

一类新混沌系统的线性状态反馈控制^{*}

李瑞红[†] 徐 伟 李 爽

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

(2005 年 6 月 24 日收到 2005 年 7 月 19 日收到修改稿)

研究了一类新混沌系统的控制问题. 利用 Routh-Hurwitz 准则对受控系统进行了稳定性分析, 结合线性状态反馈方法理论上严格证明了达到控制目标反馈系数的选择原则. 数值研究证明了该方法能够有效地控制混沌系统到失稳的平衡点或周期解, 同时控制效果在弱噪声干扰下具有很强的鲁棒性.

关键词: 新混沌系统, 线性状态反馈控制, Routh-Hurwitz 准则, 噪声

PACC: 0545

1. 引 言

自从 1963 年 Lorenz 第一次发现混沌吸引子以来, 人们已逐渐认识到在自然界和人类社会中广泛存在混沌现象. 随着混沌理论研究的深入, 在工程中的应用日益受到重视, 控制混沌逐步成为人们感兴趣的课题. 在现有的混沌控制方法中, 有两种主要的控制策略: 一是通过参数小微扰达到对混沌行为的控制, 如 Ott, Grebogi, Yorke (缩写为 OGY) 控制法^[1], 参数共振法^[2]; 二是状态变量反馈法, 如自适应反馈法^[3,4], 延迟反馈法^[5,6], 线性和非线性反馈法^[7,8]等. 这些方法各有特点和应用范围, 但是相比之下对于简单而且在物理上容易实现的控制方法易于得到广泛的应用.

对于常见的 Lorenz 系统族^[9]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + ay, \\ \dot{y} &= dx + cy - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\quad (1)$$

当 $(a, b, c, d) = (a, b, -1, d)$, $(a, b, c, c - a)$ 或 $(a, b, c, 0)$ 时, 系统 (1) 分别对应 Lorenz 系统, Chen 系统和 Lü 系统, 此类系统方程右端均含两个非线性项. 1976 年 Rössler 构造了只含一个非线性项的三阶连续自治系统^[10]. 在特定的参数条件下, 上述系统均可产生混沌行为^[9]. 1944 年, Nadolschi^[11] 研究刚体运动时引入一个新的系统, 其特点是方程右端含三

个非线性. 最近文献^[12]的研究表明, 在不同的参数条件下, 此系统可产生多个奇怪吸引子.

本文将线性状态反馈控制方法应用于上述含三个非线性项的混沌系统, 引导混沌运动转化为规则运动, 同时给出了达到控制目标反馈系数的选择范围. 数值仿真结果证实了该控制方法的有效性.

2. 系统及稳定性分析

本文所研究混沌系统的数学模型可写为^[12]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -yz + ax, \\ \dot{y} &= xz + by, \\ \dot{z} &= xy/3 + cz,\end{aligned}\quad (2)$$

其中 $X = (x, y, z)^T \in R^3$ 为系统的状态, a, b, c 为系统的参数.

不同于常见的 Lorenz 系统族, 系统 (2) 存在 5 个平衡点: $E_1(0, 0, 0)$,

$$\begin{aligned}E_2(\sqrt{3bc}, \sqrt{-3ac}, \sqrt{-ab}), \\ E_3(-\sqrt{3bc}, \sqrt{-3ac}, -\sqrt{-ab}), \\ E_4(-\sqrt{3bc}, -\sqrt{-3ac}, \sqrt{-ab}), \\ E_5(\sqrt{3bc}, -\sqrt{-3ac}, -\sqrt{-ab}).\end{aligned}$$

当参数取值为 $a = 5, b = -10, c = -3.8$, 初值 $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ 时, 系统 (2) 存在图 1 所示的奇怪吸引子, 它与 Chen 和 Lee^[12]得到的吸引子关于原点对称.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 40472091, 10332030)和研究生创业种子基金(Z200572)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: llylh8077@mail.nwpu.edu.cn

系统(2)在 E_1 邻域线性化方程的系数矩阵为

$$J_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

显然 J_1 的特征值为 $\lambda_1 = a > 0$,

$\lambda_2 = b < 0, \lambda_3 = c < 0$, 因此平衡点 E_1 是不稳定的.

系统(2)在 E_2 邻域线性化方程的系数矩阵为

$$J_2 = \begin{bmatrix} a & -\gamma & -\beta \\ \gamma & b & \alpha \\ \beta/3 & \alpha/3 & c \end{bmatrix},$$

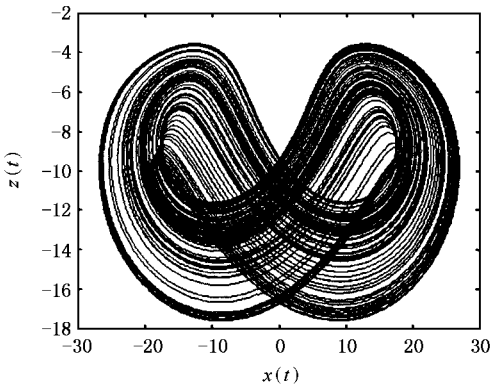
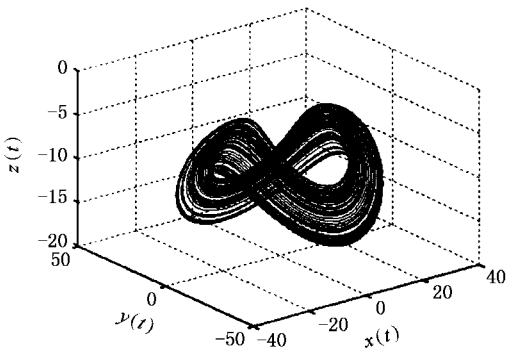
其中 $\alpha = \sqrt{3bc}, \beta =$

$\sqrt{-3ac}, \gamma = \sqrt{-ab}$. 相应的特征值方程为 $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, 这里 $a_1 = -(a+b+c) > 0, a_2 = ab+ac+bc - \alpha^2/3 + \beta^2/3 + \gamma^2 = 0, a_3 = -abc + \alpha\alpha^2/3 - b\beta^2/3 - c\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma/3 = 4abc > 0$. 根据 Routh-Hurwitz 准则, 平衡点 E_2 是不稳定的, 同理可证明 E_3, E_4, E_5 均是不稳定的平衡点.

3. 控制方法

采用线性状态反馈法, 将混沌系统控制到上述任意的平衡点. 假设受控系统为

$$\dot{x} = ax - yz - k_1(x - \hat{x}),$$



$$\begin{aligned} \dot{y} &= by + xz - k_2(y - \hat{y}), \\ \dot{z} &= cz + xy/3 - k_3(z - \hat{z}), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 k_1, k_2, k_3 为待定的正反馈系数, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 为控制目标, 即上述 5 个不稳定平衡点中的任意一个, 此时系统(3)只有一个平衡点 $E_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. 设系统(3)在 E_0 邻域线性化方程系数矩阵对应的特征值多项式为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (4)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则当下列条件满足时, 系统(3)的所有特征根均具有负实部

$$(C_1) a_1 > 0, (C_2) a_1 a_2 > a_3, \quad (5)$$

从而系统不再做混沌运动而将收敛到平衡点 $E_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, 达到了控制目标.

3.1. 控制混沌系统到平衡点 E_1

令 $E_0 = E_1$, 系统(3)在 E_0 邻域线性化方程的

系数矩阵为 $\hat{J}_1 = \begin{bmatrix} a - k_1 & 0 & 0 \\ 0 & b - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & c - k_3 \end{bmatrix}$, 显然 $\hat{J}_1$

的特征值为 $\lambda_1 = a - k_1, \lambda_2 = b - k_2, \lambda_3 = c - k_3$. 因此当 $k_1 > a, k_2 > b, k_3 > c$ 时, 所有特征根均具有负

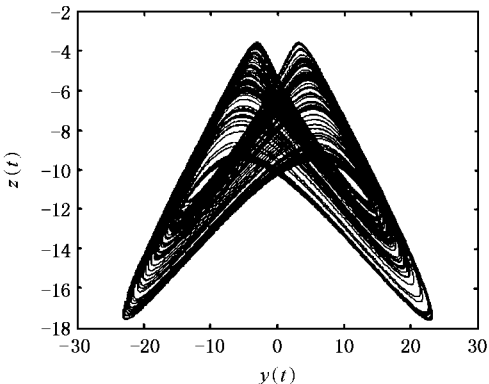
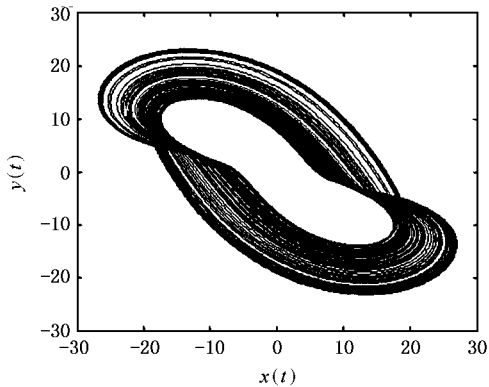


图 1 系统(2)的奇怪吸引子 $a=5, b=-10, c=-3.8$

实部,从而平衡点 E_0 是渐近稳定的.

3.2. 控制混沌系统到平衡点 E_2

令 $E_0 = E_2$, 系统(3)在 E_0 邻域线性化方程的

$$\text{系数矩阵为 } \hat{J}_2 = \begin{bmatrix} a - k_1 & -\gamma & -\beta \\ \gamma & b - k_2 & \alpha \\ \beta/3 & \alpha/3 & c - k_3 \end{bmatrix}, \text{ 相应特}$$

征值方程的系数为

$$a_1 = -(a + b + c - k_1 - k_2 - k_3),$$

$$a_2 = -(b + c)k_1 - (a + c)k_2 - (a + b)k_3 + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3,$$

$$a_3 = k_1k_2k_3 - ak_2k_3 - bk_1k_3 - ck_1k_2 + 4abc,$$

由(5)式 $a_1 > 0$ 可得 $k_1 + k_2 + k_3 > a + b + c = -8.8$, 在给定的参数下此条件显然可以满足. 为简化计算假设 $k_2 = 0$, 由 $a_1a_2 > a_3$ 可得

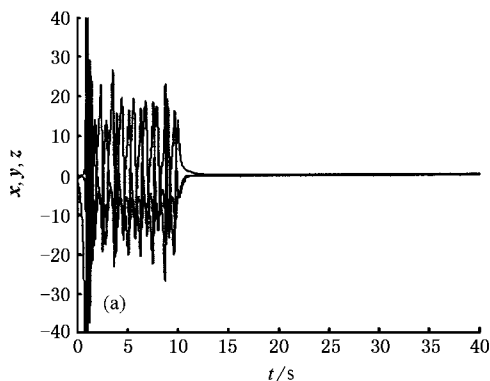
$$121.44k_1 + 44k_3 + 17.6k_1k_3 + 13.8k_1^2 + 5k_3^2 + k_1^2k_3 + k_1k_3^2 - 760 > 0, \quad (6)$$

类似地可证明将混沌系统控制到其他平衡点需满足的条件均为(6)式.

假设 k_1, k_3 在 $(0, 6)$ 之间取值, 图 2 给出了满足(6)式反馈系数的取值范围, 如阴影部分所示. 若 k_1, k_3 在图中的稳定区取值, 根据上述分析, 混沌系统将被控制到系统(2)的不稳定平衡点 E_i ($i = 2, 3, 4, 5$), 图中稳定区和不稳定区的交界线为系统发生 Hopf 分岔^[13], 产生周期运动的临界线.

证明 系统做周期运动时, 其相应线性化方程系数矩阵的特征值满足: $\lambda_1 < 0, \lambda_2, \lambda_3$ 是共轭的纯虚数. 又根据三次方程根与系数的关系可得: $\lambda_1 + \lambda_2$

$+ \lambda_3 = \lambda_1 = -a_1, \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{a_2}{a_3}$. 因此系



统产生极限环的条件为 $-a_1 = -\frac{a_3}{a_2}$, 从而有 $a_1a_2 = a_3$.

3.3. 数值研究结果

为验证上述分析结果, 采用四阶龙格-库塔算法对受控系统(3)进行了数值计算. 系统参数固定为 $a = 5, b = -10, c = -3.8$, 初值 $x(0) = -1.0, y(0) = -1.0, z(0) = -1.0$, 步长 $h = 0.001$. 数值研究结果表明:

1) 当反馈系数取值满足 3.1 中的结论时, 混沌系统可快速控制到不稳定平衡点 E_1 . 图 3(a) 中 $k_1 = 6.0, k_2 = 0.0, k_3 = 0.0, t = 10s$ 开始施加控制. $t = 10s$ 前, 系统做无规则的随机振动. 施加控制后状态向量 $x(t), y(t), z(t)$ 逐渐向不稳定平衡点靠近. 数据表明, 当 $t = 13.502s$ 时混沌系统已完全控制到不稳定平衡点 $E_1 = (0, 0, 0)$.

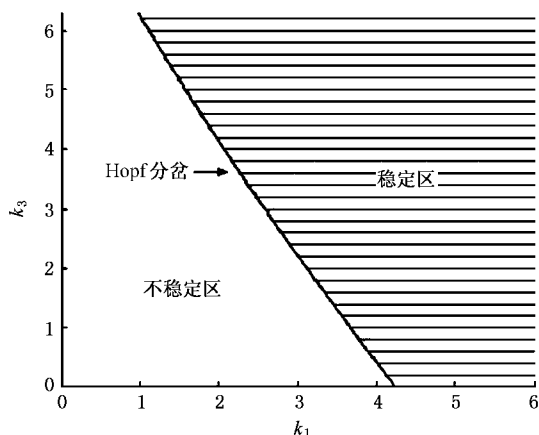


图 2 受控系统(3)的稳定区和不稳定区

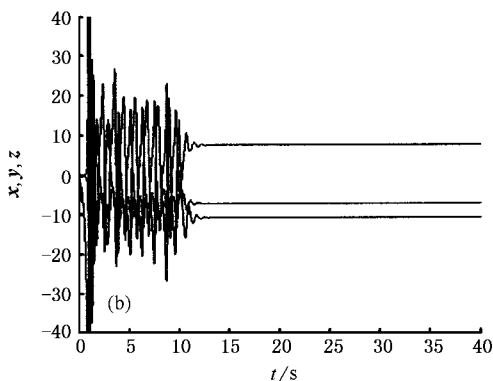


图 3 系统(2)受控前后状态向量 $x(t), y(t), z(t)$ 的时间历程图 $t = 10s$ 开始施加控制, (a), (b) 分别控制混沌系统到不稳定平衡点 E_1, E_3

2)对于不稳定平衡点 $E_i (i = 2, 3, 4, 5)$, 当反馈系数在图2所示阴影区域中取值, 可实现混沌系统的控制. 图 3(b) 中 $k_1 = 5.0, k_2 = 0.0, k_3 = 5.0$, 同样当 $t = 10\text{s}$ 开始施加控制. 类似(1)中的分析, $t = 16.224\text{s}$ 时, 混沌系统已完全控制到目标 $E_3 =$

$(-10.6771, 7.5489, -7.0711)$. 图 4(a, b) 则给出了受控系统在相空间中逐步收敛到不稳定平衡点 E_1, E_3 的过程. 可见从初始状态出发, 混沌系统可迅速到达控制目标而不再做混沌运动.

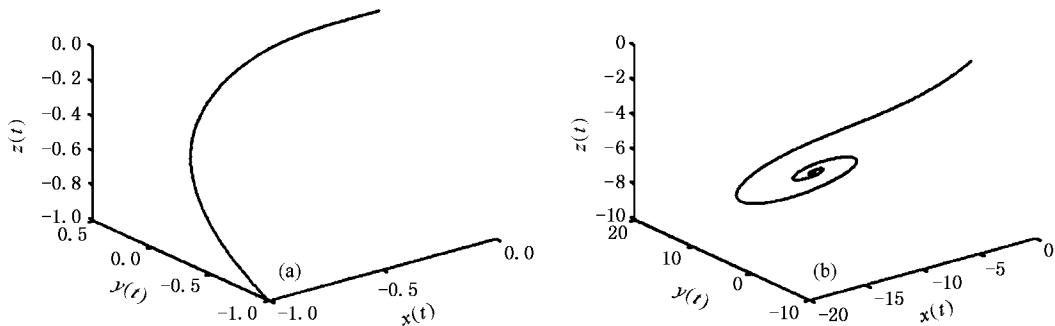


图4 受控系统在相空间的稳定轨迹 (a) 控制到平衡点 E_1 , (b) 控制到平衡点 E_3

3)当反馈系数取值落在图 2 稳定区和不稳定区的交界线时, 混沌系统控制到周期运动. 图 5(a, b) 中 $k_1 = 3.0, k_2 = 0.0, k_3 = 2.2, t = 10\text{s}$ 开始施加控制. 系统状态向量的时间历程从不规则运动迅速变

为等幅运动. 数据表明当 $t = 14.081\text{s}$ 时系统已从混沌运动完全转变为周期运动. 图 6(a, b) 给出了控制后系统在相空间中分别绕不稳定平衡点 E_3 和 E_5 做周期运动的轨迹.

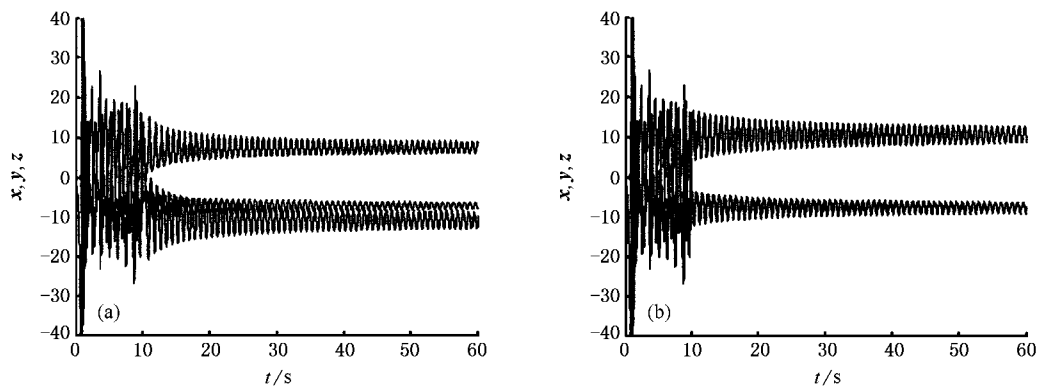


图5 系统(2)受控前后状态向量 $x(t), y(t), z(t)$ 的时间历程图 $t = 10\text{s}$ 开始施加控制, (a), (b) 分别控制混沌系统绕 E_3, E_5 做周期运动

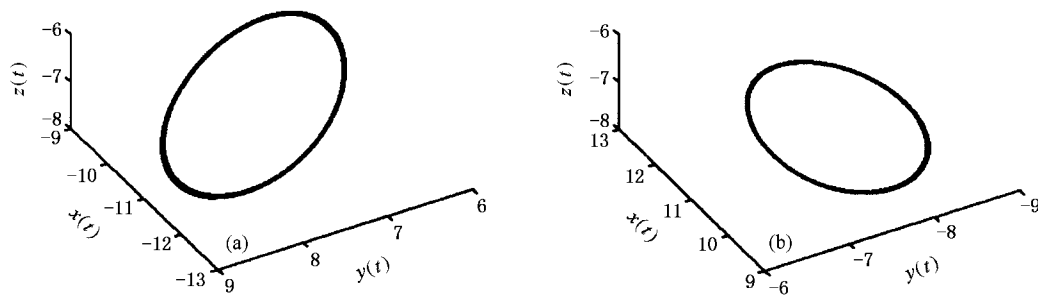


图6 (a), (b) 受控系统在相空间分别绕 E_3, E_5 做周期运动

4. 噪声的影响

在实际的物理环境中,系统总是要承受某些噪声干扰,因此研究具有外加噪声时这种控制方法的鲁棒性就极其重要.下面考虑外加白噪声对控制性能的影响.此时系统模型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - yz - k_1(x - \hat{x}) + \xi(t), \\ \dot{y} &= by + xz - k_2(y - \hat{y}) + \xi(t), \\ \dot{z} &= cz + xy/3 - k_3(z - \hat{z}) + \xi(t),\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $\xi(t)$ 是具有强度为 D 的高斯白噪声 $\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t), \xi(t + \tau) \rangle = 2D\delta(\tau)$.

用文献[14]的算法对随机微分方程组(7)进行积分,每次迭代噪声均作用于控制系统.图 7,8(a,b)显示了控制目标为图 3(b)所示不稳定平衡点 E_3 时考虑噪声强度分别为 $D = 0.02$ 和 $D = 0.05$ 的控

制结果.而图 9,10(a,b)则显示了控制目标为图 5(a)所示绕 E_3 做周期运动时考虑噪声强度的控制结果.数值研究结果表明:

1)由于噪声的影响,系统达到稳定的时间随着噪声强度的增加明显缩短.图(7)中,当 $D = 0.02, t = 16.136\text{s}$,时系统已稳定到平衡点 E_3 ; $D = 0.05$ 时稳定时间已缩短到 $t = 16.095\text{s}$.类似地,图 9(a,b)也验证了此结论.

2)随着噪声强度的增加,系统在达到控制目标的过程中会出现小扰动,如图 7(a,b)所示.此时稳定轨迹变得粗糙,但不会影响最终的控制效果,图 8(a,b)给出了很好地证明.同样,对于控制到周期运动噪声也有类似的作用.图 10(a,b)中随着噪声的增加,相轨从极限环逐渐变为一个扩散的极限环,但在一定的噪声范围内受控系统仍做周期运动.

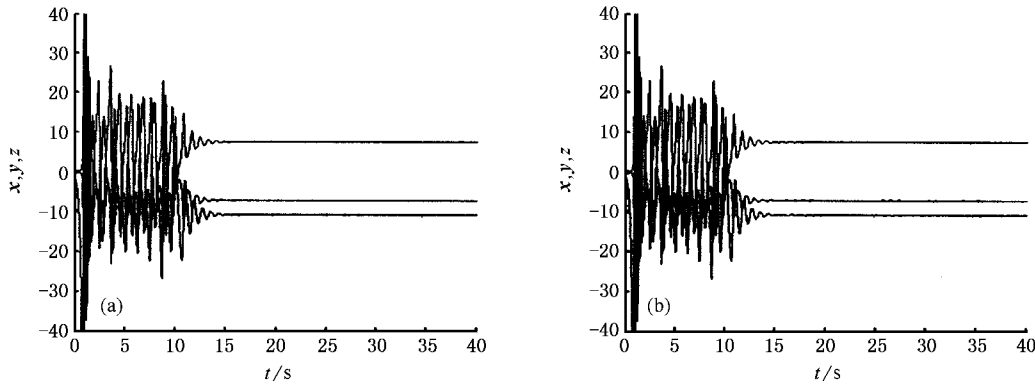


图 7 考虑外加噪声时系统(2)受控前后状态向量 $x(t), y(t), z(t)$ 的时间历程图 $t = 10\text{s}$ 开始施加控制, (a) $D = 0.02$, (b) $D = 0.05$

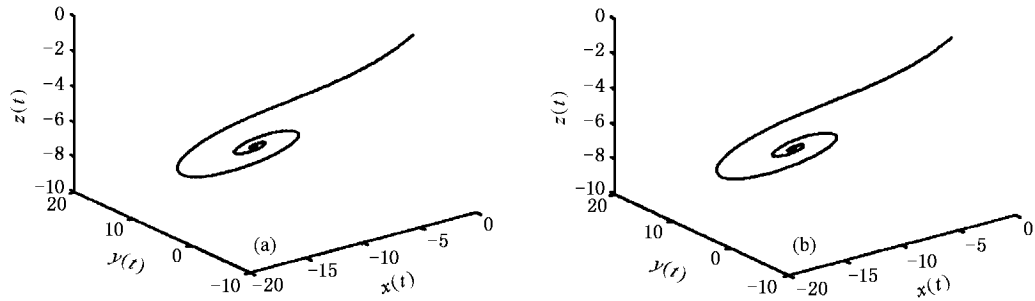


图 8 考虑外加噪声时受控系统在相空间的稳定轨迹 (a) $D = 0.02$, (b) $D = 0.05$

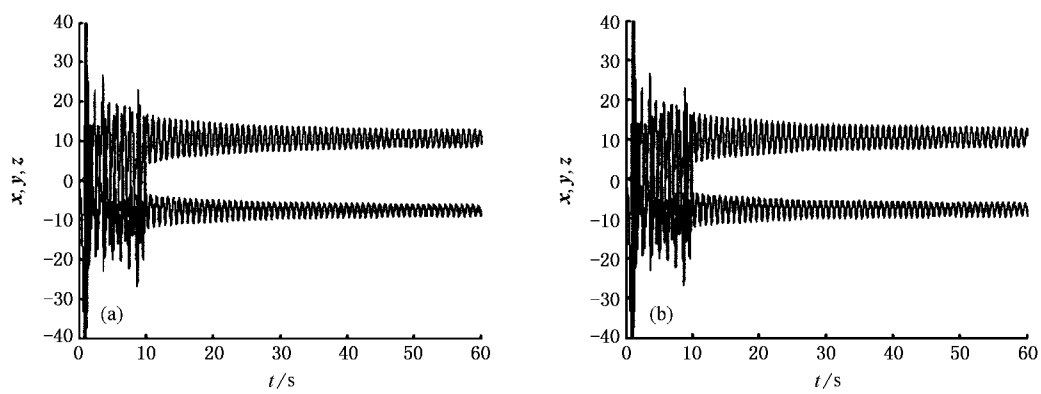


图 9 考虑外加噪声时系统(2)受控前后状态向量 $x(t), y(t), z(t)$ 的时间历程图 $t = 10\text{s}$ 开始施加控制, (a) $D = 0.02$, (b) $D = 0.05$

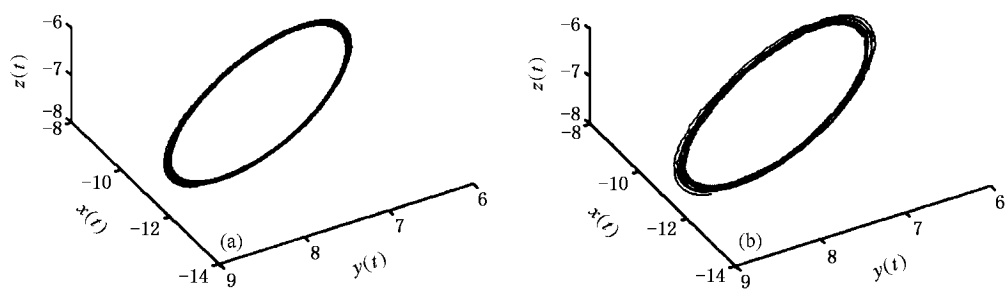


图 10 考虑外加噪声时受控系统在相空间绕 E_3 做周期运动 (a) $D = 0.02$, (b) $D = 0.05$

5. 结 论

本文研究了一类新三阶连续自治系统的混沌控制,此混沌系统不同于常见的 Lorenz 系统族,其方程右端含三个非线性项.采用简单的线性状态反馈方

法,成功地将混沌系统控制到不稳定平衡点和内嵌的周期轨道.即只在一段时间内系统进行混沌运动,随后系统运动将转化并精确维持在希望的平衡状态.这个方法简单实用,可在相当大的范围内选取控制参数使系统运动最终按照人们的意愿发展.数值研究结果表明,此方法控制时间短,抗干扰能力强.

[1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196

[2] Lima B, Pettini M 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2545

[3] Guan X P, Fan Z P, Peng H P, Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 (in Chinese) [关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 2108]

[4] Li Z, Han C Z 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 847 (in Chinese) [李志、韩崇昭 2001 物理学报 **50** 847]

[5] Luo X S, Fang J Q, Kong L J, Weng J Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1423 (in Chinese) [罗晓曙、方锦清、孔令江、翁甲强 2000 物理学报 **49** 1423]

[6] Chen J F, Cheng L, Liu Y, Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 18 (in Chinese) [陈菊芳、程 丽、刘 颖、彭建华 2003 物理学报 **52** 18]

[7] Li G H, Zhou S P, Xu D M, Lai J W 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2123 (in Chinese) [李国辉、周世平、徐得名、赖建文 2000 物理学报 **49** 2123]

[8] Wu W G, Gu T X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 (in Chinese) [伍维根、古天祥 2000 物理学报 **49** 1922]

[9] Chen G R, Lü J H 2003 *The Dynamics of Lorenz Family-analysis, Control and Synchronization* (Beijing: Science Press) pp 5 - 128 (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学——分析、控制与同步(北京:科学出版社) 第5—128页]

[10] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397

[11] Eugene L 1965 *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point* (New York: Springer-Verlag) p112 - 150

- [12] Chen H K, Lee C I 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 957 Verlag) p145 – 156
- [13] Guckenheimer J, Holmes P 1985 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (New York : Springer-
- [14] Mannella R, Palleschi V 1989 *Phys. Rev. A* **40** 3381

Linear state feedback control for a new chaotic system^{*}

Li Rui-Hong[†] Xu Wei Li Shuang

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 24 June 2005 ; revised manuscript received 19 July 2005)

Abstract

The problem of controlling a class of new chaotic system is investigated. Applying Routh-Hurwitz criterion, we analyze the stability of the controlled system. The choice principle of feedback coefficients to attain control objective is proved strictly by combining the linear state feedback method. Numerical simulation results show that the method can effectively guide the chaotic trajectories to an unstable equilibrium point or periodic solution. In addition, we find the control is stable in the presence of weak external noise.

Keywords : new chaotic system, linear state feedback control, Routh-Hurwitz criterion, noise

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091, 10332030), and the Graduate Starting Seed Fund of Northwestern Polytechnical University (Grant No. Z200572).

[†] Corresponding author. E-mail : llylrh8077@mail.nwpu.edu.cn