第 55 卷 第 3 期 2006 年 3 月
1000-3290/2006/55(03)/1016-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.3,March,2006

(1+1)维广义的浅水波方程的变量分离解和孤子激发模式

沈守枫
(浙江工业大学数学系,杭州 310014)
(2005 年 8 月 2 日收到;2005 年 8 月 25 日收到修改稿)

研究(1+1)维广义的浅水波方程的变量分离解和孤子激发模式. 该方程包括两种完全可积(IST 可积)的特殊情况,分别为 AKNS 方程和 Hirota-Satsuma 方程. 首先把基于 Bäcklund 变换的变量分离(BT-VS)方法推广到该方程,得到了含有低维任意函数的变量分离解. 对于可积的情况,含有一个空间任意函数和一个时间任意函数,而对于不可积的情况,仅含有一个时间任意函数,其空间函数需要满足附加条件. 另外,对于得到的(1+1)维普适公式,选取合适的函数,构造了丰富的孤子激发模式,包括单孤子,正-反孤子,孤子膨胀,类呼吸子,类瞬子等等. 最后,对 BT-VS 方法作一些讨论.

关键词:浅水波方程,Bäcklund 变换,变量分离,孤子
PACC:0340

1. 引 言

孤子理论自 1965 年 Zabusky 和 Kruskal[1] 通过数学模拟的方法发现等离子体中两个孤波(solitory wave)在碰撞后都能保持各自的波形和行进速度不变而命名为孤子(soliton)以后,得到了迅猛发展,并且成为非线性科学中的一个重要研究分支. 其发展大致可以分为三个阶段[2]:第一阶段从 Russell[3] 在 1844 年作的《论波动》发现孤波算起到 Korteweg 和 de Vries[4] 导出著名的 KdV 方程,解释了 Russell 的浅水波为止,经历了 50 多年之久. 第二阶段大致可划在 1955 年到 1975 年,Toda 解决了 1955 发现的 FPU 非线性晶格振动问题,得到了孤波. 1965 年,Zabuskv 和 Kruskal[1] 命名孤子. 1967 年,Gardner,Greene,Kruskal 和 Miura[5] 提出了求解 KdV 方程的反散射(IST)方法. 1968 年,Lax[6] 推广了 Gardner 等人的方法,引入 Lax 对,为利用 IST 方法解决更多非线性发展方程开辟了道路. 1972 年,Zakharov 和 Shabat[7] 将 IST 方法用于求解非线性 Schrödinger 方程. 应用研究上,在很多学科领域都发现了孤子运动状态,例如,1973 年,Scott,Chu,McLaughlin[8] 发表关于 1972 年以前孤子研究情况的评述,在电子、光学领域普及了孤子知识. 同年,贝尔实验室的 Hasegawa 和 Tappert 预言光纤孤子的存在,文献[9,10]分别介绍了关于凝聚态物理学和固体物理学中孤子的应用. 第三阶段(1973 年起到现在),把孤子理论广泛应用于场论模型,基本粒子等各个领域,在一定程度上已经形成独立的学科分支——孤子物理学[11](soliton physics). 同时,开展了高维孤子的研究.

然而,寻求高维孤子激发模式,虽然是孤子理论中极其重要的内容,但是由于方法上的困难,这方面的研究进展不大. 直到 1988 年,Boiti 等人[12]得到了非线性 DS 系统中所有方向都指数衰减的 dromion 解,才开始了对高维孤子激发模式的研究[13—16]. 最近 Lou 等人[17,18]提出的基于 Bäcklund 变换的变量分离(BT-VS)方法是一种非常行之有效的方法,原因在于得到一个含有一些低维的任意函数的普适公式(主要指(2+1)维系统),则可以统一地构造丰富的孤子激发模式(或更广义的局域激发模式),如多 solitoff 解,多 dromion 解,dromion 格点解,多 lump 解,多环孤子解,多呼吸子解,多瞬子解等等[17,18]. 该方法是 Lou 在求解(2+1)维非线性 NNV 系统[17]时取得成功的. 现阶段,BT-VS 方法的理论发展主要有四种途径,一是先把场量按照多个任意函数(通常考虑两个函数的情形)展开得到关于多个函数的多线性方程[19,20],另一种途径是推广变量分离的假设[20],第三类是基于 Darboux 变换的多线性变量分离(DT-VA)方法[21,22],第四类是导数相关泛函变量分离法[23,24].

上述的 BT-VA 方法主要是在(2+1)维非线性系统上求解成功的. 近年来,该方法已经推广应用于更高维非线性系统[25—27]或(1+1)维非线性系统[28—30]. BT-VS 方法被用来求解的非线性系统一般都是可积的. 文献[31]把该方法用于研究(2+1)维不可积 KdV 系统,并且指出对于不可积系统,任意函数必须满足附加条件. 本文研究(1+1)维广义的浅水波方程的变量分离解和孤子激发模式. 该方程包括两种完全可积(IST 可积)的特殊情况,分别为 AKNS 方程和 Hirota-Satsuma 方程. 首先把基于 Bäcklund 变换的变量分离(BT-VA)方法推广到该方程,得到了含有低维任意函数的变量分离解. 对于可积的情况,含有一个空间任意函数和一个时间任意函数,而对于不可积的情况,仅含有一个时间任意函数,其空间函数需要满足附加条件. 不过,这也说明了,对于不可积系统,并不是所有的低一维的函数都需要满足附加条件. 另外,对现有(1+1)维非线性系统较深入的研究,除已经发现的钟型孤子,扭结型孤子,瞬子,呼吸子,尖波孤子和紧致子等,一般认为很难发现新的孤子激发模式. 但是对于本文中得到的(1+1)维普适公式,选取合适的函数,可以构造大量新的孤子激发模式,包括正-反孤子,孤子膨胀,类呼吸子,类瞬子等等.

2. (1+1)维广义的浅水波方程的变量分离解

我们考虑如下的(1+1)维广义的浅水波(GSWW)方程[32]

$$u_{xxxt}+au_xu_{xt}+bu_tu_{xx}-u_{xt}-u_{xx}=0, \tag{1}$$

这里的 a,b 为任意的非零常数且 $a+b\neq 0$. 该方程是用 Boussinesq 逼近方法在经典浅水波理论中得到的. $a=2b$ 或 $a=b$ 是该方程完全可积(IST 可积)的充分必要条件,分别称这两种情况为 AKNS 方程

$$u_{xxxt}+2bu_xu_{xt}+bu_tu_{xx}-u_{xt}-u_{xx}=0, \tag{2}$$

和 Hirota-Satsuma 方程

$$u_{xxxt}+bu_xu_{xt}+bu_tu_{xx}-u_{xt}-u_{xx}=0. \tag{3}$$

下面,考虑 GSWW 方程的 BT-VS 解. 首先利用标准的 WTC-Painlevé 截断方法[33]可以导出 Bäcklund 变换

$$u(x,t)=\frac{12}{a+b}\frac{f_x(x,t)}{f(x,t)}+u^*(x,t), \tag{4}$$

这里的 $u^*(x,t)$为任意的种子解,而 $f(x,t)$为待定的未知函数,需满足一超定方程组(略). 接下来,设种子解为 $u^*(x,t)=u_0(x)+\frac{t}{b}$,并且 $f(x,t)=F(t)+G(x)$,再利用 Bäcklund 变换(4)代入方程(1)得

$$\begin{aligned}&F\left[u_0''+\frac{aG''}{bG'}u_0'+\frac{G''''-G''}{bG'}\right]\\&+G\left[u_0''+\left(\frac{aG''}{bG'}-\frac{2aG'}{bG}\right)u_0'+\frac{2G'}{bG}-\frac{G''}{bG'}\right.\\&\left.+\frac{G''''}{bG'}+\frac{6(a-b)G''^2}{b(a+b)GG'}+\frac{4(-2a+b)G'''}{b(a+b)G}\right]=0,\end{aligned} \tag{5}$$

这里,为方便起见,分别记 $F\equiv F(t)$, $G\equiv G(x)$, $u_0\equiv u_0(x)$. 从而可以分离出方程组

$$u_0''+\frac{aG''}{bG'}u_0'+\frac{G''''-G''}{bG'}=0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&u_0''+\left(\frac{aG''}{bG'}-\frac{2aG'}{bG}\right)u_0'+\frac{2G'}{bG}-\frac{G''}{bG'}+\frac{G''''}{bG'}\\&+\frac{6(a-b)G''^2}{b(a+b)GG'}+\frac{r(-2a+b)G'''}{b(a+b)G}=0.\end{aligned} \tag{7}$$

求解上述方程组,可以得到

$$u_0(x,t)=\int G'^{\frac{-a}{b}}\left(c+\frac{1}{b}\int G'^{\frac{a-b}{b}}(G''-G'''')\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x, \tag{8}$$

附带约束条件

$$\begin{aligned}&-a(a+b)\left(bc+\int G'^{\frac{a-b}{b}}(G''-G'''')\mathrm{d}x\right)G'^2\\&+bG'^{\frac{a}{b}}[(a+b)G'^2+3(a-b)G''^2\\&-2(2a-b)G'G''']=0.\end{aligned} \tag{9}$$

也就是说得到带约束条件(9)的(1+1)维广义的浅水波方程的变量分离解

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{12}{a+b}\frac{G'}{F+G}+\frac{t}{b}\\&+\int G'^{\frac{-a}{b}}\left(c+\frac{1}{b}\int G'^{\frac{a-b}{b}}(G''-G'''')\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{10}$$

这里的 $F\equiv F(t)$为任意函数, $G\equiv G(x)$需要满足约束条件(9). 当方程是完全可积的情形,也就是 $a=2b$ 或 $a=b$ 的时候,取积分常数 $c=0$,约束条件自然满足. 换句话说,对于 AKNS 方程(2),有精确解

$$u(x,t)=\frac{4}{b}\frac{G'}{F+G}+\frac{t}{b}+\frac{1}{2b}\int\left(1+\frac{G''^2}{G'^2}-\frac{2G'''}{G'}\right)\mathrm{d}x, \tag{11}$$

这里的 $F\equiv F(t)$和 $G\equiv G(x)$为任意函数. 同样地,对 Hirota-Satuma 方程(3),有精确解

$$u(x,t) = \frac{6}{b}\frac{G'}{F+G} + \frac{t}{b} + \frac{1}{b}\int\left(1-\frac{G'''}{G'}\right)\mathrm{d}t, \tag{12}$$

这里的 $F\equiv F(t)$和 $G\equiv G(x)$为任意函数. 当然,对于其他的情形,即不可积情形,如果取 $G(x)$为具体数值,例如 $G(x)=c_1\mathrm{e}^{c_0x}$,则约束条件也成立,即可以写出一类显式精确解

$$u(x,t) = \frac{12c_0c_1\mathrm{e}^{c_0x}}{(a+b)(c_1\mathrm{e}^{c_0x}+F)} + \frac{t}{b} + \frac{x-c_0^2t}{a}. \tag{13}$$

在下一小节里,讨论(1+1)维普适公式

$$U \equiv -\frac{a+b}{6}\left(u_t-\frac{1}{b}\right) = \frac{2F'G'}{(F+G)^2} \tag{14}$$

的孤子激发模式.

3. 孤子激发模式

对于(2+1)维非线性系统的普适公式 $U=\frac{2p_xq_y}{(p+q)^2}$,这里 $p\equiv p(x,t)$, $q\equiv q(y,t)$,已经构造出丰富的孤子激发模式(或更广义地局域激发模式)[17,18]. 对于(1+1)维的普适公式(14),仅有零星的结果(见文献[28]). 这里,我们给出单孤子解和几类新孤子激发模式,包括正-反孤子,孤子膨胀,类呼吸子,类瞬子等等.

3.1. 单孤子

选取函数 $F=\mathrm{e}^t$, $G=\mathrm{e}^x$ 从普适公式(14),可以得到单孤子(图 1)

$$U = \frac{2\mathrm{e}^{t+x}}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{x-t}{2}\right). \tag{15}$$

3.2. 正-反孤子

选取函数 $F=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}$, $G=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$,从普适公式(14),可以得到正-反孤子(图 2),从图 2(c)可以看到正-反孤子在 $t=0$ 时相互作用导致振幅消失为 0.

3.3. 孤子膨胀

选取函数 $F=\mathrm{e}^t$, $G=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{3x}$,从普适公式(14),可以得到孤子膨胀的激发模式,经过简单的数值计算,可以知道虽然该孤子激发模式的幅度膨胀了,但是其宽度缩小了. 其积分(即能量)不变(图 3).

3.4. 类呼吸子

如果选取的函数 F 包括一些周期函数,则从普适公式(14),可以构造出类呼吸子激发模式. 如选取 $F=\mathrm{e}^{\mathrm{sn}(t,0.7)}$, $G=\mathrm{e}^x$,得到图 4. 这里的 $\mathrm{sn}(t,0.7)$为 Jacobi 椭圆正弦函数.

3.5. 类瞬子

如果选取的函数 G 包括一些衰减函数,则从普适公式(14),可以构造出类瞬子激发模式. 如选取 $F=\mathrm{e}^t$, $G=\mathrm{e}^{x\mathrm{sech}(x)}$,得到图 5. 可以知道,该激发模式的幅度迅速衰减当$|t|$增长时.

4. 讨　论

本文研究(1+1)维广义的浅水波方程的精确解和孤子激发模式. 该方程包括两种完全可积(IST 可积)的特殊情况,分别为 AKNS 方程和 Hirota-Satsuma 方程. 首先把基于 Bäcklund 变换的变量分离(BT-VS)方法推广到该方程,得到了含有低维任意函数的变量分离解. 对于可积的情况,含有一个空间任意函数和一个时间任意函数,而对于不可积的情况,仅含有一个时间任意函数,其空间函数需要满足附加条件. 不过,这也说明了,对于不可积系统,并不是所有的低一维的函数都需要满足附加条件. 而对

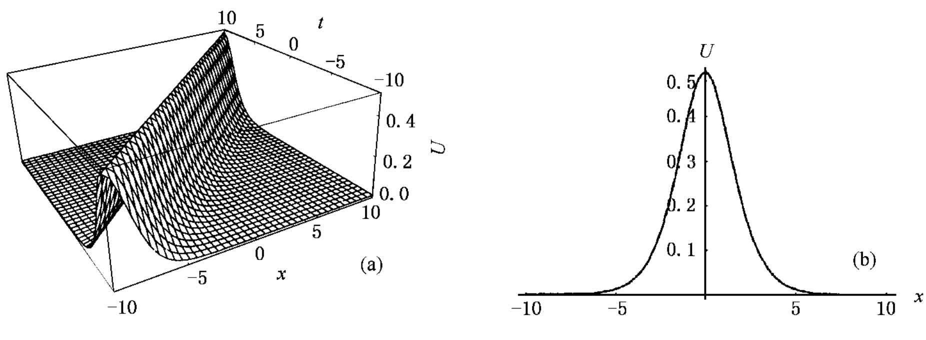

图 1　(a)单孤子;(b) $t=0$

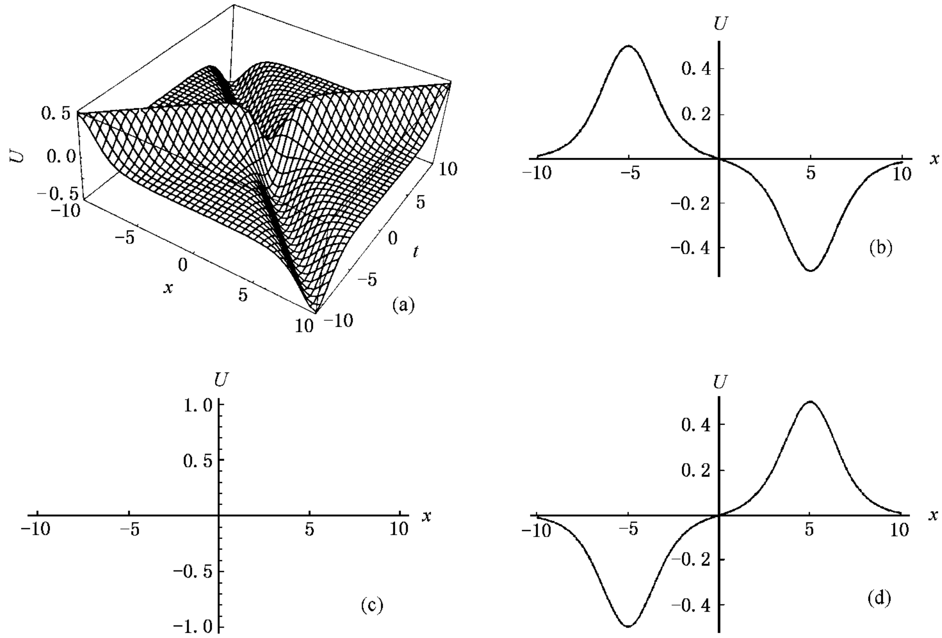

图 2　(a)正-反孤子;(b) $t = -5$;(c) $t = 0$;(d) $t = 5$

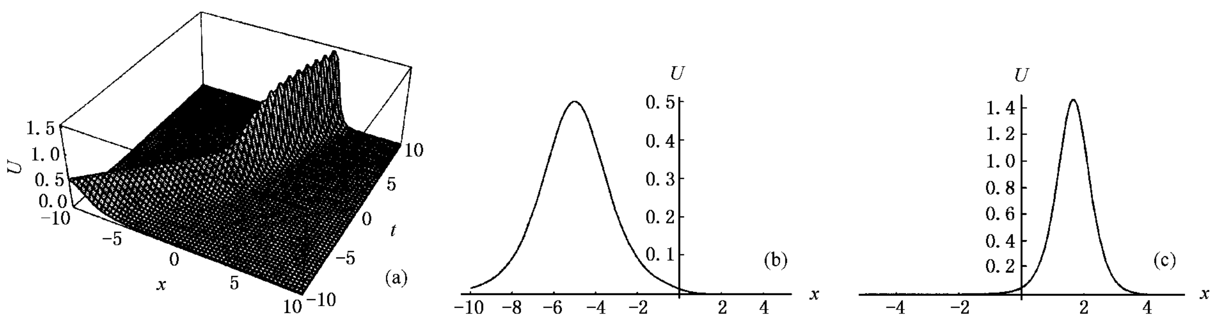

图 3　(a)孤子膨胀;(b) $t = -5$;(c) $t = 5$

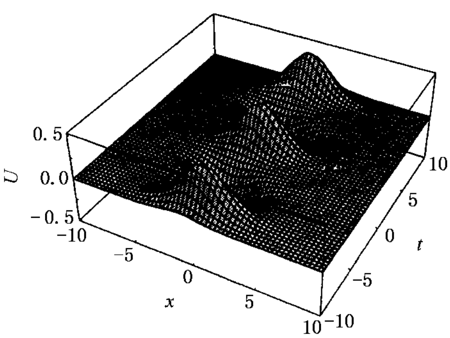

图 4　类呼吸子

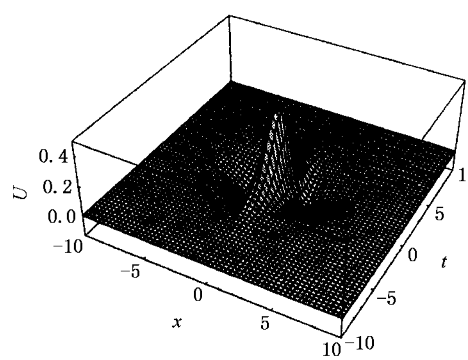

图 5　类瞬子

于主控函数 $G(x)$是否所有不可积系统均需要附加条件有待进一步研究. 另外,对于得到的(1 + 1)维普适公式,选取合适的函数,构造了丰富的孤子激发模式,包括单孤子,正-反孤子,孤子膨胀,类呼吸子,类瞬子等等.

这里,我们把 BT-VS 方法推广应用于(1 + 1)维

非线性方程. 该方程是现成的,具有一维空间,一维时间的物理意义. 事实上,如果一个高维非线性系统是 BT-VS 可解的,那么利用对称约化的方法可以寻找大量 BT-VS 可解的低维非线性系统,尽管对某些约化子系统在现在看来并不能描述某种物理现象. 例如(2+1)维 NNV 系统

$$u_t + u_{xxx} + u_{yyy} + u_x + u_y = 3(uv)_x + 3(uw)_y, \tag{16}$$

$$u_x = u_y, \tag{17}$$

$$u_y = w_x. \tag{18}$$

有 BT-VS 精确解

$$u = \frac{2p_x q_y}{(p+q)^2}, \tag{19}$$

$$v = -2\left(\frac{p_{xx}}{p+q} - \left(\frac{p_x}{p+q}\right)^2\right) + \frac{p_{xxx} + p_t + p_x + e_0 + e_1 p + e_2 p^2}{3p_x}, \tag{20}$$

$$w = -2\left(\frac{q_{yy}}{p+q} - \left(\frac{q_y}{p+q}\right)^2\right) + \frac{q_{yyy} + q_t + q_y - e_0 + e_1 q + e_2 q^2}{3q_y}, \tag{21}$$

这里 $p \equiv p(x,t), q \equiv q(y,t), e_i \equiv e_i(t), i = 0,1,2$ 是任意的. 如果取相似变量和解的相似形式[34]为

$$\xi = \frac{x}{f^{1/3}(t)} - \int^t \frac{g(\tilde{t})}{f^{4/3}(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t}, \tag{22}$$

$$\eta = \frac{y}{f^{1/3}(t)} - \int^t \frac{h(\tilde{t})}{f^{4/3}(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t}, \tag{23}$$

$$F = uf^{2/3}(t), \tag{24}$$

$$G = vf^{2/3}(t) - \frac{1}{3}f^{2/3}(t) + \frac{1}{9}f'(t)\int^t \frac{g(\tilde{t})}{f^{4/3}(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t} + \frac{1}{9}\xi f'(t) + \frac{g(t)}{3f^{1/3}(t)}, \tag{25}$$

$$H = wf^{2/3}(t) - \frac{1}{3}f^{2/3}(t) + \frac{1}{9}f'(t)\int^t \frac{h(\tilde{t})}{f^{4/3}(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t} + \frac{1}{9}\eta f'(t) + \frac{h(t)}{3f^{1/3}(t)}, \tag{26}$$

这里 $f(t) \neq 0, g(t) \neq 0, h(t) \neq 0$,且 F, G, H 是变量 ξ, η 的函数. 可得如下的二维非线性系统,

$$F_{\xi\xi\xi} + F_{\eta\eta\eta} - 3(GF)_\xi - 3(FH)_\eta = 0, \tag{27}$$

$$F_\xi = G_\eta, \tag{28}$$

$$F_\eta = H_\xi. \tag{29}$$

该系统也是 BT-VS 可解的,即具有如下的 BT-VS 解,

$$F = \frac{2P'Q'}{(P+Q)^2}, \tag{30}$$

$$G = -2\left(\frac{P''}{P+Q} - \left(\frac{P'}{P+Q}\right)^2\right) + \frac{P''' + d_0 + d_1 P + d_2 P^2}{3P'}, \tag{31}$$

$$H = -2\left(\frac{Q''}{P+Q} - \left(\frac{Q'}{P+Q}\right)^2\right) + \frac{Q''' - d_0 + d_1 Q - d_2 Q^2}{3Q'}, \tag{32}$$

这里 $P \equiv P(\xi), Q \equiv Q(\eta)$ 是任意的函数且 d_0, d_1, d_2 为任意的常数. 类似地,可以检验其他的约化子系统.

另外,对于(2+1)维情形,通常,对于 $q(y,t)$ 有如下的形式[35]:

$$q(y,t) = \frac{A_1(t)}{A_2(t) + F_1(y)} + A_3(t), \tag{33}$$

和

$$q(y,t) = B_1(t)\tanh[B_2(t) + F_2(y)] + B_3(t), \tag{34}$$

考虑到函数的任意性,以上两个式子是等价的,无需分开讨论. 因为从(34)式中,令

$$\tilde{F}_1(y) = \tanh F_2(y),$$

$$\tilde{A}_1(t) = B_1(t) + \frac{B_3(t)}{\tanh B_2(t)},$$

$$\tilde{A}_2(t) = \frac{1}{\tanh B_2(t)},$$

$$\tilde{A}_3(t) = \frac{B_1(t)}{\tanh B_2(t)} + B_3(t), \tag{35}$$

即可得(33)式.

变量分离方法的一种发展是基于 Darboux 变换的多线性变量分离(DT-VS)方法[21,22],该方法也可以推广应用于(1+1)维 Hirota-Satsuma 方程(3). 限于篇幅,略.

最后,关于 BT-VS 方法[37—40],一方面,从非标准的 WTC-Painlevé 截断[36]入手可能得到新的结果. 另外,从流形的观点(几何理论的观点)看对称,变换,BT-VS 之间的关系也有待进一步研究.

[1] Zabusky N J，Kruskal M D 1965 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **15** 240

[2] Chen L J，Liang C H 1997 *Soliton theary and its application* (Xidian University Press) (in Chinese) [陈陆君、梁昌洪 1997 孤立子理论及其应用——光孤子理论及光孤子通信(西安电子科技大学出版社)]

[3] Russell J S 1844 "Report on waves", Report of the 14th meeting of British Association for the Advancement of Science，John Murray，London，311

[4] Korteweg D J，de Vries G 1895 On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal，and on a new type of long stationary waves，*Phil*. *Mag*. **39** 422

[5] Gardner C S，Greene J M，Kruskal M D，Miura R M 1967 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **19** 1095

[6] Lax P D 1968 *Commu*. *Pure Appl*. *Math*. **21** 467

[7] Zakharov V E，Shabat A B 1972 *Soviet Phys*. *JEPT* **34** 62

[8] Scott A C，Chu F V F，McLaughlin D 1973 *Proc*. *IEEE* **61** 1473

[9] Bishop A R 1979 *Phys*. *Scripta* **20** 409

[10] Krumhansl J A，Schrieffer J R 1975 *Phys*. *Rev*. B **11** 3535

[11] Pang X F 2003 *Soliton Physics* (Sichuan Publishing House of Science & Technology) (in Chinese) [庞小峰 2003 孤子物理学(四川科学技术出版社)]

[12] Boiti M，Leon J J P，Martina L，Pempinelli F 1988 *Phys*. *Lett*. A **132** 432

[13] Hietarinta J，Hirota R 1990 *Phys*. *Lett*. A **145** 237

[14] Kawahara T，Araki K 1992 *S*. *Toh*，*Phys*. D **59** 79

[15] Pathria D，Morris J L 1989 *Phys*. *Scripta* **39** 673

[16] Santini P M 1990 *Phys*. D **41** 26

[17] Lou S Y 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 94

[18] Tang X Y，Lou S Y，Zhang Y 2002 *Phys*. *Rev*. E **66** 046601

[19] Lou S Y 2003 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **36** 3877

[20] Tang X Y，Lou S Y 2003 *J*. *Math*. *Phys*. **44** 4000

[21] Hu H C，Lou S Y，Liu Q P 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 1413

[22] Hu H C，Tang X Y，Lou S Y，Liu Q P 2004 *Chaos*，*Soltions and Fractals* **22** 327

[23] Zhang S L，Lou S Y，Qu C Z 2003 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **36** 12223

[24] Zhang S L，Lou S Y 2004 *Physica* A **335** 430

[25] Ying J P，Lou S Y 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 1448

[26] Shen S F，Zhang J，Pan Z L 2005 *Commu*. *Theor*. *Phys*. **43** 389

[27] Shen S F，*Commu*. *Theor*. *Phys*. submitted

[28] Shen S F，Zhang J，Pan Z L 2005 *Phys*. *Lett*. A **339** 52

[29] Shen S F，*Commu*. *Theor*. *Phys*. submitted

[30] Shen S F，*Commu*. *Theor*. *Phys*. submitted

[31] Tang X Y 2004 Localized excitations and symmetries of (2+1)-dimensional nonlinear systems (Dissertation of Shanghai Jiaotong University) (in Chinese) [唐晓艳 2004 (2+1) 维非线性系统的局域激发和对称性研究,上海交通大学博士论文]

[32] Clarkson P A，Mansfield E L 1994 *Nonlinearity* **7** 975

[33] Weiss J，Tabor M，Carnevale G 1983 *J*. *Math*. *Phys*. **24** 522

[34] Lakshmanan M，Senthil Velan M 1996 *J*. *Nonl*. *Math*. *Phys*. **3** 24

[35] Qian X M，Lou S Y，Hu X B 2004 *Z*. *Naturforsch*. A **59** 645

[36] Lou S Y 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1937 (in Chinese) [楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937]

[37] Shen S F 2005 Some studies of nonlinear systems (Dissertation of Zhejiang University) (in Chinese) [沈守枫 2005 非线性系统若干问题研究,浙江大学博士论文]

[38] Lou S Y 1997 *Chin*. *Phys*. **6** 561

[39] Lou S Y 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1657 (in Chinese) [楼森岳 2000 物理学报 **49** 1657]

[40] Lin J，Wang K L 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 13 (in Chinese) [林机、汪克林 2001 物理学报 **50** 13]

Variable separation solution and soliton excitations of the (1 + 1)-dimensional generalised shallow water wave equation

Shen Shou-Feng

(*Department of Mathematics*, *Zhejiang University of Technology*, *Hangzhou* 310014, *China*)

(Received 2 August 2005; revised manuscript received 25 August 2005)

Abstract

In this paper, variable separation solution and soliton excitations of the (1 + 1)-dimensional generalised shallow water wave equation are obtained. This equation includes two special cases which are completely integrable (IST integrable): the AKNS equation and the Hirota-Satsuma equation. Firstly, the variable separation (BT-VS) method based on the Bäcklund transformation is extended to this eqaution for deriving VS solutions which include some low dimensional arbitrary functions. In the integrable cases, a space arbitrary function and a time arbitrary function are included. But in the other cases only a time arbitrary function is included and the space function needs to satisfy a specific condition. In addition, for the (1 + 1)-dimensional universal formula, abundant soliton excitations can be constructed, such as one-soliton, bell-anti-bell soltion, soliton expansion, breather-like, instaton-like. Finally, some discusions are made about the VT-VS method.

Keywords: shallow water wave equation, Bäcklund transformation, variable separation, soliton

PACC: 0340