第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0830-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.2,February,2006

超导环电流的研究

梁芳营[1)2)†]　李汉明[1)]　李英骏[1)]

1)(中国矿业大学(北京校区)力学与建筑工程学院,北京　100083)

2)(烟台大学光电信息科学与技术学院,烟台　264005)

(2003 年 10 月 18 日收到;2005 年 7 月 4 日收到修改稿)

以修正的含时金兹堡-朗道理论去研究超导环的超流特性;计算了涡旋运动方程,理论上得到超导环电流是超流量子的整数倍,并且具有多涡旋跳跃;从理论上得到超导环的磁场是量子化的.一定条件下,超流的符号可以发生反转,并且理论上得到了它的表达式.认为超导环是具有对势的对称.

关键词:超导环,电流,超导电性

PACC:7400,7420,7430F

1.引　　言

超导传输特性的研究是超导电性最有兴趣的方面之一,而超导电流的研究又是超导电性研究的重要方面之一,前人做了大量的工作.虽然超导的流量子化在 40 年前就已经被实验证明,但是最近对超导环电流量子化的研究兴趣大增,科学家们对超导盘和超导环进行了大量的研究[1—15].他们得到超导环电流具有多涡旋跳跃,具有 d 波对称性,超导环电流量子化等等.超导环电流量子化在传统超导体和高温超导体中都存在.本文在修正的含时金兹堡-朗道理论基础上,计算涡旋运动方程,从而对超导环电流的特性作一些探讨研究.

2.模　　型

在讨论超导涡旋运动之前,先将修正的含时金兹堡-朗道方程应用于超导环特性的研究,假设超导环的内、外半径分别为 R_1 和 R_2,厚度为 s.假定序参量是连续的复序参量 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$,从修正的紧束缚近似的含时金兹堡-朗道理论出发,那么满足修正的金兹堡-朗道方程的序参量 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 有[16—18]

$$\left[\partial_t+\frac{\mathrm{i}\tilde{\mu}}{\hbar}\right]\Psi=-\Gamma\frac{\delta H}{\delta\Psi^*},\qquad(1)$$

这里哈密顿量 H 为

$$H=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\Big\{a|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2+\frac{1}{2}b|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^4+\frac{\hbar^2}{2m}\left|\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)\Psi(\boldsymbol{r},t)\right|^2+\frac{1}{8\pi}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\Big\}.\qquad(2)$$

这里 Ψ^* 是 Ψ 的复数,$\hbar$ 是普朗克常数,$a=a_0(T/T_{\mathrm{C}}-1)$,$a_0$ 是待定常量;T 是开氏温度,T_{C} 是临界温度;b 是常量,参数 a 和 b 是通过微观特性来确定[10,18],$e=1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$;$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$是超导体的体矢量,$m$ 是准粒子的运动有效质量;$\boldsymbol{A}$ 是矢势,$\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 是微感应磁场,$\boldsymbol{B}=\langle\boldsymbol{h}\rangle$是磁感应场;$\tilde{\mu}=\mu+2e\Phi_{\mathrm{e}}+\delta H/\delta n_{\mathrm{s}}$ 是总化学势,Φ_{e} 是电势,μ 是化学势,$\Gamma=\Gamma_1+\mathrm{i}\Gamma_2$ 是一个无维关系比率的复数;$\delta H/\delta n_{\mathrm{s}}$ 是超流动能,$n_{\mathrm{s}}=|\Psi|^2$ 是超导的超流密度.这里 $\Psi=f\exp[\mathrm{i}\chi(\boldsymbol{r},t)]$,$f$ 是振幅,因为运动涡旋没有柱对称,所以相变量 χ 仅在涡旋中心是相等的.

设 $\gamma=\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2=[\Gamma_1-\mathrm{i}(1+\Gamma_2)]/[\Gamma_1^2+(1+\Gamma_2)^2]$,如果假设超流动能$(\delta H/\delta n_{\mathrm{s}})\Psi\approx\delta H/\delta\Psi^*$,然后把方程(2)代入方程(1)中,那么可以把方程(1)写为[17,19,20]

$$\eta\gamma\left[\partial_t+\mathrm{i}\frac{2e}{\eta}\tilde{\Phi}\right]\Psi(\boldsymbol{r})=a\Psi+b|\Psi|^2\Psi+\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\Psi,\qquad(3)$$

† 通讯联系人.E-mail:Liangyangming882@126.com

这里 $\tilde{\Phi}=\Phi_e+\mu/2e$，$\tilde{\Phi}$ 与 Φ 有微弱的不同[21]，我们可以忽略 $\tilde{\Phi}$ 与 Φ 的不同. 因为有 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，所以方程(3)可写为

$$\hbar\gamma\left[\partial_t+\mathrm{i}\frac{2e}{\hbar}\tilde{\Phi}\right]\Psi(\boldsymbol{r})=a\Psi+b|\Psi|^2\Psi+\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\nabla^2+\left(\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\right)\Psi. \tag{4}$$

3. 方程的解

采用柱坐标系(ρ,θ,z)，柱坐标系的原点为超导环的下表面的圆心，$\hat{\rho}_0$ 和 $\hat{\theta}_0$ 及 $\hat{z}_0$ 分别是柱坐标系的三个单位矢量，$\hat{\rho}_0$ 和 $\hat{\theta}_0$ 平行于超导环的下表面，$\hat{z}_0$ 垂直于超导环的底平面且垂直向上. 在柱坐标系有 $\nabla=\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\rho}_0+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}_0+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}_0$，$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，序参量 $\Psi(\boldsymbol{r},t)=\Psi(\rho,\theta,z,t)$，假如 $\Psi(\rho,\theta,z,t)$ 不随 z 变化，且不是时间的函数，那么序参量可写为 $\Psi(\rho,\theta,z,t)=f_n(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\phi(z,t)$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$n$ 为整数，$f_n(\rho)$ 是序参量与 ρ 有关的变量，$\phi(z,t)$ 是序参量与 z 和时间 t 有关的变量；且有 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$. 方程(4)可写为

$$\hbar\gamma\left[\partial_t+\mathrm{i}\frac{2e}{\hbar}\tilde{\Phi}\right]\Psi(\boldsymbol{r})=a\Psi+b|\Psi|^2\Psi+\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho})-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+(\frac{2e}{c}\boldsymbol{A})^2\Psi\right),$$

$$2e\gamma\mathrm{i}\tilde{\Phi}f_n=af_n+bf_n^3+\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f_n}{\partial\rho})+\frac{n^2}{\rho^2}f_n+(\frac{2e}{c}\boldsymbol{A})^2f_n\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f_n}{\partial\rho})+\frac{2m}{\hbar^2}\left(2e\gamma\mathrm{i}\tilde{\Phi}-a-\left(\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)f_n-\frac{2m}{\hbar^2}bf_n^3=0. \tag{5}$$

方程(5)的解必须满足的边界条件为 $\left.\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=R_1}$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=R_1}=0$. $\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y=0$ 为 v 阶贝塞尔方程，它的解为 v 阶贝塞尔函数. 把方程(5)与贝塞尔方程比较，我们只要对方程(5)作一点变换就可解出它的解，令 $\lambda^2=\frac{2m}{\hbar^2}\times\left(2e\gamma\mathrm{i}\tilde{\Phi}-a-\left(\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\right)$，$u=\lambda\rho$，$v=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}n$，$v$ 是非整数，那么方程(5)可化为

$$\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial f_u}{\partial u}\right)+\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)f_n-\frac{2m}{\lambda^2\hbar^2}bf_n^3=0. \tag{6}$$

那么可得通解为

$$f_n=c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u)+f_n^*, \tag{7}$$

这里 $c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u)$ 是 v 阶贝塞尔方程的通解，f_n^* 是方程(6)的特解，c_1，c_2 为常数. 把方程(7)代入方程(6)得

$$\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u))}{\partial u}\right)+\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u))-\frac{2m}{\lambda^2\hbar^2}b(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u))^3$$
$$+\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial f_0^*}{\partial u}\right)+\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)f_n^*-\frac{2m}{\lambda^2\hbar^2}bf_n^{*3}-\frac{2m}{\lambda^2\hbar^2}3bf_n^{*2}(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u))-\frac{2m}{\lambda^2\hbar^2}3bf_n^*(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u))^2=0,$$

$$(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u))^2+3f_n^{*2}+3f_n^*(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u))=0,$$

$$f_n^*=\frac{-3\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u)), \tag{8}$$

那么可得方程(5)的通解为

$$f_n=\frac{3\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(c_1\mathrm{J}_v(u)+c_2\mathrm{J}_{-v}(u)). \tag{9}$$

这里 $u=\lambda\rho$，$\mathrm{J}_v(u)$ 是 v 阶贝塞尔函数，$\mathrm{J}_{-v}(u)$ 是 $-v$ 贝塞尔函数. 通解 f_n 必须满足边界条件 $\left.\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=R_1}=0$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=R_2}=0$.

涡旋运动场的矢势一定满足安培定律 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=4\pi(\boldsymbol{J}_n+\boldsymbol{J}_s)$，因为 $\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_n+\boldsymbol{J}_s)=0$，这里 $\boldsymbol{J}_n=\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\cdot(-\nabla\Phi-\partial_t\boldsymbol{A})$ 为正常电流，超流速度 $\boldsymbol{V}_s=\boldsymbol{J}_s/2e|\Psi|^2$，超流 $\boldsymbol{J}_s=\frac{2e\hbar}{2m\mathrm{i}}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)-\frac{(2e)^2}{m}|\Psi|^2\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_{xx}^{(n)}&\boldsymbol{\sigma}_{xy}^{(n)}\\\boldsymbol{\sigma}_{yx}^{(n)}&\boldsymbol{\sigma}_{xx}^{(n)}\end{bmatrix}$ 为正常态电导率

张量.由 Onsager 关系和简单的旋转对称 $\sigma_{xy}^{(n)}(H) = -\sigma_{yx}^{(n)}(H)$,则电导率张量可分为对角和反对称两部分,纵向电导率 $\sigma_{xx}^{(n)}$一般与磁场是弱相关的函数,$\sigma_{xy}^{(n)}$是 Hall 电导率.

假设磁场矢势为坐标 $\hat{z}_0$ 的方向,则有 $A = A_z\hat{z}_0$.当 $\Psi(\rho,\theta,z,t)$不随 z 变化,且不是时间的函数时,把 $\Psi(\rho,\theta,z,t) = f_n(\rho)e^{in\theta}\phi$ 代入超流表达式,可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_s &= \frac{2e\eta}{2mi}(\Psi^* \nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{(2e)}{m}|\Psi|^2\boldsymbol{A}_z \\ &= \left[\frac{2nhe}{m}\frac{1}{\rho}\hat{\theta}_0 - \frac{(2e)^2}{m}\boldsymbol{A}_z\right]f_n^2 \end{aligned} \tag{10}$$

$\boldsymbol{J}_s$ 在 $\hat{\rho}_0$ 方向上的分量为 0,只有 $\hat{\theta}_0$ 方向的分量不为 0,且与波函数的平方成正比.$f_n = \frac{3\pm i\sqrt{3}}{6}(c_1 J_v(u) + c_2 J_{-v}(u))$并且满足边界条件 $\left.\frac{df_n}{d\rho}\right|_{\rho=R_1} = 0$ 和 $\left.\frac{df_n}{d\rho}\right|_{\rho=R_2} = 0$,当 $v\to n$ 的极限(n 为正数)时,$f_n(u)$是 $J_n(u)$的非线性解.所以超流 $\boldsymbol{J}_s$ 是跳跃变化的.由方程(10)可知超流 $\boldsymbol{J}_s$ 是量子化的.由方程(10)可知如果外界磁场逐渐增大,当$\left|\frac{(2e)^2}{m}A_z\right| > \left|\frac{2n\hbar e}{m}\frac{1}{\rho}\hat{\theta}_0\right|$时,超导环流 $\boldsymbol{J}_s$ 符号可以反转.

4. 与前人工作的比较及结果讨论

Kostic 和 Veal 等研究了超导环的磁场是量子化的[6,7—10],这里由方程(10)可知超流 $\boldsymbol{J}_s$ 是量子化的,超导环的磁场是量子化的.

由涡旋运动方程(9)可知 $f_n(u)$是 $J_n(u)$的非线性解.理论上得到超导环电流 $\boldsymbol{J}_s$ 是具有多涡旋跳跃变化.Vodolazo 和 Peeters 等有意在超导环中制造缺陷,而得到环有大的尺度效应及超导环超流的跳跃变化[1].Vodolazo 和 Peeters 等得到随着外界磁场的增加,序参量逐渐减少,从而导致了在涡旋态下超流跳跃的幅值的减小[1].Pedersen 和 Kofod 等[2]对一个铝环的磁场进行了实验研究,在磁场测量时,周期性地发现磁场强度是量子 $\Phi_0 = \hbar/2e$ 的整数倍.

Zheng 等[22]在超流系统中求解耦合非线性薛定谔方程获得了序参量的解也发现超流具有多涡旋结构.

Tsuei 等得到在超导环中的超流 $I_s = I_c^{ij}\sin\Delta\phi_{ij}$的形式[5].他们从带结超导环和不带结超导环的超流之间高场的渐近线的不同推断超导环的感应系数[5].我们由这里的方程(10)可知超导环电流 $\boldsymbol{J}_s$ 在 $\hat{\rho}_0$ 方向上的分量为 0,只有 $\hat{\theta}_0$ 方向的分量不为 0.$\boldsymbol{J}_s$ 是按贝塞尔函数的平方变化,且与波函数的平方成正比,但它们的幅值是逐渐减小的.从方程(10)可知超流 $\boldsymbol{J}_s$ 是量子化的,是跳跃变化的.一定条件下,如果外界磁场逐渐增大,当磁场增大到一定值时,超导环电流 $\boldsymbol{J}_s$ 的符号可以反转.

Satoshi Kashiwaya 和 Tsuei 等在高温超导体获得 d 波对称性[23,24—27].Satoshi Kashiwaya 和 Yukio Tanaka 在有内在对势相的那些材料中获得 d 波对态,内在对势相是为 Cooper 对波矢的函数,在隧道结的电子特性中有大的影响.他们在高温超导体中获得令人信服的 d 波对称证据[26].Tsuei 和 Kirtley 等利用流量子的概念,在超导环(由超导 $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$制造的)中用有 0,2 和 3 个的晶粒边界的 Josephson 结来测量高温超导体的对势的对称,他们非常肯定高温超导体具有 d 波对称[5].

本文以修正的含时金兹堡-朗道理论去研究超导环的超流特性.理论上我们得到超流是超流量子的整数倍,以及超流是跳跃变化.在一定条件下,超导环的超流符号可以发生反转.我们认为超导环是具有对势的对称.在高温超导,超导环的对称被认为 d 波对称.

[1] Vodolazo D Y, Peeters F M 2003 *Phys. Rev.* B **67** 054506
Vodolazo D Y, Baelus B J, Peeters F M 2002 *Phys. Rev.* B **66** 054531
Vodolazo D Y, Peeters F M 2002 *Phys. Rev.* B **66** 054537
[2] Pedersen S, Kofod G R, Hollingbery J C *et al* 2001 *Phys. Rev.* B **64** 104522
[3] Baelus B J, Cabral L R E, Peeters F M 2004 *Phys. Rev.* B **69** 064506
[4] Baelus B J, Peeters F M, Schweigert V A 2000 *Phys. Rev.* B **61** 9734
Baelus B J, Peeters F M, Schweigert V A 2001 *Phys. Rev.* B **6** 144517
[5] Tsuei C C, Kirtley J R, Chi C C, Lock See Yu-Jahnes *et al* 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 593
[6] Kostic P, Veal B, Paulikas A P *et al* 1996 *Phys. Rev.* B **53** 791
[7] Terentiev A, Watkins D B, De Long L E *et al* 1999 *Phys. Rev.* B **60** R761

[8] Braunisch W, Knauf N, Bauer G *et al* 1993 *Phys*. *Rev*. B. **48** 4030
[9] Braunisch W, Knauf N, Kataev V *et al* 1992 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **68** 1908
[10] Geim A K, Dubonos S V, Lok J G S *et al* 1998 *Nature* **396** 144
[11] Deng P, Meng S C, Wang F R, Xie F X, Ma P, Dai Y D 2001 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **50** 2217 (in Chinese) [邓 鹏、孟树超、王福仁、谢飞翔、马 平、戴远东 2001 物理学报 **50** 2217]
[12] Liu X Y, Xie F X, Wang F *et al* 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 2580 (in Chinese) [刘新元、谢飞翔、王 福、马 平、戴远东 2003 物理学报 **52** 2580]
[13] Ling J, Wang K, Xie F X *et al* 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 1771 (in Chinese) [凌 健、王 科、谢飞翔、马 平、杨 涛、王福仁、戴远东 物理学报 **52** 1771]
[14] Liu L J, Zhang Z J 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 847
[15] Guo S Q, Wang F L, Zhou Y L *et al* 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 379
[16] Klemm R A, Luther A, Beasley M R 1975 *Phys*. *Rev*. B **12** 877
[17] Dorsey Alan J 1992 *Phys*. *Rev*. B **46** 8376
[18] Ivlev B I, Kopnin N B 1989 *J*. *Low Temp*. *Phys*. **77** 413
[19] Liang F Y 2004 *Physica C* **402** 174
Liang F Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 898 (in Chinese) [梁芳营 2002 物理学报 **51** 898]
Liang F Y, Liu H, Li Y J *et al* 2004 *Physica C* **406** 115
[20] Liang F Y, Li Z H 2002 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **38** (Beijing, China), **3** 379
Liang F Y, Qing X, Zhong Y R *et al* 2003 *Acta Phys*. **52** 2584 (in Chinese) [梁芳营、青 心、钟玉荣 等 2003 物理学报 **52** 2584]
[21] Schmid A 1966 *Phys*. *Kondon*. *Mater*. **5** 302
[22] Zheng G P, Liang J Q, Liu W M 2005 *Phys*. *Rev*. A **71** 053608
[23] Van Harlingen D J 1995 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **67** 515
[24] Tsuei C C, Kirtley J R 2000 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **72** 969
[25] Yukio Tanaka, Satoshi Kashiwaya 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **74** 3451
[26] Satoshi Kashiwaya, Yukio Tanaka 2000 *Rep*. *Prog*. *Phys*. **63** 1641
[27] Il'ichev E, Grajcar M, Hlubina R *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **86** 5369

Study of current in superconductive rings

Liang Fang-Ying[1)2)†] Li Han-Ming[1)] Li Ying-Jun[1)]

1) (*School of Mechanics, Architecture and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing* 100085, *China*)
2) (*Institute of Science and Technology for OPTO-Electronic Information of YanTai University, ShanDong Yantai* 264005, *China*)

(Received 18 October 2003; revised manuscript received 4 July 2005)

Abstract

We use a modified time-dependant Ginzburg-Landau model to study the characteristics of superconductive rings and evaluate the vortex motion equations. We show in theory that the flux has jumps, find sign reversal of the current and obtain expressions that are in accordance with the data of experiments.

Keywords: superconducting ring, current, superconductivity
PACC: 7400, 7420, 7430F

† Corresponding author. E-mail: Liangyangming882@126.com