第 55 卷 第 3 期 2006 年 3 月
1000-3290/2006/55(03)/1029-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.3, March, 2006

考虑量子效应的 Zakharov 方程组的孤波解*

王悦悦 杨 琴 戴朝卿 张解放†

(浙江师范大学非线性物理研究所,金华 321004)

(2005 年 5 月 11 日收到;2005 年 6 月 22 日收到修改稿)

借助 Maple 程序,利用扩展的双曲函数法和双函数法求解了考虑量子效应的 Zakharov 方程组,得到了多种孤波解,其中包括亮孤波解、W 型孤波解、M 型孤波解和奇性孤波解.

关键词:量子效应, Zakharov 方程组, 扩展的双曲函数法, 孤波解

PACC:0340K, 5235S, 4735

1. 引 言

在经典层次中,Zakharov 提出了一系列非线性耦合波方程来描述高频朗缪尔波和低频等离子体波之间的非线性相互作用. 自那时起,这个系统就成为人们研究的热门课题. Zakharov 方程被认为是描述非线性系统中低频波与高频波耦合的最完善的模型之一,它是等离子体物理中的重要方程组,其中高频模与低频模分别描述电子声波和离子声波. 例如具有大温度比的等离子中的长波朗缪尔湍动通常就由该方程描述. 在等离子物理中,孤子的动力学问题总是人们感兴趣的话题. 因此,许多人都致力于研究 Zakharov 方程的孤波解. 目前研究表明,多维空间情况下的 Zakharov 方程的解析解很难求得,此外,数值计算结果表明,包络形孤波在多维空间中传播是不稳定的,孤波要逐步变窄,出现朗缪尔坍缩现象,所以人们只研究一维情况下的 Zakharov 方程的孤波解[1]. 一维情况下经典的 Zakharov 方程组可写为

$$\mathrm{i}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=nE,$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2}, \tag{1}$$

其中 E 代表电场强度的慢变振幅的包络波解,n 代表粒子数密度扰动. 文献[2—4]已经求解了该方程组,并获得了多种孤波解. 其中包括亮、暗孤波解,奇性孤波解,扭结状孤波解.

然而经典的 Zakharov 方程(1)没有考虑到量子效应. 而量子效应的重要性体现在很多领域,例如空间等离子体、激光等离子体以及超小电子设备等领域. 这使得人们对研究经典等离子物理现象的相应的量子部分越来越感兴趣. 从而量子等离子回声[5],量子电子气在真空中的膨胀[6],双流或三束量子流的不稳定性[7],等离子半导体中的量子流体动力学(QHD)模型[8],以及量子朗道阻尼[9]等问题都成为目前的研究课题. 通常在以下三种情况下需要考虑到量子效应:1)朗道长度 $l=e^2/kT$ 和热波长达到相同量级的情况,即 $l/\lambda\leqslant 1$;2)$\hbar\Omega>kT$ 的情况;3)当等离子微粒存在简并,即 $n\lambda^3>1$ 的情况(其中 n 为密度). 由于量子效应的重要性,人们开始对经典物理模型进行修改,做了不少工作. 例如,提出了一些量子方法(如 Wigner-Moyal 变换)来处理经典的部分非相干朗缪尔波的朗道阻尼问题[10]. 为带电粒子系统建立的量子流体动力学模型也被 Manfredi 和 Haas 用来成功地描述量子耗散问题[11]. 此外,在量子离子声波的线性、弱非线性和完全非线性波中[8],人们已经观察到了一些纯量子引起的特征. 根据对应原理,线性量子离子声波可以用色散关系来描述,而这种色散关系在量子效应趋于零时和经典色散关系相一致. 弱非线性量子离子声波可以由依赖于 $\hbar$ 参数的修正的 KdV 方程来描述. 完全非线性量子离子声波具有经典模型中不存在相干周期性的斑图. 可见,考虑到量子效应,用经典模型描述是不够的,

* 浙江自然科学基金(批准号:100039)资助的课题.

† E-mail:jf_zhang@mail.zjnu.net.cn

因此经典的一维 Zakharov 方程需要被修改.

由于在流体描述中朗缪尔波的朗道阻尼被忽略,所以经典的一维 Zakharov 方程被条件 $\kappa \ll \kappa_D$ 所约束,这里 κ 是波数,κ_D 是德拜波数,而且弱湍流条件也需要被满足. 文献[12]在只考虑量子衍射效应(如隧道效应),而未考虑量子统计效应的前提下,通过使用量子流体近似得到了如下修改的 Zakharov 方程组:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - H^2\frac{\partial^4 E}{\partial x^4} = nE,\\
&\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + H^2\frac{\partial^4 n}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中 n 为粒子数密度扰动,E 代表电场强度的慢变振幅包络波解,$H = \frac{\hbar\omega_i}{\kappa_B \Gamma_e}$衡量量子效应重要性的参数,表示了离子能量和电子热能的比例. $\omega_i = \left(\frac{n_0 e^2}{m_i \varepsilon_0}\right)^{1/2}$表示了离子频率. 由于量子效应中最主要的方面是衍射效应,因此文献[12]提出的物理模型已能很好地反映实际物理情形. 从方程(2)中可以看出考虑了量子效应后,方程比经典的 Zakharov 方程多了依赖参数 H 的四阶项 $-H^2E^{(4)}$ 和 $H^2n^{(4)}$,所以修改的 Zakharov 方程组(2)的孤波解可能与经典情况有所不同,也许能发现新的孤波解. 探讨其孤波解是有意义的. 目前有很多方法求解非线性方程,如 Hirota 方法[13]、Darboux 变换和 Backlund 变换[14]、扩展的 Tanh 函数法[15]、双函数法[16]、Jacobi 椭圆函数展开法[17]、分离变量法[18]、截断展开法[19]以及基于秩概念的求解方法[20]等. 对考虑了量子效应的 Zakharov 方程(2)还很少有人研究其孤波解. 本文利用扩展的双曲函数法和双函数法讨论了修改的 Zakharov 方程组(2)的孤波解并且成功地得到了亮孤波解、W 型孤波解、M 型孤波解和奇性孤波解. 其中 W 型和 M 型孤波解是新型的孤波解,这在经典情况下没有找到.

2. 行波法化简方程

在方程(2)中令

$$
\begin{aligned}
n &= n(\xi),\\
E &= \phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\\
\xi &= x - c_g t,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
&-H^2\phi^{(4)} + (6H^2k^2+1)\phi'' \\
&+ (\omega - H^2k^4 - k^2 - n)\phi = 0,\\
&\frac{(-c_g + 4H^2k^3 + 2k)}{4k}\phi' - 4kH^2\phi^{(3)} = 0,\\
&c_g^2 n'' - n'' + H^2 n^{(4)} = 2\phi\phi'' + 2\phi'^2,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

将方程(4)的第二式求导一次代入方程(4)的第一式化简得

$$
\begin{aligned}
&\frac{(c_g - 4H^2k^3 - 2k)}{4k}\phi'' + (6H^2k^2+1)\phi''\\
&+ (\omega - H^2k^4 - k^2 - n)\phi = 0,\\
&(c_g^2 - 1)n'' + H^2n^{(4)} = 2\phi\phi'' + 2\phi'^2.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

3. 利用双函数法求解

对于(5)式用双函数法求解,设

$$
\begin{aligned}
n(\xi) &= \sum_{i=1}^{m_1}\sinh^{i-1}\omega(b_i\sinh\omega + a_i\cosh\omega) + a_0,\\
\phi(\xi) &= \sum_{i=1}^{m_2}\sinh^{i-1}\omega(d_i\sinh\omega + c_i\cosh\omega) + c_0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

通过平衡方程的线性最高阶导数项和非线性项得 $m_1 = 2$,$m_2 = 2$,因而(6)式变为

$$
\begin{aligned}
n(\xi) &= b_2\sinh^2\omega + a_2\sinh\omega\cosh\omega\\
&\quad + b_1\sinh\omega + a_1\cosh\omega + a_0,\\
\phi(\xi) &= d_2\sinh^2\omega + c_2\sinh\omega\cosh\omega\\
&\quad + d_1\sinh\omega + c_1\cosh\omega + c_0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_1, d_2$ 为待定常数,令 ω 满足关系

$$
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sinh\omega,
$$

将其和(7)式一起代入(5)式,并令其中的常数项以及各次项的系数为零,则得到代数方程组. 利用吴消元法求得 $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_1, d_2$ 的值. 再由关系式 $\sinh\omega = -\mathrm{csch}\xi$,$\cosh\omega = -\coth\xi$,可得到 n 和 E 的孤波解.

第一组解为

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{60H^2k^3\mathrm{csch}^2\xi + 6k\,\mathrm{csch}^2\xi + 3\mathrm{csch}^2\xi\sqrt{-4H^2+1}}{2k},\\
E &= \frac{3\sqrt{k(20H^2k^3 + 2k + \sqrt{-4H^2+1})}H\mathrm{csch}^2\xi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}}{k};
\end{aligned}
\tag{8}
$$

第二组解为

$$n=\frac{60H^2k^3\operatorname{csch}^2\xi+6k\operatorname{csch}^2\xi+3\operatorname{csch}^2\xi\sqrt{4H^2+1}}{2k},$$

$$E=\frac{\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{4H^2+1}\right)}H\left(3\operatorname{csch}^2\xi+2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}}{k};\tag{9}$$

第三组解为

$$n=\frac{60H^2k^3\operatorname{csch}^2\xi+6k\operatorname{csch}^2\xi+3\operatorname{csch}^2\xi\sqrt{2H^2+1}}{2k},$$

$$E=\frac{3\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{2H^2+1}\right)}H\left(\operatorname{csch}\xi\coth\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}}{k};\tag{10}$$

第四组解为

$$n=\frac{1}{4k}\Big(60H^2k^3\operatorname{csch}^2\xi+6k\operatorname{csch}^2\xi+3\operatorname{csch}^2\xi\sqrt{H^2+1}\pm6k\operatorname{csch}\xi\coth\xi$$
$$\pm60H^2k^3\operatorname{csch}\xi\coth\xi\pm3\operatorname{csch}\xi\sqrt{1+H^2}\coth\xi\Big),$$

$$E=\frac{\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{H^2+1}\right)}H\left(3\operatorname{csch}^2\xi\pm3\operatorname{csch}\xi\coth\xi+1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}}{2k};\tag{11}$$

第五组解为

$$n=\frac{1}{4k}\Big(60H^2k^3\operatorname{csch}^2\xi+6k\operatorname{csch}^2\xi+3\operatorname{csch}^2\xi\sqrt{1-H^2}\pm6k\operatorname{csch}\xi\coth\xi$$
$$\pm60H^2k^3\operatorname{csch}\xi\coth\xi\pm3\operatorname{csch}\xi\sqrt{1-H^2}\coth\xi\Big),$$

$$E=\frac{3\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{1-H^2}\right)}H\operatorname{csch}\xi\left(\operatorname{csch}\xi\pm\coth\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}}{2k}.\tag{12}$$

由解(8)—(12)可以看出它们是奇性孤波解，这表明此时密度扰动 n 和电场强度的慢变振幅 E 由于不稳定而引起畸变. 只有稳定的孤波解才能在实验中被观察到，所以我们希望得到的是稳定的孤波解，于是我们用其他方法找其稳定的孤波解.

4. 用扩展的双曲函数求解

对(5)式用双曲函数法求解，设

$$n(\xi)=\sum_{i=0}^{m_1}a_if^i+\sum_{j=1}^{m_1}b_jf^{j-1}g,$$
$$\phi(\xi)=\sum_{i=0}^{m_2}c_if^i+\sum_{j=1}^{m_2}d_jf^{j-1}g,\tag{13}$$

其中 f,g 的形式解可以设为

$$f(\xi)=\frac{1}{\cosh\xi+r},\tag{14}$$

$$g(\xi)=\frac{\sinh\xi}{\cosh\xi+r},\tag{15}$$

也可以设为

$$f(\xi)=\frac{4}{5\cosh\xi+3\sinh\xi+4r},\tag{16}$$

$$g(\xi)=\frac{5\sinh\xi+3\cosh\xi}{5\cosh\xi+3\sinh\xi+4r},\tag{17}$$

m_1,m_2 通过平衡微分方程的最高阶导数项和非线性项来确定，得出 $m_1=2,m_2=2$，则(13)式变为

$$n(\xi)=a_0+a_1f+b_1g+a_2f^2+b_2fg,$$
$$\phi(\xi)=c_0+c_1f+d_1g+c_2f^2+d_2fg,\tag{18}$$

其中 $a_0,a_1,a_2,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,d_1,d_2$ 为待定常数，将(14)，(15)，(18)式代入(5)式并利用关系 $f'=-fg,g'=1-g^2-rf,g^2=1-2rf+(r^2-1)f^2$ 进行化简，令各次项的系数为零，得到代数方程组，利用吴消元法和 Maple 程序求解上述关于 $a_0,a_1,a_2,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,d_1,d_2$ 的超定代数方程组. 当 $r\neq0$ 时，通过 Maple 程序很难求得其解，为了方便研究，所以只考虑 $r=0$ 的情况，这不影响各物理量，从而解得 $a_0,a_1,a_2,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,d_1,d_2$ 的值，将其和方程(14)，(15)代回方程(18)和方程(3)即得 n 和 E 的孤波解.

第六组解为

$$n=-\frac{1}{2k\cosh^2\xi}\left(2k^3\cosh^2\xi+60H^2k^3+6k+3\sqrt{1+4H^2}-2\omega k\cosh^2\xi+2H^2k^5\cosh^2\xi\right),$$

$$E=-\frac{\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{1+4H^2}\right)}\left(-3+2\cosh^2\xi\right)H}{k\cosh^2\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{19}$$

其中满足关系 $c_g=\sqrt{1+4H^2}$；

第七组解为

$$n=-\frac{1}{2k\cosh^2\xi}\left(2k^3\cosh^2\xi+60H^2k^3+6k+3\sqrt{1-4H^2}-2\omega k\cosh^2\xi+2H^2k^5\cosh^2\xi\right.$$
$$\left.-40\cosh^2\xi H^2k^3-4k\cosh^2\xi-2\cosh^2\xi\sqrt{1-4H^2}\right),$$

$$E=3\frac{\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{1-4H^2}\right)}H}{k\cosh^2\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{20}$$

其中满足关系 $c_g=\sqrt{1-4H^2}$；

第八组解为

$$n=-\frac{1}{4k\cosh^2\xi}\left(4k^3\cosh^2\xi+120H^2k^3+12k-6\sqrt{1+2H^2}-4\omega k\cosh^2\xi+4H^2k^5\cosh^2\xi\right.$$
$$\left.-20\cosh^2\xi H^2k^3-2k\cosh^2\xi+\cosh^2\xi\sqrt{1+2H^2}\right),$$

$$E=3\frac{\sqrt{-k\left(20H^2k^3+2k-\sqrt{1+2H^2}\right)}H\sinh\xi}{k\cosh^2\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{21}$$

其中满足关系 $c_g=-\sqrt{1+2H^2}$.

同理，将(16)，(17)，(18)式代入(5)式并利用关系 $f'=-fg$，$g'=1-g^2-rf$，$g^2=1-2rf+(r^2-1)f^2$ 进行化简，令各项系数为零，得到代数方程组. 利用吴消元法和 Maple 程序求解上述关于 a_0，a_1，a_2，b_1，b_2，c_0，c_1，c_2，d_1，d_2 的超定代数方程组. 并令 $r=0$ 求得三组解.

第九组解为

$$n=-\frac{1}{k\left(34\cosh^2\xi+30\sinh\xi\cosh\xi-9\right)}\left(24\sqrt{4H^2+1}+480H^2k^3+34H^2k^5\cosh^2\xi+34k^3\cosh^2\xi-34\omega k\cosh^2\xi\right.$$
$$\left.+48k-9H^2k^5+9\omega k-9k^3+30H^2k^5\sinh\xi\cosh\xi-30\omega k\sinh\xi\cosh\xi+30k^3\sinh\xi\cosh\xi\right),$$

$$E=-\frac{2\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{1+4H^2}\right)}H\left(-33+34\cosh^2\xi+30\sinh\xi\cosh\xi\right)}{k\left(34\cosh^2\xi+30\sinh\xi\cosh\xi-9\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-wt)},\tag{22}$$

其中满足关系 $c_g=\sqrt{1+4H^2}$；

第十组解为

$$n=\frac{-1}{k\left(30\sinh\xi\cosh\xi+34\cosh^2\xi-9\right)}\left[66k+660H^2k^3-9k^3-9H^2k^5+9wk+\left(33-34\cosh^2\xi\right.\right.$$
$$\left.-30\sinh\xi\cosh\xi\right)\sqrt{1-4H^2}+\left(-68k-34wk-680H^2k^3+34K^3+34H^2k^5\right)\cosh^2\xi$$
$$\left.+\left(30H^2k^5-30wk+30k^3-600H^2k^3-60k\right)\sinh\xi\cosh\xi\right],$$

$$E=\frac{48\sqrt{k\left(20H^2k^3+2k+\sqrt{1-4H^2}\right)}H}{k\left(34\cosh^2\xi+30\sinh\xi\cosh\xi-9\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{23}$$

其中满足关系 $c_g=\sqrt{1-4H^2}$；

第十一组解为

$$n=\frac{1}{4k\left(30\sinh\xi\cosh\xi+34\cosh^2\xi-9\right)}\left[210k+\left(34\cosh^2\xi-105\right)\sqrt{1+2H^2}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(136H^2k^5-68k-680H^2k^3-136\omega k+136k^3\right)\cosh^2\xi+2100H^2k^3+36\omega k-36k^3\\
&-36H^2k^5+\left(120H^2k^5+120k^3-120\omega k-600H^2k^3-60k+30\sqrt{1+2H^2}\right)\sinh\xi\cosh\xi\Big],
\end{aligned}
$$

$$
E=\frac{3\sqrt{-k\left(20H^2k^3+2k-\sqrt{1+2H^2}\right)}\,H\left(3\cosh\xi+5\sin\xi\right)}{k\cosh\xi\left(5\cosh\xi+3\sinh\xi\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{24}
$$

其中满足关系 $c_g=-\sqrt{1+2H^2}$.

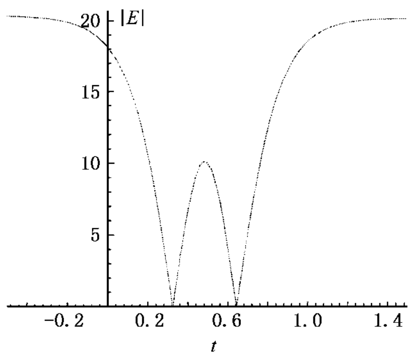

图 1　Left 解(19)中 $|E|$ 图(其中参数为 $H=2$，$k=0.2$)

至此我们得到了许多稳定的孤波解. 为了更形象的讨论问题，画出了几种典型的孤波解，即亮孤波解和 W 型孤波解以及 M 型孤波解. 图 2 为已被广泛研究的亮孤波解，图 1 和图 3 是两种新型孤波解. 图 1 为 W 型孤波解，该孤波描述了亮孤波和暗孤波的性质，当时间变量 $t\to\infty$，该孤波的振幅不为零. 图 3 为 M 型孤波解，该孤波描述了在有限宽背景下暗孤波的传播. 从解的形式分析得出，以上得到的孤波解(8)—(12)和(19)—(24)是由于量子效应 H 引起的，H 还影响了孤波传播的相速度(详见各解中的 c_g)以及振幅的大小. 若忽略 H，即 $H\to0$ 时，孤波消失($|E|\to0$)，因此无法退化为原 Zakharov 方程的相应解. 这是因为衡量量子效应的重要性的参数 H 修改了非线性和色散之间的平衡关系，而这个关系本质上决定了孤子的存在.

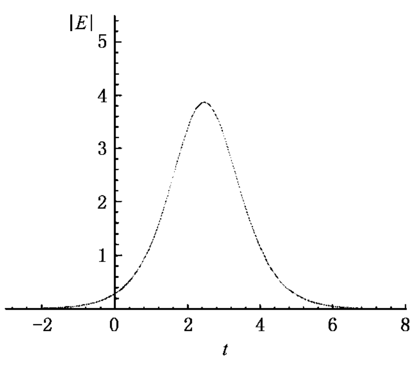

图 2　Left 解(20)中 $|E|$ 图(其中参数为 $H=0.3$，$k=3$)

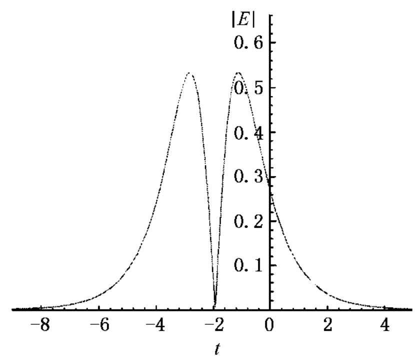

图 3　解(21)中 $|E|$ 图(其中参数为 $H=0.2$，$k=0.2$)

5. 结　　论

本文利用扩展的双曲函数法和双函数法，求得了考虑量子效应的 Zakharov 方程组的各种解. 其中包括奇性孤波解和孤波解. 孤波解分别有亮孤波解、W 型孤波解以及 M 型孤波解. 与经典 Zakharov 方程不同，在考虑了量子效应后的 Zakharov 方程中，由于 H 的影响，修改了原来的非线性和色散之间的平衡关系，从而产生了新的孤波解. 其中 W 型孤波解和 M 型孤波解是经典情况下没有的. 由此可见，考虑了量子效应后的 Zakharov 方程的孤波解有更丰富的形式. 若设定 r 的值不同(但 r 不能取 ±1)，得出的解基本上也是上述三种类型的孤波解. 显然，H 还影响了孤波的振幅和相速度的大小.

[1] Wang D Y，Wu D J，Hang G L 2000 *Solitary Waves in Space Plasma*（Shanghai：Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House）（in Chinese）[王德　、吴德金、黄光力 2000 空间等离子中的孤波(上海：上海科技教育出版社)]

[2] Zhu J M，Ma Z Y，Fang J P，Zheng C L，Zhang J F 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 798

[3] Zhao C H，Sheng Z M 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1629（in Chinese）[赵长海、盛正卯 2004 物理学报 **53** 1629]

[4] Huang D J，Zhang H Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2434（in Chinese）[黄定江、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]

[5] Manfredi G，Feix M R 1996 *Phys*. *Rev*. E **53** 6460

[6] Mola S，Manfredi G，Feix M R 1993 *J*. *Plasma Phys*. **50** 145

[7] Haas F，Manfredi G，Feix M R 2000 *Phys*. *Rev*. E **62** 2763

[8] Haas F，Garcia L G，Goedert J 2003 *Phys*. *Plasmas* **10** 3858

[9] Suh N，Feix M R，Bertrand P 1991 *J*. *Comput*. *Phys*. **94** 403

[10] Fedele R，Shukla P K，Onorato M，Anderson D，Lisak M 2002 *Phys*. *Lett*. A **303** 61

[11] Manfredi G，Haas F 2001 *Phys*. *Rev*. B **64** 075316

[12] Garcia L G，Haas F，de Oliveira L P L，Goedert J 2005 *Phys*. *Plasmas* **12** 012302

[13] Hirota R 1971 *Phys*. *Rev*. *Lett*. A **27** 1192

[14] Liu S K，Liu S D 2000 *Nonlinear Equation in Physics*（Beijing：Peking University Press）（in Chinese）[刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京：北京大学出版社)]

[15] Li D S，Zhang H Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1635（in Chinese）[李德生、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 1635]

[16] Hang W H，Zhang J F，Sheng Z M 2003 *J*. *Zhejiang Univ*. **30** 145（in Chinese）[黄文华、张解放、盛正卯 2003 浙江大学学报 **30** 145]

[17] Liu S D，Fu Z T，Liu S K，Zhao Q *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718（in Chinese）[刘式达、傅遵涛、刘式适、赵　强 2002 物理学报 **51** 718]

[18] Ruan H Y，Chen Y X 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1314（in Chinese）[阮航宇、陈一新 2003 物理学报 **52** 1314]

[19] Zhang J F，Chen F Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1648（in Chinese）[张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]

[20] Feng X 2000 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 207

Solitary wave solution of Zakharov equation with quantum effect*

Wang Yue-Yue　Yang Qin　Dai Chao-Qing　Zhang Jie-Fang

（*Institute of Nonlinear Physics*，*Zhejiang Normal University*，*Jinhua* 321004，*China*）

（Received 11 May 2005；revised manuscript received 22 June 2005）

Abstract

With the help of Maple procedure，the Zakharov equation，which takes the quantum effect into account，is solved by means of extended tanh-function method and bifunction method. Several solitary wave solutions are obtained，including bright soliton，W-shaped soliton，M-shaped soliton and singular solutions.

Keywords：quantum effect，Zakharov equations，extended tanh-function method，solitary wave solutions

PACC：0340K，5235S，4735

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province，China（Grant No. 100039）.