

两个不相同系统的广义同步化*

李 芳¹⁾ 胡爱花¹⁾ 徐振源^{2)†}

1) 江南大学通信与控制工程学院, 无锡 214122)

2) 江南大学理学院, 无锡 214122)

(2004 年 10 月 11 日收到 2005 年 6 月 27 日收到修改稿)

采用 Temam 无穷维动力系统的惯性流形理论, 证明了两个不相同的系统能实现广义同步化. 在两个系统具有吸收集和吸引子的基础上, 通过定义在一个函数类上的压缩映射的不动点得到了广义同步化流形, 该流形是 Lipschitz 光滑流形, 而且具有不变性与指数吸引性. 数值仿真证实了所建立理论的正确性.

关键词: 广义同步, 吸引子, 广义同步流形

PACC: 0545

1. 引 言

自 1990 年 Pecora 和 Carroll^[1]发现混沌系统可以实现同步以来, 混沌同步已成为非线性科学中的一个热点, 并先后提出各种同步化概念和同步方法^[2-5]. 但已有的文献大多数讨论的是两个完全相同的混沌系统的完全同步, 即 IS (identical synchronization). 由于在实际中难以产生出两个完全相同的混沌系统, 混沌系统之间常存在参数摄动、传输信道失真等原因引起的不同步. 1995 年, Rulkov 等在文献[6]中引入了广义同步 (GS, generalized synchronization) 的概念, 它刻画了两个混沌系统间更广泛的动力学行为.

定义 已知两个动力系统 X 和 Y , 如果存在流形 $M = \{ (X, Y), Y = \Phi(X) \}$, 它包含至少一个 Milnor 吸引子, 则称 X 和 Y 广义同步化, Φ 是广义同步函数, M 是广义同步流形.

根据定义, 广义同步实际上是指两个系统的状态变量之间的函数同步. 因此, IS 可看作是 GS 的特例. 目前关于广义同步的研究还很少, 已有的结果或者是根据数值计算, 根据响应系统与辅助系统的完全同步化来确定驱动系统与响应系统的广义同步化^[6], 或者讨论一些特殊的函数形式与反馈形式^[7], 尚未见到比较严格的数学理论. 由于在实际的物理、

化学、生物等复杂系统中存在着大量的广义同步化现象, 广义同步化可能更容易应用于保密通讯, 也可能与系统科学中图案的突现(涌现)现象有关, 所以进一步研究广义同步化理论是有实际意义的.

本文采用 Temam 的无穷维动力系统中惯性流形理论^[8], 研究了两个不相同的混沌系统在单向线性耦合下的广义同步化问题, 证明了在一定的参数条件下, 广义同步化流形的存在性, 而且广义同步流形是 Lipschitz 光滑的, 具有不变性和吸引性.

2. 方法的描述

考虑以下线性耦合的两个不同混沌系统:

$$\dot{p} = A_1 p + f(p), \quad (1)$$

$$\dot{q} = A_2 q + g(q) + k(\alpha p - q), \quad (2)$$

其中 $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, $q = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in R^m$, $A_1 \in R^{n \times n}$, $A_2 \in R^{m \times m}$ 均为对角线元素小于零的主对角矩阵, $k \in R^{m \times m}$, $\alpha \in R^{m \times n}$ 是耦合参数矩阵且满足 $k_{ii}, \alpha_{ii} > 0$, $k_{ij}, \alpha_{ij} = 0 (j \neq i)$, $f(p)$, $g(q)$ 是足够光滑的非线性函数.

(2) 式可改写为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (A_2 - k)q + g(q) + k\alpha p \\ &= \hat{A}_2 q + g(q) + A_3 p, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\hat{A}_2 = A_2 - k$, 令 $u = (p, q)^T$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{pmatrix}$ 则

* 国家自然科学基金(批准号:10372054)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: xu_zhenyuan@yahoo.com.cn

(1)(3)式成为

$$\dot{u} = Au + \begin{pmatrix} f(p) \\ g(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_3 p \end{pmatrix}, \quad (4)$$

(4)式的解定义了半群 $S(t):u_0 \rightarrow u(t)$,其中 u_0 与 $u(t)$ 分别是 u 在初始时刻和 t 时刻的解.为了推导理论方法,先假定系统 p, q 是整体有界的,且分别存在吸收集 B_1, B_2 和吸引子 Γ_1, Γ_2 ,并且约定用 $|\cdot|$ 表示欧氏空间的范数.为了克服非线性项引起的困难,对方程(1)(2)的非线性项进行截断.选择 $\rho > 0$,使得 B_1 包含在 R_x^n 而 B_2 包含在 R_y^m 中半径为 $\frac{\rho}{2}$ 而中心在

原点的球内.选择 C^∞ 函数 $\theta:R_+ \rightarrow [0, 1]$ 满足

$$\begin{aligned} 0 &\leq s \leq 1, \\ \theta(s) &= 1, \\ \theta(s) &= 0, s \geq 2, \\ \sup_{s \geq 0} |\theta'(s)| &\leq 2, \end{aligned}$$

令 $\theta_\rho(s) = \theta(\frac{s}{\rho})$, $f_\rho(p) = \theta_\rho(|p|)f(p)$, $g_\rho(q) = \theta_\rho(|q|)g(q)$, $A_{30}p = \theta_\rho(|p|)A_3p$, 则(4)式修正为

$$\dot{u} = Au + \begin{pmatrix} f_\rho(p) \\ g_\rho(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_{30}p \end{pmatrix}, \quad (5)$$

即

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_\rho(p) \\ g_\rho(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_{30}p \end{pmatrix}, \quad (5a)$$

当 $|p| < \rho, |u| < \rho$ 时,方程(5)与(4)一致.当 $|p| \geq 2\rho$ 时, $\theta_\rho(|p|) = 0$, 此时(5)式成为 $\dot{p} = A_1 p$, $\dot{q} = \hat{A}_2 q$, 显然 $u(t) = (p(t), q(t))^T$ 以指数收敛于半径为 $\rho_3 \geq 2\rho$ 的球中.容易得到以下的引理:

引理 2.1 f_θ 和 g_θ 分别是 $R_x^n \rightarrow R_x^n, R_y^m \rightarrow R_y^m$ 的整体有界算子,即

$$\sup_{p \in R_x^n} |f_\theta(p)| \leq M_1, \sup_{q \in R_y^m} |g_\theta(q)| \leq M_1, \quad (6)$$

其中 M_1 是与 k 无关的常数,则

引理 2.2 f_θ 是 $R_x^n \rightarrow R_x^n, g_\theta$ 是 $R_y^m \rightarrow R_y^m$ 的整体 Lipschitz 映射, $\theta_i = \theta_\rho(|p_i|)$ 或 $\theta_\rho(|u_i|), i = 1, 2$, 其中 M_2 是与 k 无关的常数,则有

$$\begin{aligned} |f_{\theta_1}(p_1) - f_{\theta_2}(p_2)| &\leq M_2 |p_1 - p_2|, \\ |g_{\theta_1}(q_1) - g_{\theta_2}(q_2)| &\leq M_2 |u_1 - u_2|, \quad (7) \end{aligned}$$

定义半群算子 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的同步化流形是一个光滑流形 Θ (至少是 Lip 的),它满足

1) Θ 是不变的,即有 $S(t)\Theta \subset \Theta$;

2) Θ 指数吸引(4)式的所有解,设 dist 表示距离,即存在正常数 C_1 与 C_2 ,使得对于 $u_0 \in R^{n+m}$ 有 $\text{dis}(S(t)u_0, \Theta) \leq C_1 \exp(-C_2 t), \forall t \geq 0$;

3) 存在 Lip 函数 Φ ,使得 $\Theta = \{p, \Phi(p)\}, p \in R_x^n$.

要寻找同步化流形 Θ ,使它是由 Lip 函数 $\Phi:R_x^n \rightarrow R_y^m$ 的图构造而得的,即 $\Theta = \text{Graph}\Phi$ (Graph 指函数图像).函数 Φ 作为一个算子是在函数类 F'_b 上不动点得到的,其中 F'_b 是定义为满足以下条件的函数类

$$\begin{aligned} |\Phi(p)| &\leq b, \forall p \in R_x^n, \\ |\Phi(p_1) - \Phi(p_2)| &\leq l |p_1 - p_2|, \\ \text{Supp}\Phi &\subset \{p \in R_x^n, |p| \leq 4\rho\}, \quad (8) \end{aligned}$$

其中 $b > 0, l > 0$, Supp 表示支撑集.

当 $p(t), q(t) = \Phi(p(t))$ 满足(5)式时, $u = p(t) + \Phi(p(t))$ 即为(5)式的解.

设 $\Phi \in F'_b$ 给定初始值 $p_0 \in R_x^n$,则由(5)式可解得 $p = p(t; p_0)$,并且求得当 $t \rightarrow \infty$ 时的解 $q(t)$ 是有界解,故

$$\begin{aligned} q(0) &= \int_{-\infty}^0 \exp(-\hat{A}_2 \tau) \{ \theta_\rho(|u|) [g(\Phi(p)) \\ &\quad + A_3 p] \} d\tau, \quad (9) \end{aligned}$$

$q(0)$ 依赖于 $\Phi \in F'_b, p_0 \in R_x^n$, 映射 $p_0 \in R_x^n \rightarrow q(0, p_0; \Phi) \in R_y^m$ 记为 $J\Phi$. 因此

$$\begin{aligned} J\Phi(p_0) = q(0) &= \int_{-\infty}^0 \exp(-\hat{A}_2 \tau) \{ \theta_\rho(|u|) \\ &\quad \times [g(\Phi(p)) + A_3 p] \} d\tau. \quad (10) \end{aligned}$$

寻找有关的条件使得:1) J 映射 F'_b 到自身;2) J 在 F'_b 上是压缩的.在 F'_b 上引入距离 $\|\Phi_1 - \Phi_2\| = \sup_{p \in R_x^n} |\Phi_1(p) - \Phi_2(p)|$, 则 F'_b 是一个完备的度量空间,以下将对算子 J 的性质进行研究.

3. 广义同步化流形的存在性

引理 3.1 设 $p_0 \in R_x^n$, 则

$$|J\Phi(p_0)| \leq \frac{1}{K} (M_1 + \rho |k\alpha|). \quad (11)$$

证明

$$\begin{aligned} |J\Phi(p_0)| &= \left| \int_{-\infty}^0 \exp(-\hat{A}_2 \tau) \theta_\rho(|u|) \right. \\ &\quad \times [g(\Phi(p)) + A_3 p] d\tau \left. \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^0 \exp(K\tau) [M_1 + \rho |k\alpha|] d\tau \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{K}(M_1 + \rho |k\alpha|), \quad (12)$$

其中 $K = \min\{-\hat{A}_2(i, i)\}$, 其中 $\hat{A}_2(i, i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示矩阵 \hat{A}_2 中 (i, i) 位置上的元素. 可取 $b = \frac{M_1 + \rho |k\alpha|}{K}$. 则对 $\Phi \in F_b^l$, 有 $|J\Phi(p_0)| \leq b, \forall p_0 \in R_x^n$.

现考虑 $J\Phi$ 的支集性质.

引理 3.2 对每个 $\Phi \in F_b^l, J\Phi$ 的支集包含在 $\{p \in R_x^n, |p| \leq 4\rho\}$ 中.

证明

$u = p + \Phi(p)$, 如果 $|p| > 2\rho$, 则 $|u| = [|p|^2 + |\Phi(p)|^2]^{1/2} > 2\rho, \theta_\rho(|u|) = 0$. 现设 $|p_0| > 4\rho$, 则在 t 的某个区间上有 $|p(t)| > 2\rho$, 于是 (5) 式成为 $\dot{p} = A_1 p, p(t) = p(0) \exp A_1(t)$.

对 $\tau < 0, 2\rho < |p(0)| \leq |p(\tau)| \exp(K'\tau) \leq |p(\tau)|, K' = \min\{-A_1(i, i)\}, i = 1, 2, \dots, n$. 因而 $\theta_\rho(|u|) = 0, \forall \tau \leq 0$, 则由 (5) 式得 $J\Phi(p_0) = 0$.

引理 3.3 设 $p_1, p_2 \in R_x^n, \Phi_1, \Phi_2 \in F_b^l, u_i = p_i + \Phi_i(p_i)$, 则

$$\begin{aligned} & |g_{\theta_1}(q_1) - g_{\theta_2}(q_2)| \\ & \leq M_3[(1+l)|p_1 - p_2| + \|\Phi_1 - \Phi_2\|], \\ & |f_{\theta_1}(p_1) - f_{\theta_2}(p_2)| \\ & \leq M_3|p_1 - p_2|, \end{aligned} \quad (13)$$

证明

令 $G = |g_{\theta_1}(q_1) - g_{\theta_2}(q_2)| = |\theta_\rho(|u_1|)g(q_1) - \theta_\rho(|u_2|)g(q_2)|$, 分以下三种情况讨论:

- (1) $2\rho \leq |u_1|$ 且 $2\rho \leq |u_2|$;
- (2) $|u_1| < 2\rho < |u_2|$ 或 $|u_2| < 2\rho < |u_1|$;
- (3) $|u_1| \leq 2\rho$ 且 $|u_2| \leq 2\rho$.

由于 $|u_1| \geq 2\rho$ 时, 有 $\theta_\rho(|u_1|) = 0, |\theta'| \leq \frac{2}{\rho}$, 则得:

- (1) $G = 0$;
- (2) $G = |\theta_\rho(|u_1|)g(q_1)| \leq |\theta_\rho(|u_1|)g(u_1) - \theta_\rho(|u_2|)g(u_2)| \leq 2\rho^{-1}|u_1 - u_2| M_1 \leq 2\rho^{-1} M_1 |p_1 - p_2 + \Phi_1(p_1) - \Phi_2(p_2)| \leq M_3[(1+l)|p_1 - p_2| + \|\Phi_1 - \Phi_2\|]$;
- (3) 由引理 2.2 知 $G \leq M_2|u_1 - u_2| \leq M_3[(1+l)|p_1 - p_2| + \|\Phi_1 - \Phi_2\|]$.

(13) 式的另一不等式可以类似证明.

现证明在适当的假设下, J 是从 $F_b^l \rightarrow F_b^l$ 的

Lipschitz 映射且是压缩的.

首先设 Φ 固定, $p_{01}, p_{02} \in R_x^n, p_1(t), p_2(t)$ 是 (5) 式满足初始条件 $p_i(0) = p_{0i} (i = 1, 2)$ 的解. 令 $\Delta = p_1 - p_2$, 则 Δ 满足方程

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= A_1 \Delta + \theta_\rho(|p_1|)g(p_1) - \theta_\rho(|p_2|)g(p_2), \\ \frac{1}{2} \frac{d|\Delta|^2}{dt} &\geq -|A_1| |\Delta|^2 - M_3(1+l)|\Delta|^2, \end{aligned}$$

可得当 $\tau \leq 0$ 时,

$$|\Delta(\tau)| \leq \Delta(0) \exp\{-|A_1| - M_3(1+l)\tau\}. \quad (14)$$

引理 3.4 设 $K = |A_1| - M_3(1+l) > 0, L = \frac{M_3(1+l) + |k\alpha|}{K - |A_1| - M_3(1+l)}$, 则对 $\Phi \in F_b^l, p_{01}, p_{02} \in R_x^n$, 有

$$|J\Phi(p_{01}) - J\Phi(p_{02})| \leq L|p_{01} - p_{02}|. \quad (15)$$

证明

$$\begin{aligned} & |J\Phi(p_{01}) - J\Phi(p_{02})| \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^0 \exp(-\hat{A}_2 \tau) [\theta_\rho(|u_1|)g(\Phi(p_1)) - \theta_\rho(|u_2|)g(\Phi(p_2))] + A_{3\theta 1} p_1 - A_{3\theta 2} p_2 \right| d\tau \\ & \leq M_3(1+l) \int_{-\infty}^0 \exp(K\tau) |\Delta(\tau)| d\tau \\ & \quad + \int_{-\infty}^0 \exp(K\tau) |k\alpha| |\Delta(\tau)| d\tau \\ & \leq \frac{M_3(1+l) + |k\alpha|}{K - |A_1| - M_3(1+l)} |\Delta(0)| \\ & \leq L|p_{01} - p_{02}|. \end{aligned} \quad (16)$$

由 (11) (15) 式和引理 3.2 知 $J\Phi \in F_b^l$.

现证明 J 是 Lipschitz 映射, 为此考虑两个函数 Φ_1, Φ_2 具有同一初始条件.

令 $p_i = p(t; \Phi_i, p_0), u_i = p_i + \Phi_i(p_i) (i = 1, 2)$. 我们估计 $|J\Phi_1(p_0) - J\Phi_2(p_0)|$ 的值.

$$\begin{aligned} & |J\Phi_1(p_0) - J\Phi_2(p_0)| \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^0 \exp(-\hat{A}_2 \tau) [\theta_\rho(|u_1|)g(u_1) + A_3 p_1] - \theta_\rho(|u_2|)g(u_2) + A_3 p_2 \right| d\tau \\ & \leq M_3 \int_{-\infty}^0 |\exp(-\hat{A}_2 \tau) [(1+l)\Delta(\tau) + |\Phi_1 - \Phi_2|]| d\tau + |ak| \\ & \quad \times \int_{-\infty}^0 |\exp(-\hat{A}_2 \tau)\Delta(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{d\Delta}{dt} = A_1 \Delta + \theta_\rho(|p_1|)g(p_1) - \theta_\rho(|p_2|)g(p_2),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d|\Delta|^2}{dt} \geq -|A_1| |\Delta|^2 - M_3 |\Delta|^2 - |\Phi_1 - \Phi_2| |\Delta|,$$

$$\frac{d|\Delta|}{dt} \geq -|A_1| |\Delta| - M_3 |\Delta| - |\Phi_1 - \Phi_2|,$$

因 $\Delta(0)=0$ 当 $\tau < 0$,

$$|\Delta(\tau)| \leq \frac{|\Phi_1 - \Phi_2|}{|A_1| + M_3} \exp[-(|A_1| + M_3)\tau], \quad (17)$$

因此

$$\begin{aligned} & |J\Phi_1(p_0) - J\Phi_2(p_0)| \\ & \leq M_3 \int_{-\infty}^0 \left| \exp(-\hat{A}_2\tau) \left\{ (1+l) \frac{|\Phi_1 - \Phi_2|}{|A_1| + M_3} \right. \right. \\ & \quad \times \exp[-(|A_1| + M_3)\tau] + \left. \left. \|\Phi_1 - \Phi_2\| \right\} \right| d\tau \\ & \quad + |k\alpha| \int_{-\infty}^0 \left| \exp(-\hat{A}_2\tau) \frac{|\Phi_1 - \Phi_2|}{|A_1| + M_3} \right. \\ & \quad \times \left. \exp[-(|A_1| + M_3)\tau] \right| d\tau \\ & = |\Phi_1 - \Phi_2| \left\{ \frac{M_3(1+l)}{|A_1| + M_3} \left(\frac{1}{K - |A_1| - M_3} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{M_3}{K} + \frac{|k\alpha|}{|A_1| + M_3} \left(\frac{1}{K - |A_1| - M_3} \right) \right\} \\ & = L' |\Phi_1 - \Phi_2|, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L' &= \frac{M_3(1+l)}{|A_1| + M_3} \left(\frac{1}{K - |A_1| - M_3} \right) + \frac{M_3}{K} \\ & \quad + \frac{|k\alpha|}{|A_1| + M_3} \left(\frac{1}{K - |A_1| - M_3} \right), \end{aligned}$$

要求 J 在 F_b^l 上是压缩的,即要求参数条件使

$$L \leq l, L' < 1 \quad (18)$$

成立,此时 J 存在不动点.

4. 广义同步化流形的不变性与指数吸引性

现证明广义同步流形 $M = \text{Graph}\Phi$ 在 $(S(t))$ 作用下是不变的,即 $(S(t))M \subset M$,并证明指数吸引系统(5)式的所有轨道.先证明 M 的不变性.由于

$$\begin{aligned} \Phi(p_0) &= \int_{-\infty}^0 \exp(-\hat{A}_2\tau) \mathbb{I} g_\theta(u(\tau, p_0)) \\ & \quad + A_{30}p(\tau, p_0) \mathbb{I} d\tau, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $u(\tau, p_0) = p(\tau, p_0) + \Phi(p(\tau), p_0)$.

在(19)式中将 p_0 置换成 $p(t)$,且 $p(\tau, p(t), p_0) = p(t + \tau, p_0)$,则有

$$\Phi(p(t)) = \int_{-\infty}^0 \exp(-\hat{A}_2\tau) \mathbb{I} g_\theta(u(\tau, p(t)))$$

$$\begin{aligned} & \quad + A_{30}p(\tau, p(t)) \mathbb{I} d\tau \\ & = \int_{-\infty}^t \exp[-\hat{A}_2(t - \tau)] \mathbb{I} g_\theta(u(\tau, p_0)) \\ & \quad + A_{30}p(\tau) \mathbb{I} d\tau, \end{aligned}$$

上式对 t 求导, $u(t) = p(t) + q(t)$, $q(t) = \Phi(p(t))$ 为(5)式的解,这表明 $(S(t))M \subset M$.

为了证明 M 指数吸引(5)式的所有解,先叙述方程的挤压性质.我们定义锥 Σ :

$|q_1 - q_2| \leq \gamma |p_1 - p_2|$, $\gamma > 0$, $p_i \in R_x^n$, $q_i \in R_y^m$.并令 $\tilde{p} = p_1 - p_2$, $\tilde{q} = q_1 - q_2$, 则

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= \dot{p}_1 - \dot{p}_2 = A_1\tilde{p} + \theta_\rho(|p_1|)(p_1) \\ & \quad - \theta_\rho(|p_2|)(p_2), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{p}|^2 &\geq -|A_1| |\tilde{p}|^2 - M_2 |\tilde{p}|^2 \\ & \quad - M_2 |\tilde{p}| |\tilde{q}|, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = \hat{A}_2\tilde{q} + \theta_\rho(|u_1|) \mathbb{I} g(u_1) \\ & \quad + A_3p_1 - \theta_\rho(|u_2|) \mathbb{I} g(u_2) + A_3p_2, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{q}|^2 &\leq -K |\tilde{q}|^2 + M_2 |\tilde{q}|^2 \\ & \quad + (M_2 + |k\alpha|) |\tilde{p}| |\tilde{q}|. \end{aligned} \quad (21)$$

如果 $\tilde{u} = u_1 - u_2$ 处在锥 Σ 的边界上,即 $|q_1 - q_2| = \gamma |p_1 - p_2|$,由(20)(21)式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\tilde{q}|^2 - \gamma^2 |\tilde{p}|^2] \\ & \leq -K |\tilde{q}|^2 + M_2 |\tilde{q}|^2 + (M_2 + |k\alpha|) |\tilde{q}|^2 \gamma^{-1} \\ & \quad + \gamma^2 [|A_1| |\tilde{p}|^2 + M_2 |\tilde{p}|^2 + M_2 |\tilde{p}| |\tilde{q}|] \\ & \leq |\tilde{q}|^2 [-K + 2M_2 + (M_2 + |k\alpha|) \gamma^{-1} + |A_1| + \gamma M_2], \end{aligned}$$

令

$$\xi = K - 2M_2 - (M_2 + |k\alpha|) \gamma^{-1} - |A_1| - \gamma M_2 > 0, \quad (22)$$

则 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\tilde{q}|^2 - \gamma^2 |\tilde{p}|^2] < 0$.即 $\tilde{u} = \tilde{p} + \tilde{q}$ 仍处在锥内.如果 $\tilde{u} = u_1 - u_2$ 处在锥 Σ 的边界外,即 $|q_1 - q_2| > \gamma |p_1 - p_2|$.

由(21)式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{q}|^2 &\leq -K |\tilde{q}|^2 + M_2 |\tilde{q}|^2 \\ & \quad + (M_2 + |k\alpha|) \gamma^{-1} |\tilde{q}|^2, \end{aligned} \quad (23)$$

令 $\eta = K - M_2 - (M_2 + |k\alpha|) \gamma^{-1} > 0$, 则

$$\begin{aligned} |\tilde{q}(t)| &\leq |q(0)| \exp(-2\eta t), \\ |\tilde{u}(t)| &\leq \sqrt{|\tilde{q}\gamma^{-1}|^2 + |\tilde{q}|^2} \end{aligned}$$

$$= |\tilde{q}(0)| \sqrt{1 + \gamma^{-2}} \exp(-\eta t).$$

因此我们得以下定理(挤压性质)

定理 4.1 当条件(22)(23)式成立时,对于方程(5),以下不等式成立

或者

$$|\tilde{q}(t)| \leq \gamma |\tilde{p}(t)|, \quad (24)$$

或者

$$|\tilde{u}(t)| \leq |\tilde{q}(t_0)| \sqrt{1 + \gamma^{-2}} \exp[-\gamma(t - t_0)]. \quad (25)$$

定理 4.2 方程(5)的两个不同解 $u_1(t), u_2(t)$ 满足

$$|\tilde{u}(t)| = |u_1(t) - u_2(t)| = |S(t)u_0 - S(t)v_0| \leq \exp(K_1 t) |u_0 - v_0|. \quad (26)$$

证明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\tilde{p}|^2 + |\tilde{q}|^2] \\ & \leq |A_1| |\tilde{p}|^2 + |\hat{A}_2| |\tilde{q}|^2 \\ & \quad + \alpha M_2 + |k\alpha| (|\tilde{p}|^2 + |\tilde{q}|^2) \\ & \leq K_1 (|\tilde{p}|^2 + |\tilde{q}|^2), \end{aligned}$$

其中 $K_1 = \max\{\alpha M_2 + |k\alpha|, |A_1|, |\hat{A}_2|\}$ 故有

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \leq \exp(K_1 t) |u_0 - v_0|.$$

将(26)式应用于满足 $t_0 \leq t \leq 2t_0$ 的一切 t , 其中 $t_0 = \ln 2 / (2K_1)$, 设当 $|u_0| \leq R, |v_0| \leq R$ (R 由以下决定) 取 $\gamma = \frac{1}{8}$, 令 $\sqrt{1 + \gamma^{-2}} \exp(-\tilde{\eta}t_0) = \frac{1}{2}$, 则当 η

$\geq \tilde{\eta} = \frac{1}{t_0} \ln \frac{2\sqrt{1 + \gamma^{-2}}}{\gamma}$ 时挤压性质成为

$$|q_1(t) - q_2(t)| \leq |p_1(t) - p_2(t)| / 8, \quad (27)$$

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \leq |u_0 - v_0| / 2, \quad (28)$$

其中 $u_0 \in R^{n+m}, v_0 \in R^{n+m}, |u_0| \leq R, |v_0| \leq R, t_0 \leq t \leq 2t_0$.

固定 $R = 4\rho + b$ (5)式的轨道最终将进入 R^{n+m} 中以 O 为原点 4ρ 为半径的球内, 设 $|u_0| \leq 4\rho, |S(t)u_0| \leq 4\rho$. 首先证明对任何 t_1 ($t_0 \leq t_1 \leq 2t_0$), 有

$$\text{dis}(S(t)u_0, M) \leq \text{dis}(u_0, M) / 2,$$

其中 $\text{dis}(\varphi, M) = \inf\{|\varphi - v| : v \in M\}$.

为此选取 v_0 使 $|u_0 - v_0| = \text{dis}(u_0, M), v_0 = \bar{P}v_0 + \Phi(\bar{P}v_0)$ 其中 $\bar{P} : R^{n+m} \rightarrow R_x^n, \bar{Q} = I - \bar{P} : R^{n+m} \rightarrow R_y^m$ 为投影算子. 我们要证明 $|\bar{P}v_0| \leq 4\rho$.

用反证法: 如果 $|\bar{P}v_0| > 4\rho > |\bar{P}u_0|$, 则

$$\Phi(\bar{P}v_0) = 0, v_0 = \bar{P}v_0.$$

另外存在 $\beta, 0 < \beta < 1$ 使 $|\bar{P}v_\beta| = 4\rho, v_\beta = \beta\bar{P}u_0 + (1 - \beta)v_0 \in R_x^n$ 则有 $\Phi(v_\beta) = 0$ 因此 $v_\beta \in M$ 且

$$\begin{aligned} & |v_\beta - u_0|^2 \\ & = |v_\beta - \bar{P}u_0|^2 + |\bar{Q}u_0|^2 \\ & = |\beta\bar{P}u_0 + (1 - \beta)v_0 - \bar{P}u_0|^2 + |\bar{Q}u_0|^2 \\ & = |(1 - \beta)(v_0 - \bar{P}u_0)|^2 + |\bar{Q}u_0|^2 \\ & < |v_0 - \bar{P}u_0|^2 + |\bar{Q}u_0|^2 = |v_0 - u_0|^2, \end{aligned}$$

上式与 $|v_0 - u_0| = \text{dis}(u_0, M)$ 矛盾, 故 $|\bar{P}v_0| \leq 4\rho$. 因 $|\Phi(\bar{P}v_0)| \leq b$ 则

$$|v_0| \leq |\bar{P}v_0| + |\Phi(\bar{P}v_0)| \leq 4\rho + b = R.$$

对 $S(t)u_0, S(t)v_0$ 应用挤压性质(27)(28)式, 如果(28)式成立, $\text{dist}(S(t_1)u_0, M) \leq |S(t_1)u_0 - S(t_1)v_0| \leq |u_0 - v_0| / 2 = \text{dis}(u_0, M) / 2$;

如果(27)式成立, 利用(26)式, 得到

$$\begin{aligned} & \text{dis}(S(t)u_0, M) \\ & \leq |S(t_1)u_0 - [\bar{P}S(t_1)u_0 + \Phi(\bar{P}S(t_1)u_0)]| \\ & \leq |\bar{Q}S(t_1)u_0 - \bar{Q}S(t_1)v_0| \\ & \quad + |\Phi(\bar{P}S(t_1)v_0) - \Phi(\bar{P}S(t_1)u_0)| \\ & \leq (1/8 + l) |\bar{P}S(t_1)v_0 - \bar{P}S(t_1)u_0| \\ & \leq |S(t_1)u_0 - S(t_1)v_0| / 4 \\ & \leq |u_0 - v_0| / 2 = \text{dis}(u_0, M) / 2. \end{aligned}$$

对任意的 $t \geq t_0, t = nt_1, t_0 \leq t_1 \leq 2t_0$, 有

$$\begin{aligned} & \text{dis}(S(t)u_0, M) \\ & \leq (1/2)^n \text{dis}(u_0, M) \\ & = \exp\left(-\frac{t}{t_1} \ln 2\right) \text{dis}(u_0, M) \\ & \leq \exp\left(-\frac{t}{2t_0} \ln 2\right) \text{dis}(u_0, M), \quad (29) \end{aligned}$$

(29)式给出了指数为 $\frac{1}{2t_0} \ln 2$, 最后得到定理 4.3.

定理 4.3 设条件(22)与(23)式成立, 并设 $0 < l < 1/8$ 则存在 $b > 0$, 使 1) J 映射 F_b^l 到 F_b^l ; 2) J 在 F_b^l 中具有一个不动点; 3) $M = \text{Graph } \Phi$ 是系统(1)和(2)的广义同步化流形.

5. 数值例子

对于驱动系统(1)和响应系统(2), 构造如下的辅助系统

$$\dot{m} = A_2 m + g(m) + k(ap - m). \quad (30)$$

当系统(2)与(30)在不同的初始条件下达到完全同

步时,系统(1)与(2)即达到广义同步.

由于 Lorenz 系统、Chen 系统存在着吸引集和吸引子^[9],因此,若选择其作为本文中的驱动与响应系统,则理论推导成立.我们进行了数值模拟,结果与理论推导一致,如下

1)选择两个参数不相同的 Lorenz 系统作为驱动与响应系统,则

$$\text{驱动系统 } p \begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(-x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = -\sigma_1 x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = -b_1 x_3 + x_1 x_2 - b_1(r_1 + \sigma_1), \end{cases} \quad (31)$$

$$\text{响应系统 } q \begin{cases} \dot{y}_1 = \sigma_2(-y_1 + y_2) + k_1(\alpha_1 x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 = -\sigma_2 y_1 - y_2 - y_1 y_3 + k_2(\alpha_2 x_2 - y_2), \\ \dot{y}_3 = -b_2 y_3 + y_1 y_2 - b_2(r_2 + \sigma_2) + k_3(\alpha_3 x_3 - y_3), \end{cases} \quad (32)$$

$$\text{辅助系统 } m \begin{cases} \dot{z}_1 = \sigma_2(-z_1 + z_2) + k_1(\alpha_1 x_1 - z_1), \\ \dot{z}_2 = -\sigma_2 z_1 - z_2 - z_1 z_3 + k_2(\alpha_2 x_2 - z_2), \\ \dot{z}_3 = -b_2 z_3 + z_1 z_2 - b_2(r_2 + \sigma_2) + k_3(\alpha_3 x_3 - z_3), \end{cases} \quad (33)$$

取 $\sigma_1 = 10, r_1 = 28, b_1 = \frac{8}{3}; \sigma_2 = 20, r_2 = 45.92, b_2 = \frac{8}{3}; k_1 = k_2 = k_3 = 15, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.02$, 则各个系统的三维图和误差图见图 1(a—e):

2)选取 Lorenz 系统为 p 系统, Chen 系统为 q 系统, 则驱动系统 p 同(31),

响应系统 q :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sigma_2(-y_1 + y_2) + k_1(\alpha_1 x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 = (r_2 - \sigma_2)y_1 + r_2 y_2 - y_1 y_3 + k_2(\alpha_2 x_2 - y_2), \\ \dot{y}_3 = -b_2 y_3 + y_1 y_2 + k_3(\alpha_3 x_3 - y_3), \end{cases} \quad (34)$$

辅助系统 m :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \sigma_2(-z_1 + z_2) + k_1(\alpha_1 x_1 - z_1), \\ \dot{z}_2 = (r_2 - \sigma_2)z_1 + r_2 z_2 - z_1 z_3 + k_2(\alpha_2 x_2 - z_2), \\ \dot{z}_3 = -b_2 z_3 + z_1 z_2 + k_3(\alpha_3 x_3 - z_3), \end{cases} \quad (35)$$

取 $\sigma_1 = 10, r_1 = 45.92, b_1 = \frac{8}{3}; \sigma_2 = 35, r_2 = 28, b_2 = 3; k_1 = k_2 = k_3 = 13.5, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.05$, 则各个系统的三维图和误差图见图 2(a—e).

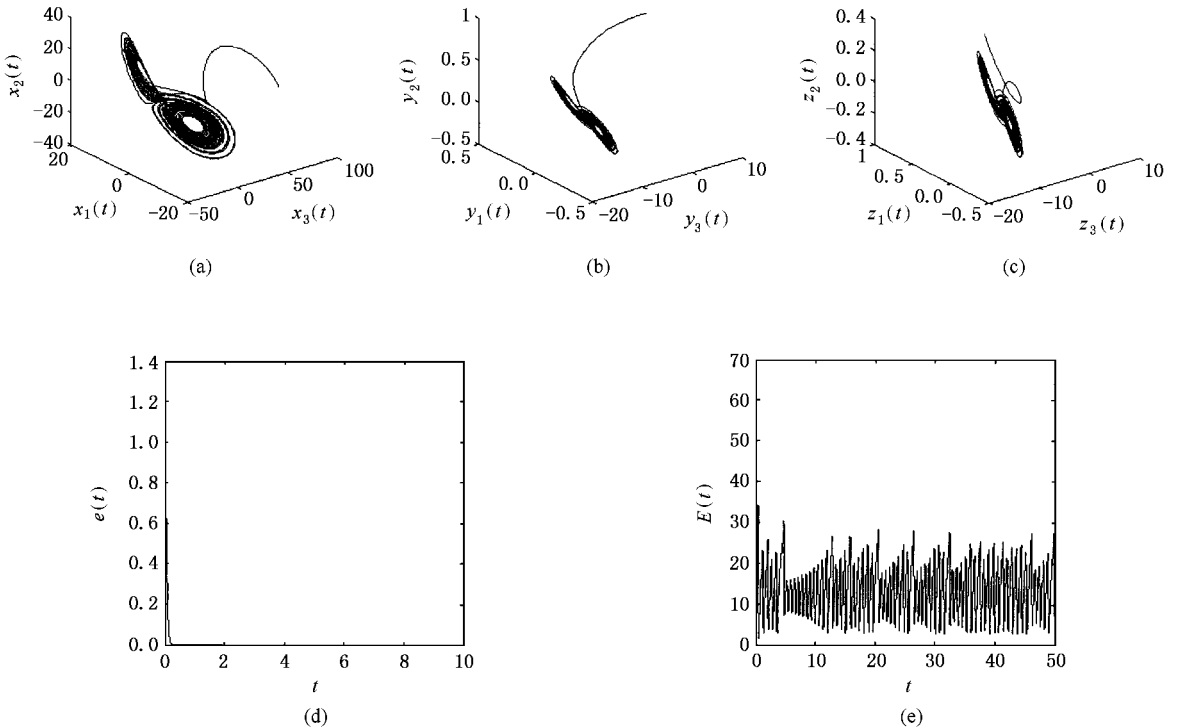


图 1 (a)(b)(c)分别为驱动系统、响应系统的三维图和辅助系统的三维图 (d)是响应系统与辅助系统的误差图 (e)是驱动系统与响应系统的误差图

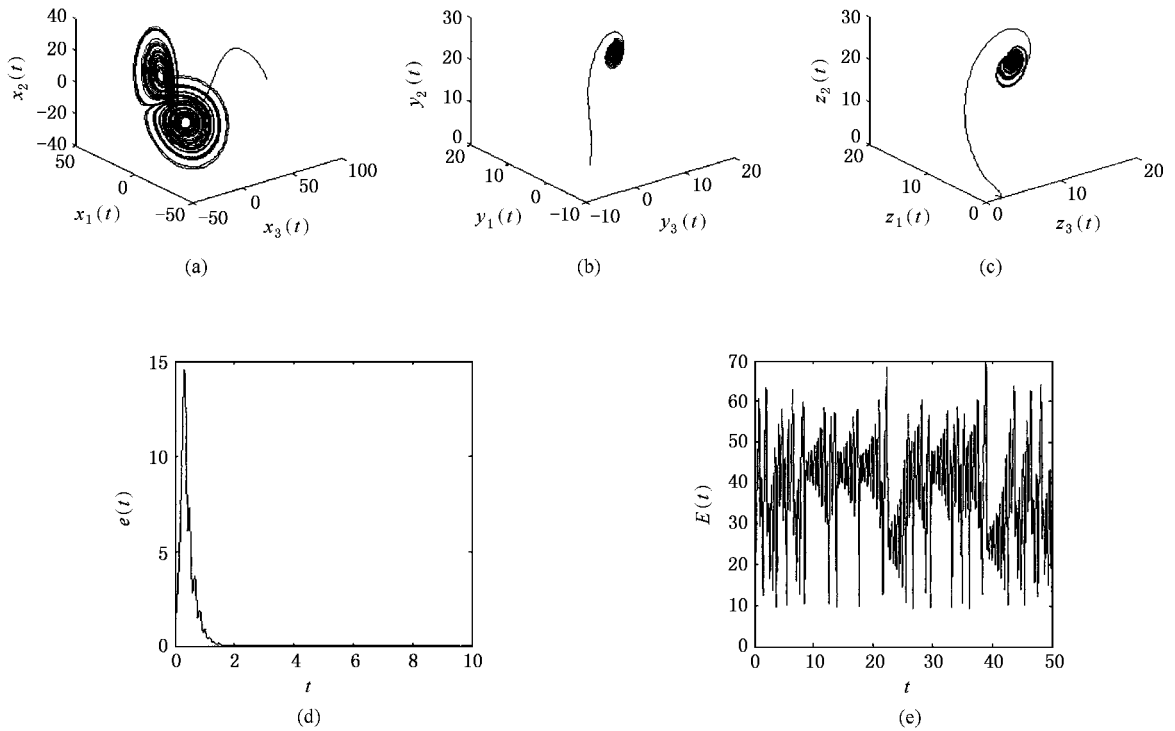


图 2 (a)(b)(c)分别为驱动系统、响应系统的三维图和辅助系统的三维图 (d)响应系统与辅助系统的误差图 (e)驱动系统与响应系统的误差图

6. 结 论

系统间的广义同步化已经引起了人们越来越多的注意,关于这方面的研究也有了一定的成果,但大部分的文章只给出了如何构造广义同步系统,而对于系统间存在广义同步化的光滑性、不变性和指数

吸引性均没有研究.本文给出了两个不相同的系统能实现广义同步化的理论证明,并证明了在一定的参数条件下广义同步流形具有光滑性、不变性和指数吸引性,数值仿真与理论推导相一致.我们也证明了广义同步流形缺少光滑性后具有 Hölder 连续性,详细理论推导将另文给出.

- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [2] Dai D , Ma X K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1237 (in Chinese) 戴栋、马西奎 2001 物理学报 **50** 1237]
 [3] Tao C H , Lu J A , Lu J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) 陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
 [4] Guan X P , He Y H , Wu J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2718 (in Chinese) 关新平、何宴辉、邬晶 2003 物理学报 **52** 2718]
 [5] Li G H , Xu D M , Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese) 李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379]

- [6] Abarband M O I , Rulkov N F , Sushchik M M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 428
 [7] Lu J G , Xi Y G 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **17** 825
 [8] Temam R 1988 *Appl. Math. Series* (New York : Springer-Verlag) p68
 [9] Chen G R , Lü J H 2003 *The Dynamics Analysis, Control and Synchronization of Lorenz Family* (Beijing : Science Press) p91 (in Chinese) 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 (北京 科学出版社) p91]

Generalized synchronization of two non-identical systems ^{*}

Li Fang¹⁾ Hu Ai-Hua¹⁾ Xu Zhen-Yuan^{2)†}

1) *School of Communication and Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China*

2) *School of Science, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China*

(Received 11 October 2004 ; revised manuscript received 27 June 2005)

Abstract

Generalized synchronization of two non-identical systems is studied based on Temam's inertia manifold theory of infinite dimensional dynamical systems. On the assumption that both systems have absorbing sets and attractors, the generalized synchronization manifold, which has the property of Lipschitz smoothness, invariance and exponential absorption, can be attained by defining a fixed point in a class of functions. Simulation results validate the theory.

Keywords : generalized synchronization, attractor, generalized synchronization manifold

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372054).

[†] Corresponding author. E-mail : xu_zhenyuan@yahoo.com.cn