1),\\ \dot{y}_1 = \omega x_1 + 0.15y_1,\\ \dot{z}_1 = 0.2 + z_1(x_1 - 10),\\ \dot{x}_2 = w_2 + 0.25x_2 + z_2 + \rho\varepsilon(x_1 - x_2),\\ \dot{y}_2 = 3 + y_2w_2,\\ \dot{z}_2 = -0.5y_2 + 0.05z_2,\\ \dot{w}_2 = -x_2 - y_2,\end{cases} \tag{14}$$

其中 $\omega = 0.925$. 初始环境为 $x_1 = 0.1$，$y_1 = 0.2$，$z_1 = 0.3$，$x_2 = y_2 = 0$，$z_2 = 15$，$w_2 = -20$，这里取 ε 分别为 0.008 和 0.012. 经数值积分可以得到来自系统(14)的 7 维离散时间序列. 对于不同的 ε 取值，系统将出现非同步和同步演化.

对上述两个系统分别计算经离散后的观测值 15000 个，取后 2000 个数据作为试验对象. 针对系统(13)和系统(14)产生的试验数据，首先利用(8)式寻找全局相空间重构维数，再通过(9)式搜索各个参与重构变量的局部相空间重构维数. 基于多变量重构的相空间，绘制 $\langle \ln d_j(i)\rangle$ 相对 $i\cdot\Delta t$ 的曲线并通过(12)式拟合获得最大 Lyapunov 指数 λ_1. 计算结果参见表 1—4 的第 3 列 $\lambda_{\rm fix}$，其中 m 表示重构相空间维数，t 表示时间延迟.

系统(13)在 $\varepsilon = 0.05$ 和 0.50 时，最大 Lyapunov 指数的理论值为 0.076804 和 0.095137. 系统(14)在 $\varepsilon = 0.008$ 和 0.012 时，最大 Lyapunov 指数的理论值为 0.104558 和 0.128993. 表 1—4 的第 3 列 $\lambda_{\rm fix}$ 表示改进算法的计算结果，第 4 列 $\sigma_{\rm fix}$ 为计算结果与理论计算值的误差百分比. 表 1—4 的 $\lambda_{\rm fix}$ 和 $\sigma_{\rm fix}$ 表明：对于较短的时间序列，采用多变量相空间重构计算最大 Lyapunov 指数明显优于单变量时间序列相空间重构时的计算结果. 相对与理论计算值的偏差，在采用 4 变量时偏差可以下降到 −7% 以内. 该仿真计算表明对较短的时间序列在多变量情况下计算最大 Lyapunov 指数是可行的.

表 1　系统 1 在 $\varepsilon = 0.05$ 时的最大 Lyapunov 指数

变量个数	重构参数(m/τ)	$\lambda_{\rm fix}$	$\sigma_{\rm fix}$/%	$\lambda_{\rm var}$	$\sigma_{\rm var}$/%
1	6/17	0.061173	−20.35	0.06117	−20.35
2	4/17,3/14	0.066882	−12.92	0.08056	4.89
3	1/17,4/14,2/11	0.070499	−8.21	0.08459	10.15
4	1/17,4/14,2/11,1/16	0.071536	−6.86	0.08216	6.97

表 2　系统 1 在 $\varepsilon = 0.50$ 时的最大 Lyapunov 指数

变量个数	重构参数(m/τ)	$\lambda_{\rm fix}$	$\sigma_{\rm fix}$/%	$\lambda_{\rm var}$	$\sigma_{\rm var}$/%
1	7/14	0.073547	−22.69	0.07355	−22.69
2	6/14,1/14	0.083211	−12.54	0.08267	−13.11
3	6/14,1/14,1/14	0.085802	−9.81	0.08545	−10.18
4	1/14,4/14,1/14,1/14	0.090843	−4.51	0.08384	−11.88

表 3　系统 2 在 $\varepsilon = 0.008$ 时的最大 Lyapunov 指数

变量个数	重构参数(m/τ)	$\lambda_{\rm fix}$	$\sigma_{\rm fix}$/%	$\lambda_{\rm var}$	$\sigma_{\rm var}$/%
1	7/15	0.042245	−59.60	0.04225	−59.60
2	5/15,3/12	0.046174	−55.84	0.08026	−23.23
3	2/15,1/12,3/15	0.084368	−19.31	0.10844	3.71
4	3/15,5/12,1/15,1/15	0.103549	−0.97	0.09933	−5.00

表 4　系统 2 在 $\varepsilon = 0.012$ 时的最大 Lyapunov 指数

变量个数	重构参数(m/τ)	$\lambda_{\rm fix}$	$\sigma_{\rm fix}$/%	$\lambda_{\rm var}$	$\sigma_{\rm var}$/%
1	8/15	0.083325	−35.40	0.0772	−40.16
2	2/15,6/14	0.098919	−23.31	0.08886	−31.11
3	3/15,2/14,1/18	0.106871	−17.15	0.10956	−15.06
4	3/15,2/14,5/18,1/13	0.121149	−6.08	0.12451	−3.48

说明：重构参数(m/τ)中，分子部分表示嵌入维数，分母部分表示重构时延，各个重构变量的参数之间采用逗号分隔.

为了进一步验证并说明采用多变量数据计算最大 Lyapunov 指数以及采用(8)，(9)式寻找全局和局部相空间重构维数的必要性，再给出针对系统 1 和 2 的仿真计算对比：首先采用(8)，(9)式对指定系统(13)和(14)搜索最佳全局和局部的嵌入维数，在重构优化相空间后计算最大 Lyapunov，计算过程中使用每个变量的数据长度为 $2000/p$，p 为变量个数. 即随着变量数量的增加使用的数据量减少；采用变数据长度得到的最大 Lyapunov 指数计算结果参见表 1—4 的 $\lambda_{\rm var}$，表中的 $\sigma_{\rm var}$ 表示数据量改变时计算结果

与理论值偏差的百分比.

表 1—4 中的 λ_{var} 和 σ_{var} 的计算结果再次表明:采用多变量计算时,随着变量数量的增加,对于单个变量数据量的需求可以明显减少,而计算结果基本与大数据量情况下的计算结果相近.例如,本文中采用 4 维 500 个数据点的计算结果与采用 4 维 2000 个数据点的结果十分接近,并且结果始终优于采用 1 维 2000 个数据点的计算结果;对于其他维数多变量环境下的计算结果也十分类似.因此在总的数据需求量不变的情况下,如果采用多变量时间序列来进行最大 Lyapunov 指数计算,则单个时间序列的数量需求量可以与参与计算时间序列的维数呈反比减少.

通过两种不同情况的仿真试验说明了采用多变量计算最大 Lyapunov 指数的意义.

5. 结　论

本文将单变量时间序列计算最大 Lyapunov 指数方法推广到多变量时间序列,并给出多变量时间序列相空间重构的参数选取方法,并经耦合 Rössler 系统产生的 6 维和 7 维多变量数据仿真计算,表明该推广算法的有效性.仿真结果表明:采用多变量数据的计算结果优于单变量的计算结果,采用多变量数据进行计算是必要的;采用多变量重构的相空间质量对计算结果有明显的影响,采用本算法重构的相空间可以给出较优的计算结果;采用多变量计算时,每个时间序列的数据使用量可以与参与计算时间序列的维数呈反比减少,而计算结果基本保持不变.

[1] Abarbanel H 1996 *Analysis of Observed Chaotic Data* (New York: Springer Verlag)

[2] Rosenstei MT, Collins J J, De L C J 1993 *Physica* D **65** 117

[3] Yang S Q, Jia C Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2452(in Chinese)[杨绍清、贾传荧 2002 物理学报 **51** 2452]

[4] Wang H Y, Sheng Z H, Zhang J 2003 *J*. *South*. *Univ*. (Natural Science Edition) **33** 115(in Chinese)[王海燕、盛昭瀚、张　进 2003 东南大学学报(自然科学版)**33** 115]

[5] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **76** 1804

[6] Zhang H, Ma X K, Yang Y *et al* 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 86

[7] Boccaletti S, Valladares D L, Louis M *et al* 2002 *Phys*. *Rev*. E **65** 5204

[8] Cao L Y, Mees A, Judd K 1998 *Physica* D **121** 75

[9] Xiao F H, Yan G R, Han Y H 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 550 (in Chinese)[肖方红、阎桂荣、韩宇航 2005 物理学报 **54** 550]

[10] Xie Y, Xu J X, Yang H J *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 205(in Chinese)[谢　勇、徐健学、杨红军等 2002 物理学报 **51** 205]

[11] You R Y, Chen Z, Xu S C *et al* 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2882(in Chinese)[游荣义、陈　忠、徐慎初等 2004 物理学报 **53** 2882]

[12] Xu L M, Hu G, Shi P L 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 24 (in Chinese)[徐莉梅、胡　岗、史朋亮 2000 物理学报 **49** 24]

[13] Liu W D, Ren K F, Meunier S *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 26

[14] Zou Y L, Zhu J, Chen G R 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 697

Calculation of the maximal Lyapunov exponent from multivariate data

Lu Shan† Wang Hai-Yan

(*School of Economics and Management*, *Southeast University*, *Nanjing* 210096, *China*)

(Received 26 May 2005; revised manuscript received 17 June 2005)

Abstract

According to the method of calculating maximal Lyapunov exponent (MLE) from univariate small data sets, an extended method based on multivariate time series is proposed. The extended method can search out optimal reconstructing parameters to meet the requirement of the original method for reconstructing multivariate phase space, and the method can compute the MLE by making use of the optimal reconstructed multivariate phase space. The method is tested by coupled non-identical chaotic Rössler, coupled chaotic Rössler and hyper chaotic Rössler. The test results show that the extend method is efficient, and the computing results of MLE based on multivariate are much closer to the theoretical values than the results of univariate even when the data sets of each time series become small.

Keywords: multivariate time series, reconstruct phase space, Lyapunov exponent

PACC: 0545

† Corresponding author. E-mail: shine@seu.edu.cn