

平方泵噪声驱动的单模激光立方模型及 光强定态概率分布*

许德胜¹⁾ 曹 力^{1)†} 吴大进^{2)‡}

1) 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

2) 华中科技大学物理系, 武汉 430074)

3) 中国高等科学技术中心, 北京 100080)

(2005 年 4 月 27 日收到, 2005 年 6 月 21 日收到修改稿)

合理地引入了平方泵噪声到单模激光的立方模型中, 得到封闭的光强朗之万方程. 基于作者早期关于非线性外噪声的近似福克-普朗克方程 (AFPE) 的工作, 得到了光强概率分布的 AFPE, 求出了该 AFPE 的归一化定态概率分布的精确解析表达式, 并根据表达式对泵噪声实部和虚部之间的关联系数 λ 的对称性, 得出了若干关于系统定态统计性质的普遍结论.

关键词: 平方泵噪声, 单模激光的立方模型, 光强定态概率分布, 统计性质重复出现

PACC: 4250, 0540, 4260K

1. 引 言

自从 Fulinski^[1]提出“噪声干涉”的概念以来, 人们逐步深入地研究了随机系统中噪声之间的关联所引起的各种效应, 并对噪声之间关联的机制进行了探索. 十多年来噪声的交叉关联效应的研究在国内外引起了广泛关注, 在多个研究领域取得了进展^[2-15]. 在文献 [2, 3] 中, 我们克服了文献 [1] 中噪声间关联系数 λ 取值的极限性, 给出了全面的表述和一个简便地处理多噪声系统关联的方法. 1993 年, 朱士群^[4]把噪声交叉关联引入到激光理论中, 研究了 λ 对激光统计性质的影响. 贾亚^[5]发现 λ 可以引起双稳系统的重复相变. 在各种系统中, 乘法噪声和加法噪声之间交叉关联引起的效应十分广泛. 特别在平均第一通过时间的研究方面, 梅冬成^[6]研究了 λ 和 τ (噪声相关时间) 的相关效应, 王俊^[7]指出 λ 引起平均第一通过时间的左右不对称, 曹力^[8]指出激光锁相后周相的平均第一通过时间的若干规律及激光泵噪声与量子噪声相关的一种可能机

制^[9]. Tessone^[10]引入周期变化的相关系数, 研究这一变化的频率与随机共振中信号频率之间相对大小的物理效应. Gitterman^[11]研究了线性系统中乘法噪声与加法噪声的交叉关联对随机共振的影响. 罗晓琴、朱士群等报道了非线性系统中的色噪声效应^[12, 13]. 近期, 罗晓琴和朱士群研究了由两种色噪声驱动的双稳系统的随机共振^[14, 15]. 发现改变噪声的关联时间和关联强度, 双稳系统的随机共振能够以单峰和双峰两种形式出现并能够相互转换. 以上所有的研究均为不同噪声之间的关联效应. 1996 年, 周晓萍、高伟建和朱士群^[16]提出激光中量子噪声的实部和虚部之间可能存在交叉关联(相关系数记为 λ_q), 并研究了一个二维模型. 随后柯圣志^[17]和张莉^[18]基于激光锁相概念发展了朱的理论. 可是, 泵噪声实部、虚部之间的交叉关联效应至今未见报道. 本文以一个合理的平方泵噪声模型来研究单模激光中泵噪声实部和虚部的交叉关联效应. 基于作者早期关于非线性外噪声的近似福克-普朗克方程 (AFPE) 的工作^[19], 推导了激光光强分布的 AFPE, 并获得这一 AFPE 的定态解的精确解析表达式.

* 国家自然科学基金(批准号: 10275025)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: dlajinwu@public.wh.hb.cn

2. 模型的建立

2.1. 激光场的朗之万方程

从单模激光的立方模型 $\dot{E} = a_0 E - A |E|^2 E$ 出发,引入平方泵噪声,建立激光场的朗之万方程,进而得到封闭的光强朗之万方程. 式中 a_0 是净增益,即泵参数, A 为饱和系数. 我们只研究阈值上 ($a_0 > 0$) 并且不太靠近阈值 (这时量子噪声可以忽略) 的情形. 由于泵参数 a_0 必须作为随机量处理,并且这时有 $a_0 = (b + \bar{\eta}(t))^2$. 记 b^2 为 a , $\bar{\eta}(t)$ 为泵噪声,则得到如下的激光场的朗之万方程:

$$\dot{E} = aE - A |E|^2 E + (2b\bar{\eta}(t) + \bar{\eta}^2(t))E, \quad (1)$$

(1) 式中的泵参数 a 是一个确定性的控制参量,不再涨落. $\bar{\eta}(t) = \bar{\eta}_r(t) + i\bar{\eta}_i(t)$ 的统计性质设为

$$\bar{\eta}_i(t) = \bar{\eta}_r(t) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_r(t)\bar{\eta}_r(t') &= \bar{\eta}_i(t)\bar{\eta}_i(t') \\ &= \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_r(t)\bar{\eta}_i(t') &= \bar{\eta}_i(t)\bar{\eta}_r(t') \\ &= \lambda \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 λ 为泵噪声 $\bar{\eta}(t)$ 实部和虚部之间的相关系数, $-1 \leq \lambda \leq 1$. 也就是说,我们假设 $\bar{\eta}(t)$ 为复 $0-U$ 噪声. 方程 (1)–(4) 即本文的出发点. (1) 式就是平方泵噪声驱动的场 E 的运动方程——激光场的朗之万方程. 值得指出的是 (1) 式在白噪声极限下没有意义,因为白噪声的关联函数为 δ 函数,其平方在数学上没有定义.

2.2. 光强朗之万方程

如果主要是为了了解光强的统计性质,那么就只需导出与激光周相脱耦的光强朗之万方程. 由于不必考虑量子噪声,所以不必做任何近似就能从 (1) 式得到这一方程. 做法是取极坐标: $E = |E| e^{i\varphi}$, 代入方程 (1) 取其实部,并注意到光强 $I = |E|^2$, 就得到光强朗之万方程

$$\dot{I} = 2aI - 2AI^2 + 2[2b\bar{\eta}_r(t) + \bar{\eta}_i^2(t) - \bar{\eta}_r^2(t)]I. \quad (5)$$

为了能够利用文献 [19] 关于平方噪声驱动系统的近似 AFPE 的结果,必须把 (5) 式中的 $\bar{\eta}_r(t)$, $\bar{\eta}_i(t)$ 用

实部和虚部互不相关的噪声 $\eta(t)$ 代替, $\eta(t) = \eta_r(t) + i\eta_i(t)$. 利用下面变换^[20]

$$\bar{\eta}_r(t) = \eta_r(t),$$

$$\bar{\eta}_i(t) = \sqrt{1 - \lambda^2} \eta_i(t) + \lambda \eta_r(t). \quad (6)$$

$\eta(t)$ 的统计性质为

$$\eta_r(t) = \eta_i(t) = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \eta_a(t)\eta_b(t') &= \delta_{ab} \cdot \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}} \\ (a, b = r, i). \end{aligned} \quad (8)$$

将 (6) 式代入 (5) 式,由于 $\eta_r(t)$ 和 $\eta_i(t)$ 互不相关,因而 $\eta(t)$ 是圆形复高斯噪声^[21],从而得到

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 2aI - 2AI^2 + 2[2b\eta_r(t) \\ &+ 2\sqrt{1 - \lambda'^2} \lambda' \eta_i(t)\eta_r(t)]I, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\lambda' = -\lambda$.

3. 近似福克-普朗克方程及定态光强概率分布

根据文献 [19],由 (9) 式确定的非马尔可夫过程 I 的概率分布服从下列 AFPE,即

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(I, t) &= -\frac{\partial}{\partial I} f(I) P(I, t) \\ &+ D_0 \frac{\partial}{\partial I} g(I) \frac{\partial}{\partial I} g(I) P(I, t), \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $f(I) = 2aI - 2AI^2$; $g(I) = 2I$; $D_0 = 4aQ + \frac{4Q^2}{\tau} \times (\lambda^2 - \lambda^4)$.

方程 (10) 的定态解,即光强定态概率分布 $P(I)$ ^[22] 为

$$P(I) = N I^{\frac{L}{2D_0}} \cdot e^{-\frac{A}{2D_0} I}. \quad (11)$$

归一化常数 N 为^[23]

$$\begin{aligned} N &= \left(\int_0^\infty I^{\frac{L}{2D_0}} \cdot e^{-\frac{A}{2D_0} I} \cdot dI \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\Gamma(v)}{\mu^v} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $L = a - 2D_0$, $\mu = \frac{A}{2D_0}$, $v = \frac{L}{2D_0} + 1$, 而 $\Gamma(v)$ 是 Gamma 函数.

4. 结 论

1. 由于光强的概率分布 $P(I, t)$ 服从 AFPE ((10) 式), 而 (10) 式有明确的适用条件, 就是 $\sqrt{\tau} Q \ll 1$, 并且不难满足, 所以, 本文导出的方程 (10) 可以

作为研究激光光强随时间演化的基础性方程.

2. 作为本文重要例子, 推导了归一化定态光强概率分布(11)和(12)式, 它是方程(10)的精确定态解. 由于系统的定态解与初始条件无关, 它反映系统本身的统计性质, 是计算这些性质的基础.

3. 根据(11)式对 λ 的对称性, 可得出下列普遍结论:

1) 由于 D_0 对 λ 的正、负取值对称, 故系统的定态性质对泵噪声实部、虚部之间正关联和负关联是一样的, 因此可只讨论正关联.

2) 由于 λ 取值 0 和 1 时 $P(I)$ 都一样, 因此, 系统的统计性质在 λ 由 0 到 1 的变化过程中必然出现极值.

3) 作为计算定态光强统计性质的基础的归一化定态概率分布本身, 它在 λ 取值为 0 和 1 时分布相

同, 这意味着当 λ 由 0 变到 1 的过程中, $P(I)$ 表现出一种“回归”的性质. 图 1—图 3 的 $P(I)-I$ 曲线对应于 λ 由小到大的三个不同取值, 这时, 几率分布由单极大值 \rightarrow 单调下降 \rightarrow 单极大值. 显示出单极大值分布“重复出现”的相变特点^[5].

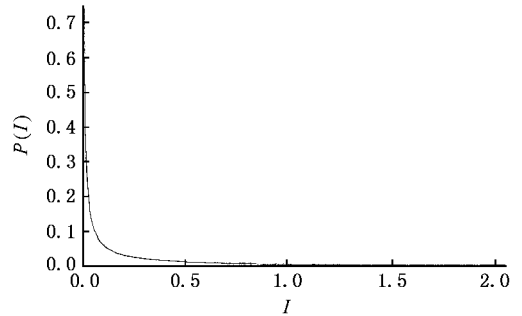


图 2 $\lambda = 0.5$ 时的 $P(I)-I$ 曲线 其他参数取值同图 1

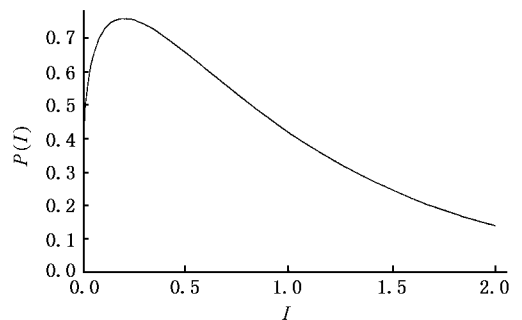


图 3 $\lambda = 1$ 时的 $P(I)-I$ 曲线 其他参数取值同图 1

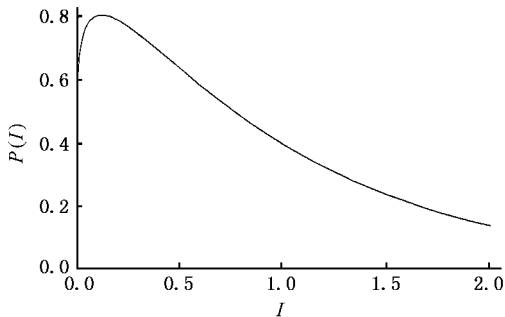


图 1 $\lambda = 0.01$ 时的 $P(I)-I$ 曲线 其他参数取值为: $A = 1, Q = 0.1, a = 1, \tau = 10^{-4}$

- [1] Fulinski A, Telejko T 1991 *Phys. Lett. A* **152** 11
 [2] Cao L, Wu D J 1994 *Phys. Lett. A* **185** 59
 [3] Wu D J, Cao L, Ke S Z 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2495
 [4] Zhu S Q 1993 *Phys. Rev. A* **47** 2405
 [5] Jia Y, Li J R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 994
 [6] Mei D C, Xie G, Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
 [7] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23
 [8] Cao L, Wu D J 2001 *Phys. Lett. A* **283** 313
 [9] Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Lett. A* **260** 126
 [10] Tessone C J, Wio H S, Hanggi P 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4623
 [11] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
 [12] Luo X Q, Zhu S Q, Gao W J 2001 *Chin. Phys.* **10** 1011
 [13] Luo X Q, Zhu S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 (in Chinese)

[罗晓琴、朱士群 2002 物理学报 **51** 977]

- [14] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1204
 [15] Luo X Q, Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
 [16] Zhou X, Gao W, Zhu S Q 1996 *Phys. Lett. A* **214** 131
 [17] Ke S Z, Cao L, Wu D J, Yao K L 2001 *Phys. Lett. A* **281** 113
 [18] Zhang L, Cao L, Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **309** 29
 [19] Cao L, Wu D J 1988 *Phys. Lett. A* **133** 476
 [20] Wei X Q, Cao L, Wu D J 1995 *Phys. Lett. A* **207** 338
 [21] Goodman J W 1985 *Statistical Optics* (New York: Wiley)
 [22] Risken H 1984 *The Fokker-Planck Equation* (Berlin: Springer-Verlag)
 [23] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals, Series and Products* (New York: Academic)

Cubic model of a single-mode laser driven by quadratic pump noise and the steady probability distribution of laser intensity^{*}

Xu De-Sheng¹⁾ Cao Li^{1)B)} Wu Da-Jin^{2)B)†}

1) *State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*

2) *Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*

3) *CCAST(World Laboratory), Beijing 100080, China*

(Received 27 April 2005; revised manuscript received 21 June 2005)

Abstract

A single-mode laser cubic model driven with quadratic pump noise is proposed. Closed laser intensity Langevin equation is got. Based on our early work of the Approximation Fokker-Planck equation (AFPE) for the systems driven by nonlinear external noise [Cao L and Wu D J 1988 Phys. Lett. A **133** 476], the AFPE for laser intensity probability distribution is obtained. Exact analytic expression for the steady normalized intensity probability distribution is calculated. Based on the symmetry of steady normalized intensity probability distribution with respect to λ , the cross-correlation coefficient between the real and imaginary parts of pump noise, several general conclusions on the steady statistical property of laser system are reached.

Keywords: quadratic pump noise, cubic model of a single-mode laser, steady probability distribution of laser intensity, reentrance of statistical property

PACC: 4250, 0540, 4260K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10275025).

[†] Corresponding author. E-mail: dajinwu@public.wh.hb.cn