第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0995-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.2,February,2006

Anti-de Sitter 时空内柱黑洞的量子熵*

李固强†

(湛江师范学院信息科技学院,广东湛江 524048)

(2005 年 3 月 15 日收到;2005 年 7 月 4 日收到修改稿)

利用 brick-wall 方法计算了 Anti-de Sitter 时空内起源于 Dirac 场的柱黑洞的量子熵.结果表明,忽略远离围绕系统的真空的贡献时,量子熵包含了线性发散项和对数发散项,整个表达式的形式与标量场的不一样.无论整个对数项还是与自旋联系的子对数项都总是正的.

关键词:brick-wall 方法,量子熵,柱黑洞,Dirac 场

PACC:9760L,0420

1. 引 言

自从 Bekenstein[1] 和 Hawking[2] 提出有一个正比于视界面积的内禀熵以来,人们利用各种途径来理解这个熵的统计性质[3—7].1985 年,'t Hooft[3] 利用 WKB 近似研究了 Schwarzschild 黑洞的量子熵,为了解决物态密度在视界附近的发散问题,引进了 brick-wall 方法.该方法已经用于各种稳态或动态黑洞的情况[8—16].文献[17]利用 brick-wall 方法研究了自旋场对 Reissner-Nordstrom 黑洞熵的量子修正,指出自旋场的熵包含依赖于自旋的对数项,并且这项的存在使得自旋场的熵的整个表达式形式与标量场的不一样.此后,许多研究者利用同样的方法计算了静态球对称和稳态轴对称黑洞背景中自旋场的熵的发散结构[18—24].文献[25]利用量子统计的方法计算了柱黑洞的统计熵,但是只考虑了主导项.研究起源于自旋场的柱黑洞的量子熵以及量子熵与自旋场粒子的自旋的联系是一个有意义并且值得研究的问题.这篇文章的目的是利用 brick-wall 方法计算 Anti-de Sitter 时空内起源于 Dirac 场的柱黑洞的量子熵,讨论 Dirac 粒子自旋对这熵的影响.

2. 零标架与 Dirac 场方程

Anti-de Sitter 时空内,不带电的静态柱黑洞外部时空度规为[25,26]

$$ds^2 = B\mathrm{d}t^2 - B^{-1}\mathrm{d}r^2 - \rho^2(\alpha^2\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}\varphi^2), \quad (1)$$

其中

$$B = \alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho};\alpha^2 = -\frac{1}{3}\Lambda. \quad (2)$$

M 为单位长度黑洞的质量.黑洞的 Hawking 辐射温度为

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{3\alpha^2\rho_+}{4\pi} = \frac{3\alpha}{4\pi}(4M)^{1/3}. \quad (3)$$

式中 $\rho_+ = \frac{1}{\alpha}[4M]^{1/3}$,它是方程

$$\alpha^2\rho^2 - \frac{4M}{\alpha\rho} = 0 \quad (4)$$

的唯一正实根,对应黑洞的视界位置.

对应时空(1),我们建立如下零标架:

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{B}}, -\sqrt{B}, 0, 0\right),$$

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{B}}, \sqrt{B}, 0, 0\right),$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\rho}\left(0, 0, -\frac{1}{\alpha}, -\mathrm{i}\right),$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\rho}\left(0, 0, -\frac{1}{\alpha}, \mathrm{i}\right). \quad (5)$$

利用 Newman 和 Penrose 公式[27],得到所有不为零的旋系数

$$\rho = \mu = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2}\rho}, \gamma = \varepsilon = \frac{-B'}{4\sqrt{2B}}. \quad (6)$$

---

* 湛江师范学院重点科研项目资助的课题.

† E-mail:ligq@zhjnc.edu.cn

在弯曲时空中,无源 Dirac 场方程为[28]

$$(D+\varepsilon-\rho)F_1+(\bar{\delta}+\pi-\alpha)F_2=0,$$
$$(\Delta+\mu-\gamma)F_2+(\delta+\beta-\tau)F_1=0,$$
$$(D+\varepsilon^*-\rho^*)G_2+(\delta+\pi^*-\alpha^*)G_1=0,$$
$$(\Delta+\mu^*-\gamma^*)G_1+(\bar{\delta}+\beta^*-\tau^*)G_2=0,\tag{7}$$

其中 F_1,F_2,G_1,G_2 为波函数的四分量,$D=l^\mu\partial_\mu$,$\Delta=n^\mu\partial_\mu$,$\delta=m^\mu\partial_\mu$ 为普通导数算符.

为了化简方程(7),令

$$F_1=\rho^{-1}R_{-1/2}(\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}S_{-1/2}(z,\varphi),$$
$$F_2=R_{+1/2}(\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}S_{+1/2}(z,\varphi),$$
$$G_1=R_{+1/2}(\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}S_{-1/2}(z,\varphi),$$
$$G_2=\rho^{-1}R_{-1/2}(\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}S_{+1/2}(z,\varphi).\tag{8}$$

将(6)和(8)式代入方程(7),得

$$\rho^2B^2\frac{\mathrm{d}^2R_{-1/2}}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{(\rho^2B^2)'}{2}\frac{\mathrm{d}R_{-1/2}}{\mathrm{d}\rho}+\Big[\frac{\mathrm{i}E\rho}{2}(2B-\rho B')+\rho^2E^2+\frac{BB'\rho+\rho^2BB''}{4}-B\lambda^2\Big]R_{-1/2}=0,\tag{9}$$

$$\rho^2B^2\frac{\mathrm{d}^2R_{+1/2}}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{(\rho^2B^2)'}{2}\frac{\mathrm{d}R_{+1/2}}{\mathrm{d}\rho}+\Big[\frac{\mathrm{i}E\rho}{2}(2B-\rho B')+\rho^2E^2+\frac{5\rho BB'C'+\rho^2BB''+4B^2\rho}{4}-B\lambda^2\Big]R_{+1/2}=0,\tag{10}$$

$$\Big(\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)S_{\pm1/2}+\lambda^2S_{\pm1/2}=0.\tag{11}$$

由文献[29]易知,方程(11)的解为平面波,所以分离变量常数可写为 $\lambda^2=\frac{m^2}{\alpha^2}+n^2$.

3. 量子熵

运用 WKB 近似,设 $R_{\pm1/2}(\rho)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_\pm(\rho)}$,将它代入方程(9)和(10)中,得径向波数 $k(\rho,m,n,E)\equiv\partial_\rho S$:

$$k_{-1/2}=\frac{1}{\rho B}\Big[\rho^2E^2+\frac{B'\rho+\rho^2B''}{4}B-\Big(\frac{m^2}{\alpha^2}+n^2\Big)B\Big]^{1/2},$$
$$k_{+1/2}=\frac{1}{\rho B}\Big[\rho^2E^2+\frac{5B'\rho+\rho^2B''+4B}{4}B-\Big(\frac{m^2}{\alpha^2}+n^2\Big)B\Big]^{1/2}.\tag{12}$$

根据 brick-wall 模型的方法,设在 $\rho=\rho_++\varepsilon$ 和 $\rho=\rho_++L$ 处,$R_{-1/2}=R_{+1/2}=0$,其中 $0<\varepsilon\ll\rho_+$,$L\gg\rho_+$.则能量不超过 E 的本征态数目为

$$\begin{aligned}g(E)&=\iint\mathrm{d}m\,\mathrm{d}n\,\frac{1}{\pi}\int_{\rho_++\varepsilon}^{\rho_++L}[2k_{-1/2}(\rho,m,n,E)+2k_{+1/2}(\rho,m,n,E)]\mathrm{d}\rho\\&=\frac{4\alpha}{3}\int_{\rho_++\varepsilon}^{\rho_++L}\frac{\rho^2\mathrm{d}\rho}{B^2}\Big\{\Big[E^2+\frac{(B'\rho+\rho^2B'')B}{4\rho^2}\Big]^{3/2}+\Big[E^2+\frac{(5B'\rho+\rho^2B''+4B)B}{4\rho^2}\Big]^{3/2}\Big\}.\end{aligned}\tag{13}$$

由量子统计理论,费米系统的自由能可表示为

$$-\beta F=\sum_E\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta E}).\tag{14}$$

由(13)式决定态密度,并用积分代替求和,可得

$$\begin{aligned}F&=-\frac{1}{\beta}\int_0^\infty\mathrm{d}E\,\frac{\mathrm{d}g(E)}{\mathrm{d}E}\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta E})=-\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\beta E}}{1+\mathrm{e}^{-\beta E}}g(E)\mathrm{d}E\\&=-\frac{7\alpha\pi^4}{45\beta^4}\int_{\rho_++\varepsilon}^{\rho_++L}\frac{\rho^2}{B^2}\mathrm{d}\rho-\frac{\alpha\pi^2}{12\beta^2}\int_{\rho_++\varepsilon}^{\rho_++L}\frac{\mathrm{d}\rho}{B}[(\rho^2B)''-B'\rho].\end{aligned}\tag{15}$$

而对应的 Dirac 场的熵为

$$S=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{28\alpha\pi^4}{45\beta^3}\int_{\rho_++\varepsilon}^{\rho_++L}\frac{\rho^2}{B^2}\mathrm{d}\rho+\frac{\alpha\pi^2}{6\beta}\int_{\rho_++\varepsilon}^{\rho_++L}\frac{\mathrm{d}\rho}{B}[(\rho^2B)''-\rho B'].\tag{16}$$

忽略远离围绕系统的真空的贡献,只考虑熵的量子修正项,完成上式中对 r 的积分可得 Dirac 场的熵

$$S_q=\frac{7\pi^4}{90\beta^3\alpha^3\varepsilon}+\frac{56\pi^4}{405\alpha^3\beta^3}\Big[2\rho_+-\frac{1}{\rho_+}\Big]\ln\frac{L}{\varepsilon}+\frac{\pi^2\alpha\rho_+}{2\beta}\ln\frac{L}{\varepsilon}.\tag{17}$$

4. 结　　论

利用 WKB 近似和 brick-wall 方法，我们得到了 Anti-de Sitter 时空内起源于 Dirac 场的静态柱黑洞的量子熵. 结果(17)式表明，黑洞的量子熵包含了线性发散项和对数发散项，其中对数发散项又分为两部分，整个发散结构与静态球对称和稳态轴对称黑洞情形相似[17—23]. 如果坐标截断 ε 用固有截断 $l_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{\varepsilon\beta}{\pi}}$ 代替，线性发散项可以改写为 $S_1=\frac{7}{2}\frac{A_+}{160 l_{\mathrm{p}}^2}$，其中 $A_+=2\pi\alpha\rho_+^2$ 对应于沿 z 轴方向单位长度柱黑洞的视界面积，这正是与视界面积成正比的量子修正项，反应黑洞视界的内禀贡献. 我们注意到，系数 $\frac{1}{160}$ 不同于静态球对称和稳态轴对称黑洞情形下同项的系数 $\frac{1}{360\pi}$[17—23]. 与静态球对称和稳态轴对称黑洞情形一样，第二个对数发散项即(17)式中最后一项应归于 Dirac 场的自旋效应，反应 Dirac 粒子自旋对黑洞量子熵的影响，它的出现使得 Dirac 场对黑洞熵的贡献与标量场对黑洞熵的贡献具有不同的形式.

值得注意的是，在(17)式中，无论是整个对数项还是与自旋有关的子对数项，都总是正的. 这说明，对数发散项和 Dirac 粒子自旋的影响总是增加柱黑洞的量子熵.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333
[2] Hawking S W 1975 *Nature*(London) **248** 30
[3] 't Hooft G 1985 *Nucl*. *Phys*. B **256** 727
[4] Solodukhin S N 1995 *Phys*. *Rev*. D **54** 3900
[5] Lee M H, Kim J K 1996 *Phys*. *Lett*. A **212** 323
[6] Ho J, Kang G 1998 *Phys*. *Lett*. B **445** 27
[7] Jing J L 1998 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 1441
[8] Jing J L, Yan M L 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 389
[9] Wang B B, Liu L 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1654 (in Chinese) [王波波、刘　辽 2002 物理学报 **51** 1654]
[10] Sun M C 2003 Acta *Phys*. *Sin*. **52** 1350 (in Chinese) [孙鸣超 2003 物理学报 **52** 1350]
[11] Zhang L C, Wu Y Q, Zhao R 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 974
[12] Ding T R 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 268
[13] Li G Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3673(in Chinese) [李固强 2004 物理学报 **53** 3673]
[14] Su J Q, Li C A 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 530(in Chinese) [苏九清、李传安 2005 物理学报 **54** 530]
[15] Liu C Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1997(in Chinese) [刘成周 2005 物理学报 **54** 1997]
[16] Li G Q 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3005(in Chinese) [李固强 2005 物理学报 **54** 3005]
[17] Li Z H 2000 *Phys*. *Rev*. D **62** 024001
[18] Lu M W, Jing J L 2000 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 1331
[19] Jing J L, Yan M L 2001 *Phys*. *Rev*. D **63** 084028
[20] Jing J L, Yan M L 2001 *Phys*. *Rev*. D **64** 064015
[21] Li Z H 2002 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **17** 887
[22] Li G Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1346 (in Chinese) [李固强 2003 物理学报 **52** 1346]
[23] Mi L Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2065 (in Chinese) [米丽琴 2004 物理学报 **53** 2065]
[24] Li G Q 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 468
[25] Zhao R, Zhang L C 2004 *Acta Mathematica Sci*. A **24** 515 (in Chinese) [赵　仁、张丽春 2004 数学物理学报 A **24** 515]
[26] Andrew D B 1999 *Gen*. *Rel*. *Grav*. **31** 1549
[27] Newman E, Penrose R 1962 *J*. *Math*. *Phys*. **3** 566
[28] Teukolsky A S 1973 *Astrophys*. *J*. **185** 635
[29] Li Z H, Zhao Z 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 1273 (in Chinese) [黎忠恒、赵　峥 1997 物理学报 **46** 1273]

Quantum entropy of cylindrical black hole in Anti-de Sitter space-time*

Li Gu-Qiang†

(*School of Information Technology and Science*，*Zhanjiang Normal College*，*Zhanjiang* 524048，*China*)

(Received 15 March 2005；revised manuscript received 4 July 2005)

Abstract

By using the brick-wall model，the quantum entropy of a cylindrical black hole in Anti-de Sitter space-time arising from the massless Dirac field is discussed. It is shown that the quantum entropy has both linear and logarithmical divergences if the usual contribution from the vacuum surrounding the system is ignored，and the whole expression does not take the form of the scalar one. Both the whole logarithmic term and the subleading logarithmic term which relates to the spins of the Dirac particles are always positive.

Keywords：brick-wall model，quantum entropy，cylindrical black hole，Dirac field

PACC：9760L，0420

* Project supported by the Nature Science Foundation of Zhanjiang Normal College.

† E-mail：ligq@zhjnc.edu.cn