第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0628-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.2,February,2006

圆杆波导中的一个非线性波动方程及准确周期解*

刘志芳† 张善元

(太原理工大学应用力学研究所,太原 030024)

(2005 年 6 月 15 日收到;2005 年 7 月 15 日收到修改稿)

在小变形条件下,采用 Cox 的非线性应力应变关系,计及横向 Possion 效应,借助 Hamilton 变分原理导出了非线性弹性圆杆波导中的纵向波动方程. 利用 Jacobi 椭圆余弦函数展开法,对该方程与截断的非线性波动方程进行求解,得到了两类非线性波动方程的准确周期解,它们可以进一步退化为孤波解.

关键词:非线性波,Possion 效应,Jacobi 椭圆余弦函数

PACC:0547,0340K

1. 引 言

20 世纪 60 年代非线性波的研究取得了举世瞩目的成就,揭示了许多重要而有趣的新现象,并在物理学和工程学许多领域得到了实际应用. 在固体力学领域,非线性波的研究也引起了不少学者的关注. 在固体结构中,非线性因素来源于诸多方面,如材料的物理非线性,有限变形引起的几何非线性,运动学非线性和边界约束条件非线性等. 等截面弹性直杆是应用时最重要的结构元件,对于杆中非线性波的传播问题,国内外学者从不同的方面进行了许多重要的研究[1—10]. 由初等理论给出的经典的弹性杆的波动方程是线性的、非色散的. 为了改善初等理论的结果,Rayleigh[11] 考虑了横向惯性,提出了一种校正方案,得到了第一模态在波数趋于零时的二阶近似. Love[12] 基于能量的考虑,导出了计及横向惯性的杆的运动方程. 实际上,当压缩波沿杆纵向传播时,由于 Possion 效应,将会伴随有横向运动,横向运动不仅对杆的动能有贡献(Rayleigh-Love 杆),而且由于波剖面的不均匀性会产生横向剪切,从而对应变能也有贡献. 本文同时考虑这两种横向效应产生的几何色散,并计及由三次非线性本构关系产生的物理非线性,借助 Hamilton 变分原理导出了弹性杆的非线性纵向波动方程.

在非线性波动问题中,对非线性演化方程的定性分析和寻找其精确解占有很重要的地位. 近年来,对于常系数非线性演化方程,发展了许多求解准确解的方法,但是这些方法大都只能求得非线性波动方程的冲击波解或孤波解,不能求得非线性方程的周期解. 文献[13—15]虽然求得了一些非线性波动方程的准确周期解,但他们应用的是 Weierstrass 椭圆函数,求解过程相对来说比较繁琐. 本文对圆杆波导由应力应变关系导致的物理非线性和横向惯性、横向剪切效应共同作用下的非线性波的波动方程进行了研究,利用 Jacobi 椭圆余弦函数展开法[16—20],得到了该方程的准确周期解以及相对应的孤波解.

2. 非线性弹性杆的纵向波动方程

考虑一无限长、等截面圆杆的纵向运动,认为变形是微小的,并作如下基本假定:

1)变形前的平截面在变形过程中始终保持平面;

2)计及横向 Possion 效应,取径向位移 $U_r = -\nu r\dfrac{\partial U}{\partial x}$,$U = U_x$ 为轴向位移,则横向剪切应变为 $\gamma = \dfrac{\partial U_r}{\partial x} = -\nu r\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

* 国家自然科学基金(批准号:10472076)和山西省自然科学基金(批准号:20031011)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:fz_1@sohu.com

杆的运动是轴对称压缩，由于考虑了横向效应，弹性杆单位长度的动能为纵向运动动能和横向运动动能两项之和

$$T=\int_0^R\frac{1}{2}\rho(2\pi r\mathrm{d}r)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\int_0^R\frac{1}{2}\rho(2\pi r\mathrm{d}r)\left(-vr\frac{\partial U}{\partial x\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\rho S\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{4}\rho Sv^2R^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2,\quad(1)$$

其中，R 为杆的半径，ρ 为材料密度，v 为 Possion 比，x 和 r 分别为轴向和径向坐标，t 为时间，$S=\pi R^2$ 为圆杆截面面积.

令 $\varepsilon=\frac{\partial U}{\partial x}$为杆的轴向应变，假定轴向应力 σ 和应变 ε 之间服从 Cox[9] 提出的三次非线性关系

$$\sigma=a\varepsilon+b\varepsilon^2+d\varepsilon^3,\quad(2)$$

其中 a，b，d 为材料常数. 非线性弹性杆单位长度应变能由下式给出：

$$W=s\left(\frac{a}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\frac{b}{3}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3+\frac{d}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4\right)+\frac{1}{4}\mu v^2SR^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2,\quad(3)$$

其中 μ 为材料的剪切模量，上式最后一项是由于横向 Possion 效应产生的剪切应变能.

利用 Hamilton 变分原理，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}L\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}(T-W)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\quad(4)$$

此处

$$L=\frac{1}{2}\rho S\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{4}\rho Sv^2R^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2-s\left(\frac{a}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\frac{b}{3}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3+\frac{d}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4\right)-\frac{1}{4}\mu v^2SR^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2.$$

经变分运算后给出的 Euler 方程可以得到圆杆波导的纵波运动方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{a}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[b\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+d\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3+\frac{\rho v^2R^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-\frac{\mu v^2R^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\right].\quad(5)$$

方程(5)是一个包含两项非线性项的波动方程，它同时计入了横向惯性、横向剪切两种色散效应的影响.

如果令轴向应变 $u=\varepsilon=\frac{\partial U}{\partial x}$，代入上式，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{b}{\rho}u^2+\frac{d}{\rho}u^3+\frac{v^2R^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right],\quad(6)$$

其中 $c_0=a/\rho$，$c_1=\mu/\rho$ 分别为线性纵波波速和剪切波速. 它表明在纵波传播过程中剪切波也在传播，这是由 Possion 效应引起的. 若在(6)式中略去非线性项，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{v^2R^2}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}-c_1^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)=0.\quad(7)$$

假定(7)式有形如 $A\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]$的解，可以得到 ω-k 关系

$$\omega=\left[\frac{c_0^2k^2+(v^2R^2/2)c_1^2k^4}{1+(v^2R^2/2)k^2}\right]^{1/2},$$

其中 k 为波数，显然 $\omega=\omega(k)$是非线性实函数，因此(7)式的解代表一个线性色散波，而(6)式表示一个非线性效应和色散效应共同作用的波动过程，其中的非线性项产生于本构关系(2)，属物理非线性，而色散项是由于计入了横向 Possion 效应而导致的几何色散效应.

3. 非线性支配方程的准确周期解

假定方程(6)有如下形式行波解

$$u=u(\xi),\qquad \xi=k(x-ct),\quad(8)$$

其中 k 为波数，c 为波速. 将(8)式代入(6)式，则得

$$(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left[\left(\frac{b}{\rho}u^2\right)+\left(\frac{d}{\rho}u^3\right)+\left(\frac{v^2R^2}{2}(c^2-c_1^2)k^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}\right)\right]=0,\quad(9)$$

将上式展开

$$k^2\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}+\beta_1\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+2\beta_2\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+u\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}\right]+3\beta_3\left[2u\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}\right]=0,\quad(10)$$

其中

$$\beta_1=-\frac{2(c^2-c_0^2)}{v^2R^2(c^2-c_1^2)},\quad \beta_2=\frac{2b}{\rho v^2R^2(c^2-c_1^2)},\quad \beta_3=\frac{2d}{\rho v^2R^2(c^2-c_1^2)},\quad(11)$$

将 $u(\xi)$展开为下列 Jacobi 椭圆余弦函数 $\mathrm{cn}\xi$ 的级数

$$u(\xi)=\sum_{j=0}^{n}a_j\mathrm{cn}^j\xi,\quad(12)$$

它的最高阶数为

$$O(u(\xi)) = n, \tag{13}$$

类似地,有

$$O\left(\frac{d^4 u}{d\xi^4}\right) = n + 4, \quad O\left(u^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2}\right) = 3n + 2,$$

$$O\left(u \frac{d^2 u}{d\xi^2}\right) = 2n + 2, \tag{14}$$

由(14)式的解代入方程(10),使其中的最高阶导数项和最高阶非线性项平衡,也就是

$$n + 4 = 3n + 2 \text{ 即 } n = 1, \tag{15}$$

故方程(10)的解可写成

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \mathrm{cn}\xi, \tag{16}$$

其中 a_0,a_1 为待定常数. 注意到

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = a_1^2[-m^2\mathrm{cn}^4\xi + (2m^2-1)\mathrm{cn}^2\xi + 1 - m^2], \tag{17a}$$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = -a_1\mathrm{cn}\xi(1 - 2m^2 + 2m^2\mathrm{cn}^2\xi), \tag{17b}$$

$$\frac{d^4 u}{d\xi^4} = 24a_1 m^4\mathrm{cn}^5\xi + 20a_1 m^2(1-2m^2)\mathrm{cn}^3\xi + a_1(16m^4 - 16m^2 + 1)\mathrm{cn}\xi. \tag{17c}$$

其中 $m(0<m<1)$为模数. 把(16)式和(17)式代入方程(10),有

$$\begin{aligned} &a_1(24k^2m^4 - 12\beta_3 m^2 a_1^2)\mathrm{cn}^5\xi + a_1^2(-6\beta_2 m^2 - 18\beta_3 m^2 a_0)\mathrm{cn}^4\xi \\ &+ a_1\{20k^2m^2(1-2m^2) - 2\beta_1 m^2 - 4\beta_2 a_0 m^2 + 3\beta_3[-3a_1^2(1-2m^2) - 2a_0^2 m^2]\}\mathrm{cn}^3\xi \\ &+ a_1^2(4\beta_2 + 12\beta_3 a_0)(2m^2-1)\mathrm{cn}^2\xi + a_1\{k^2(16m^4 - 16m^2 + 1) + \beta_1(2m^2-1) \\ &+ 2\beta_2 a_0(2m^2-1) + 3\beta_3[2(1-m^2)a_1^2 + (2m^2-1)a_0^2]\}\mathrm{cn}\xi + a_1^2(1-m^2)(2\beta_2 + 6\beta_3 a_0) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

令(18)中 $\mathrm{cn}\xi$ 各次幂的系数为零,由此可得到

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\beta_3}}km, \quad a_0 = -\frac{\beta_2}{3\beta_3},$$

$$k^2 = \frac{3\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}{3\beta_3(1-2m^2)}, \tag{19}$$

代入(16)式后得

$$u(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2}{\beta_3}}mk\,\mathrm{cn}(\xi, m) - \frac{\beta_2}{3\beta_3}, \tag{20}$$

这就是方程(10)的精确周期解,显然当 $\beta_3 > 0$ 时,(20)式成立. 因为当 $m \to 1$ 时,$\mathrm{cn}\xi \to \mathrm{sech}\xi$,所以当 $m = 1$,则(20)式退化为

$$u(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2}{\beta_3}}k\,\mathrm{sech}\xi - \frac{\beta_2}{3\beta_3}, \tag{21}$$

显然这是方程的孤波解. 将(11)式代入(19)式,可得到 a_0,a_1,k 的值,即

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{6d\rho(c^2 - c_1^2) + 2b^2}{3d^2}},$$

$$a_0 = -\frac{b}{3d},$$

$$k = \sqrt{\frac{6d\rho(c^2 - c_0^2) + 2b^2}{3d\rho v^2 R^2(c^2 - c_1^2)}}, \tag{22}$$

则非线性波动方程(10)的孤波解为

$$u(\xi) = A\,\mathrm{sech}\left(\frac{x - ct}{\Lambda}\right) - \frac{b}{3d}, \tag{23}$$

其中 A 为波幅,Λ 为波宽.

$$A = \pm\sqrt{\frac{6\rho d(c^2 - c_0^2) + 2b^2}{3d^2}}, \tag{24}$$

$$\Lambda = vR\sqrt{\frac{3d\rho(c^2 - c_1^2)}{6d\rho(c^2 - c_0^2) + 2b^2}}, \tag{25}$$

$$c = \sqrt{\frac{3d\rho(k^2v^2R^2c_1^2 - 2c_0^2) + 2b^2}{3d\rho(k^2v^2R^2 - 2)}}, \tag{26}$$

显然只有当 $c > c_1$ 且 $6d\rho(c^2 - c_0^2) + 2b^2 > 0$ 时,(23)式成立.

4. 截断的非线性波动方程的孤波解

如果在应变能函数(3)中略去轴向位移梯度的高阶项$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4$,也就是方程(10)中高阶非线性项 $\beta_3\left[2u\left[\frac{du}{d\xi}\right]^2 + u^2\frac{d^2u}{d\xi^2}\right] = 0$,则

$$k^2\frac{d^4u}{d\xi^4} + \beta_1\frac{d^2u}{d\xi^2} + 2\beta_2\left[\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + u\frac{d^2u}{d\xi^2}\right] = 0, \tag{27}$$

其中

$$\beta_1 = -\frac{2(c^2 - c_0^2)}{v^2R^2(c^2 - c_1^2)},$$

$$\beta_2 = \frac{2b}{\rho v^2R^2(c^2 - c_1^2)}. \tag{28}$$

同上一节，将 $u(\xi)$ 展开为下列 Jacobi 椭圆余弦函数 $\mathrm{cn}\xi$ 的级数

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{cn}^j \xi. \tag{29}$$

由(14)式的解代入方程(27)，使其中的最高阶导数项和最高阶非线性项平衡，显然有

$$n + 4 = 2n + 2 \text{ 即 } n = 2, \tag{30}$$

故方程(27)的解可写成

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \mathrm{cn}\xi + a_2 \mathrm{cn}^2 \xi, \tag{31}$$

其中 a_0, a_1, a_2 为待定常数. 注意到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = & -4a_2^2 m^2 \mathrm{cn}^6 \xi - 4a_1 a_2 m^2 \mathrm{cn}^5 \xi + [-a_1 m^2 + 4a_2^2(2m^2 - 1)]\mathrm{cn}^4 \xi \\ & + 4a_1 a_2 (2m^2 - 1)\mathrm{cn}^3 \xi + [4a_2^2(1 - m^2) + a_1^2(2m^2 - 1)]\mathrm{cn}^2 \xi \\ & + 4a_1 a_2 (1 - m^2)\mathrm{cn}\xi + a_1^2(1 - m^2),\end{aligned} \tag{32a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} = 2a_2(1 - m^2) - a_1(1 - 2m^2)\mathrm{cn}\xi + 4a_2(2m^2 - 1)\mathrm{cn}^2 \xi - 2a_1 m^2 \mathrm{cn}^3 \xi - 6a_2 m^2 \mathrm{cn}^4 \xi, \tag{32b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}\xi^4} = & 120a_2 m^4 \mathrm{cn}^6 \xi + 24a_1 m^4 \mathrm{cn}^5 \xi + 120a_2 m^2 (1 - 2m^2)\mathrm{cn}^4 \xi \\ & + 20a_1 m^2 (1 - 2m^2)\mathrm{cn}^3 \xi + [72a_2 m^2 (m^2 - 1) + 16a_2(1 - 2m^2)^2]\mathrm{cn}^2 \xi \\ & + [12a_1 m^2 (m^2 - 1) + a_1(1 - 2m^2)^2]\mathrm{cn}\xi + 8a_2(1 - 2m^2)(m^2 - 1) = 0.\end{aligned} \tag{32c}$$

把(31)，(32)式代入方程(27)，有

$$\begin{aligned}& (120a_2 k^2 m^4 - 20\beta_2 a_2^2 m^2)\mathrm{cn}^6 \xi + 24a_1(k^2 m^4 - \beta_2 a_2 m^2)\mathrm{cn}^5 \xi \\ & + \{-120a_2 k^2 m^2 (2m^2 - 1) - 6\beta_1 a_2 m^2 + 2\beta_2[8a_2^2(2m^2 - 1) - 3a_1^2 m^2 - 6a_0 a_2 m^2]\}\mathrm{cn}^4 \xi \\ & + a_1\{-20k^2 m^2 (2m^2 - 1) - 2\beta_1 m^2 + 2\beta_2[9a_2(2m^2 - 1) - 2a_0 m^2]\}\mathrm{cn}^3 \xi \\ & + \{k^2[-72a_2 m^2 (1 - m^2) + 16a_2(2m^2 - 1)^2] + 4\beta_1 a_2 (2m^2 - 1) \\ & + 2\beta_2[6a_2^2(1 - m^2) + 2a_1^2(2m^2 - 1) + 4a_0 a_2(2m^2 - 1)]\}\mathrm{cn}^2 \xi \\ & + \{k^2[-12a_1 m^2 (1 - m^2) + a_1(2m^2 - 1)^2] + \beta_1 a_1 (2m^2 - 1) \\ & + 2\beta_2[6a_1 a_2 (1 - m^2) + a_0 a_1 (2m^2 - 1)]\}\mathrm{cn}\xi \\ & + \{8a_2 k^2 (2m^2 - 1) + 2\beta_1 a_2 + 2\beta_2[2a_0 a_2 + a_1^2]\}(1 - m^2) = 0.\end{aligned} \tag{33}$$

令(33)式中 $\mathrm{cn}\xi$ 各次幂的系数为零，可得

$$a_2 = \frac{6m^2 k^2}{\beta_2}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = \frac{4k^2(1 - 2m^2) - \beta_1}{2\beta_2}, \tag{34}$$

代入(31)式后得

$$u(\xi) = \frac{4k^2(1 - 2m^2) - \beta_1}{2\beta_2} + \frac{6m^2 k^2}{\beta_2}\mathrm{cn}^2 \xi, \tag{35}$$

这就是方程(27)的准确周期解，取 $m = 1$，则(35)式退化为

$$u(\xi) = \frac{-4k^2 - \beta_1}{2\beta_2} + \frac{6k^2}{\beta_2}\mathrm{sech}^2 \xi. \tag{36}$$

如果令常数项等于零，即 $k^2 = -\frac{\beta_1}{4}$，(36)式变为

$$u(\xi) = -\frac{3\beta_1}{2\beta_2}\mathrm{sech}^2 \xi. \tag{37}$$

显然(37)式是方程(27)的孤波解，它要求 $\beta_1 < 0$. 将(28)式代入(37)式得

$$u(\xi) = A\mathrm{sech}^2 \frac{(x - ct)}{\Lambda}, \tag{38}$$

其中

$$A = \frac{3\rho(c^2 - c_0^2)}{2b}, \tag{39}$$

$$\Lambda = vR\sqrt{\frac{2(c^2 - c_1^2)}{c^2 - c_0^2}}, \tag{40}$$

当 $c > c_0$ 或者 $c < c_1$ 时，(38)式成立.

5. 结果与讨论

本文利用 Hamilton 变分原理，在同时考虑非线本构关系和横向 Possion 效应影响的情形下，导出圆

杆波导的非线性波动方程．由于横向惯性和横向剪切同时引入，使得圆杆波导中存在两种几何色散．非线性效应与色散效应相互作用、相互抑制，使得圆杆波导中可能有稳定传播的孤立波存在．

本文利用 Jacobi 椭圆余弦函数的有限展开，得到了圆杆波导的非线性波动方程以及截断的非线性波动方程的准确周期解，这些周期解也可以退化为孤波解，并讨论了这些解存在的条件以及适用性．从理论上证明了同时考虑几何非线性和物理非线性时，圆杆波导中可能存在稳定传播的孤立波．

[1] Whitham G B 1974 *Linear and Nonlinear Waves* (New York: John Wiley & Sons)

[2] Bhatnager P L 1979 *Nonlinear Waves in One-dimensional Dispersive System* (Oxford: Clarendon Press)

[3] Zhu W Q 1980 *Acta Mech. Solida Sin.* **2** 247 (in Chinese) [朱位秋 1980 固体力学学报 2 247]

[4] Yang G T, Zhang S Y 1988 *Dynamic Elasticity* (Beijing: Chinese Railway Press) (in Chinese) [杨桂通、张善元 1988 弹性动力学 北京 :中国铁道出版社]

[5] Zhang S Y, Zhuang W 1987 *Acta Mech. Sin.* **1** 62

[6] Zhang S Y, Guo J G, Zhang N M 2002 *The 4th International Conference on Nonlinear Mechanics* (Shanghai: Shanghai University Press) p728

[7] Guo J G, Zhou L J, Zhang S Y 2005 *Appl. Math. Mech.* **26** 667

[8] Porubov A V, Velarde M G 2002 *Wave Motion* **35** 189

[9] Samsonov A M 2000 *Strain Solitons in Solids and How to Construct Them* (New York: Chapman & Hall/CRC Press) p13

[10] Dai H H, Fan X J 2004 *Math. Mech. Solids* **9** 61

[11] Rayleigh J W S 1945 *The Theory of Sound* (New York: Dover Publications) p157

[12] Love A E H A 1944 *Treaties on the Mathematics Theory of Elasticity* (New York: Dover Publications) p428

[13] Porubov A V, Velarde M G 2000 *C. R. Acad. Sci. Series* Ⅱ b **328** 165

[14] Porubov A V 1996 *Phys. Lett.* A **221** 391

[15] Porubov A V, Parker D F 1999 *Wave Motion* **29** 97

[16] Fu Zuntao, Liu S K, Liu S D, Zhao Q 2001 *Phys. Lett.* A **290** 72

[17] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]

[18] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]

[19] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[20] Zhang S Q, Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1066 (in Chinese) [张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 1066]

A nonlinear wave equation and exact periodic solutions in circular-rod waveguide*

Liu Zhi-Fang† Zhang Shan-Yuan

(*Institute of Applied Mechanics*, *Taiyuan University of Technology*, *Taiyuan* 030024, *China*)

(Received 15 June 2005; revised manuscript received 15 July 2005)

Abstract

Under the condition of small deformation, a new nonlinear wave equation is derived to describe nonlinear wave evolution in a nonlinear elastic circular rod by means of Hamilton principle. The nonlinear constitutive relationship proposed by Cox and transverse Possion effects are simultaneously taken into account. Nonlinear wave equation and truncated nonlinear wave equation are solved by the Jacobi elliptic cosine function expansion method. The exact periodic solutions of these nonlinear equations are obtained. The limiting conditions of these solutions are also given.

Keywords: nonlinear wave, Possion effect, Jacobi elliptic cosine function

PACC: 0547, 0340K

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472076) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province of Chinese (Grant No. 20031011)

† Corresponding author. E-mail: lfz_1@sohu.com