

利用随机相位实现 Duffing 系统的混沌控制*

李 爽† 徐 伟 李瑞红

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)
(2005 年 4 月 8 日收到, 2005 年 8 月 25 日收到修改稿)

基于线性随机系统 Khasminskii 球面坐标变换, 计算了谐和激励中含有随机相位的 Duffing 方程的最大 Lyapunov 指数. 依据平均最大 Lyapunov 指数符号的变化, 分析随机相位对非线性系统动力学行为的影响. 说明随机相位可以产生混沌亦可抑制混沌, 从而可以作为混沌控制的一种方法. 结合对相图、Poincaré 截面、时间历程图的分析, 说明上述方法是有效的.

关键词: 随机相位, 混沌控制, 最大 Lyapunov 指数, Poincaré 截面

PACC: 0545

1. 引 言

十几年来, 混沌控制的研究越来越受到人们的关注, 已成为非线性科学领域的热点之一. 自 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出混沌控制的方法(OGY 法)^[1]以来, 国内外学者陆续提出了多种混沌控制方法, 目前主要分为两类: 反馈控制和非反馈控制. 反馈法^[1-5]利用混沌系统的特点, 即对初始条件的敏感性, 稳定某个已经存在系统中的不稳定周期轨道. 而非反馈法^[6-9]利用一个外部周期激励或对系统变量的周期调节来消除混沌. 由于噪声在实际工程环境中广泛存在, 因此研究噪声对系统的影响就很重要. Ramesh 和 Narayanan^[10]讨论了在服从均匀分布噪声环境中几种非反馈方法的混沌控制. Liu 等^[11]研究了有界噪声参激下 Duffing 振子的混沌运动. Wei 等^[12]研究了白噪声对 Duffing 系统动力学行为的影响. 这些研究表明在一定条件下噪声可以增大混沌的阈值亦可减小混沌的阈值, 从而可以进行混沌控制. 1995 年 Qu 和 Hu 等^[13]发现相位对混沌的控制作用. 最近 Lei^[14]和 Xu^[15]将随机相位应用到混沌控制之中.

本文基于人们对混沌控制的认识^[16]: 1) 混沌有害时, 成功地抑制混沌. 2) 混沌有用时, 产生或加

强系统的混沌. 研究了随机相位对两类 Duffing 系统动力学行为的影响, 表明可以利用随机相位实现对这两类系统的混沌控制. 由于 Lyapunov 指数是刻画混沌的重要指标, 运用线性随机系统 Khasminskii 球面坐标变换公式^[17]和 Wedig 的算法^[18]计算系统的最大 Lyapunov 指数. 进而根据平均最大 Lyapunov 指数符号的改变确定混沌的消失或产生. 结合相图、Poincaré 截面及时间历程图的演化, 证实利用随机相位进行混沌控制是可行的.

2. 抑制混沌

2.1. 考虑著名的 Duffing 方程

$$\ddot{x} - x + \alpha x + x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1)$$

等价于

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - \alpha x_2 + \gamma \cos(\omega t), \end{cases} \quad (2)$$

其线性化方程为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (1 - 3x_1^2)y_1 - \alpha y_2. \end{cases} \quad (3)$$

定义最大 Lyapunov 指数为^[19]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|Y(t)\|}{\|Y(0)\|} \quad \text{其中 } \|Y(t)\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (4)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10472091 和 10332030), 陕西省自然科学基金(批准号: 2003A03)及西北工业大学创业种子基金(批准号: Z200572)资助的课题.

† E-mail: lishuang@mail.nwpu.edu.cn

利用四阶龙格库塔法同时求解方程(2)(3),即

可得到上述 λ 的值.

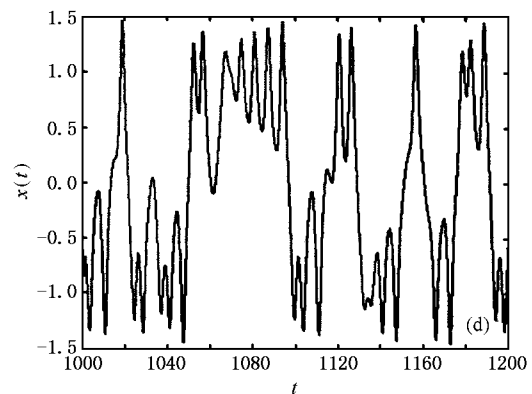
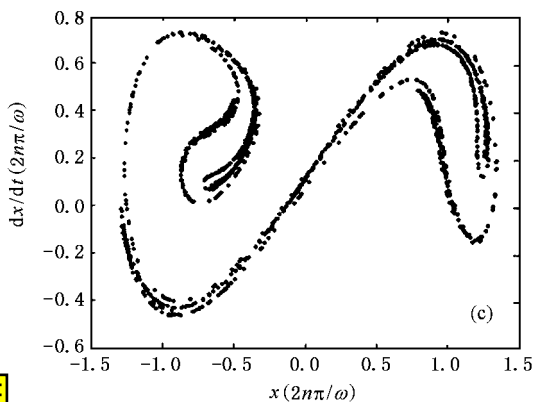
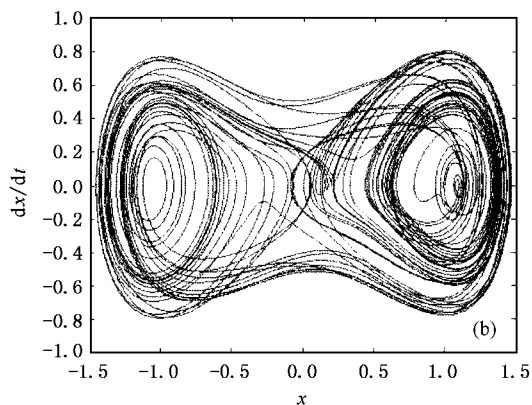
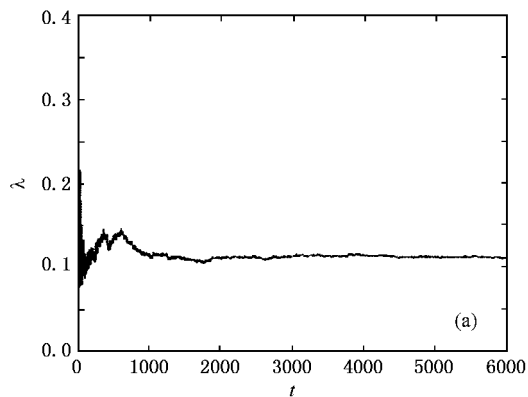


图 1 (a)最大 Lyapunov 指数随时间变化曲线;(b)系统(1)的相图(c)系统(1)的 Poincaré 截面;(d)系统(1)的时间历程图

取参数 $\alpha = 0.25, \gamma = 0.27, \omega = 1.0$. 以 $x(0) = 1.0, \dot{x}(0) = 0.0$ 为初值,得到系统最大 Lyapunov 指数随时间变化曲线如图 1(a)所示, λ 的值为正($\lambda \approx 0.112$),表明系统是混沌的. 为证实这一点,图 1(b)–(d)分别给出了系统的相轨、Poincaré 截面及时间历程图.

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (7) \text{式变为}$$

$$\dot{Y} = [A + F(t)]Y. \quad (8)$$

最大 Lyapunov 指数定义为^[12]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|Y(t)\| \quad \text{其中 } \|Y(t)\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (9)$$

下面运用 Wedig^[18]引入的 Khasminskii 球面坐标变换方法计算上述的 λ .

令

$$s_i = \frac{y_i}{a}, \quad i = 1, 2, \quad a = \|Y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad (10)$$

则有

$$s'_i = \sum_j [A_{ij} - m(t)\delta_{ij} + (f_{ij} - n(t)\delta_{ij})]s_j, \quad (11)$$

$$\text{其中 } m(t) = \sum_{k,l} A_{kl}s_k s_l, \quad n(t) = \sum_{k,l} f_{kl}s_k s_l, \quad \delta_{ij} = 1 \quad (i = j), \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

2.2. 考虑(1)式中带有随机相位的情况

$$\ddot{x} - x + \alpha\dot{x} + x^3 = \gamma \cos(\omega t + \sigma \xi(t)), \quad (5)$$

这里 $\xi(t)$ 为标准 Gauss 白噪声, σ 为其强度. $\xi(t)$ 满足: $E\xi(t) = 0, E\xi(t)\xi(t + \tau) = \delta(\tau), \delta(\tau)$ 为 Dirac-Delta 函数.

方程(5)改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - \alpha x_2 + \gamma \cos(\omega t + \sigma \xi(t)). \end{cases} \quad (6)$$

(6)式的线性化方程为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (1 - 3x_1^2)y_1 - \alpha y_2. \end{cases} \quad (7)$$

且有

$$a' = [m(t) + n(t)]a. \quad (12)$$

从而,系统的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log a = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [m(\tau) + n(\tau)] d\tau. \quad (13)$$

实际计算时,步长设为 Δt , 则(13)式右端可化为

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} [m(\tau) + n(\tau)] d\tau. \quad (14)$$

取充分大的 N , 在 Δt 较小时,运用微积分知识(14)式可简化为

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [m(t_i) + n(t_i)]. \quad (15)$$

方程(6)与(7)同时求解并且结合(10)–(15)式,即可得到 λ 的值. 考虑到随机因素的影响,文中数值模拟多次(50次)求得平均最大 Lyapunov 指数随噪声强度变化曲线,如图2所示.白噪声的模拟采用了文献[20].

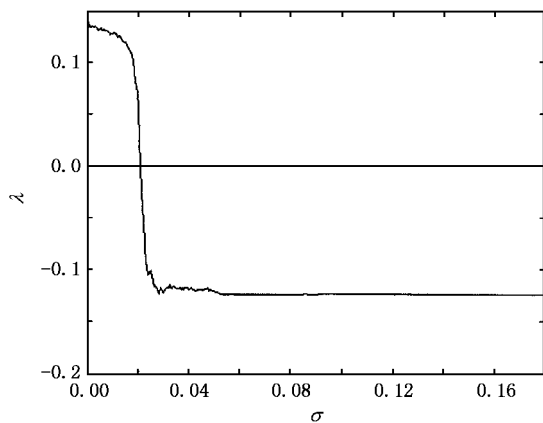


图2 平均最大 Lyapunov 指数随噪声强度变化的曲线

从图2可知,在 σ 小于临界值 $\sigma_c = 0.0215$ 时,平均最大 Lyapunov 指数 λ 始终为正,当 $\sigma_c = 0.0215$ 时, λ 突然由正变为负,说明系统由混沌状态转变为稳定状态, $\sigma \geq 0.024$ 时,增大噪声的强度, λ 的值变化不大. 因此可用 $\sigma \in (\sigma_c, 0.18)$ 的参数范围对原系统进行混沌控制.

图3给出了 $\sigma = 0.025$ 时系统的相图、Poincaré 截面、时间历程图. 从图中可知原来($\sigma = 0.0$ 时)混乱的相轨成为了一圆环, Poincaré 截面上由混沌吸引子变为了稳定的(随机)吸引子,时间历程很规则. 这说明增大噪声强度后,原来的混沌吸引子得到了控制.

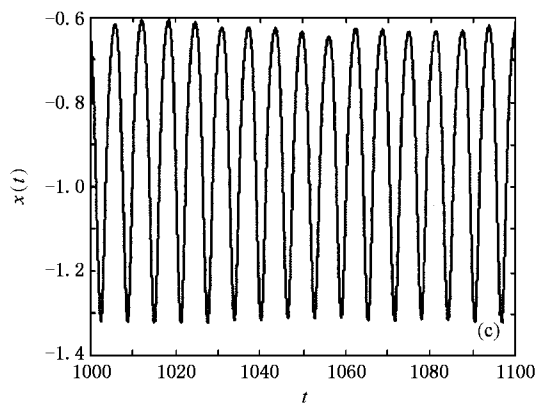
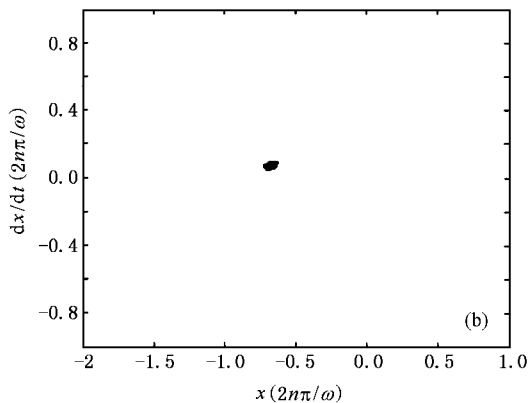
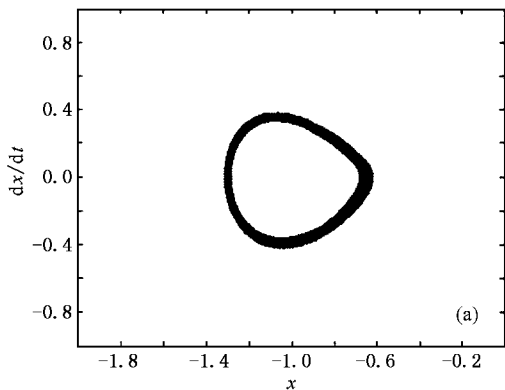


图3 (a) $\sigma = 0.025$ 时系统的相图 (b) $\sigma = 0.025$ 时系统的 Poincaré 截面 (c) $\sigma = 0.025$ 时系统的时间历程图

3. 产生混沌

3.1. 考虑受双谐和外力作用的 Duffing 系统

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x^3 = f_1 \sin(\omega_1 t) + f_2 \sin(\omega_2 t), \quad (16)$$

其中 b 为系统的阻尼系数, f_1, f_2 分别为外力的强度, ω_1, ω_2 为其频率.

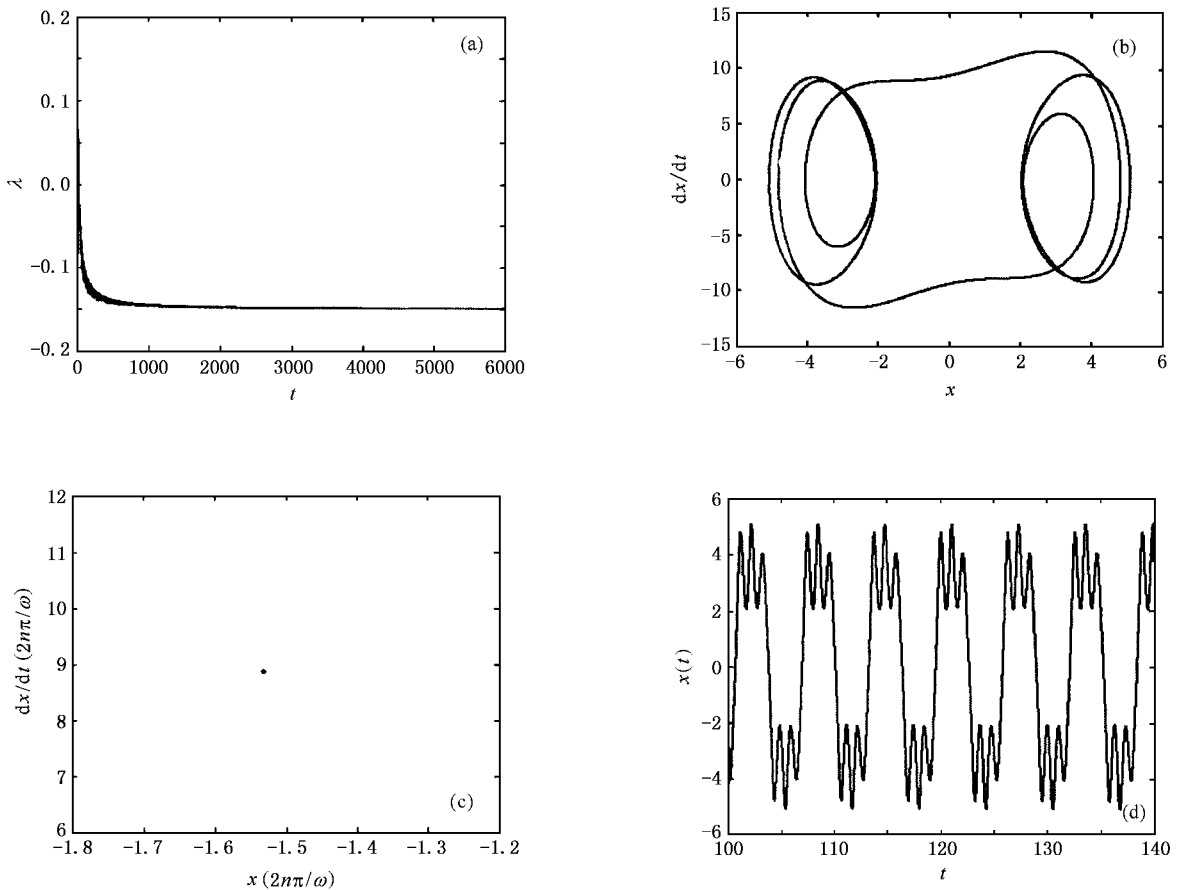


图4 (a)最大 Lyapunov 指数随时间变化曲线 (b)系统 (16)的相图 (c)系统 (16)的 Poincaré 截面 (d)系统 (16)的时间历程图

取参数 $b = 0.3$, $f_1 = 49$, $f_2 = 7$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$. 以 $x(0) = 1.0$, $\dot{x}(0) = 0.0$ 为初值, 根据 2.1 计算最大 Lyapunov 指数的方法, 得到系统最大 Lyapunov 指数随时间变化的曲线, 如图 4(a) 所示, λ 的值为负 ($\lambda \cong -0.149$). 系统的相轨、Poincaré 截面及时间历程图如图 4(b)–(d) 所示. 可见此时系统处于规则的周期状态.

3.2. 考虑随机相位对 (16) 式的影响

$$\ddot{x} + bx + x^3 = f_1 \sin(\omega_1 t) + f_2 \sin(\omega_2 t + \sigma \xi(t)), \quad (17)$$

$\xi(t)$ 为标准 Gauss 白噪声, σ 为噪声强度.

(17) 式改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -bx_2 - x_1^3 + f_1 \sin(\omega_1 t) + f_2 \sin(\omega_2 t + \sigma \xi(t)). \end{cases} \quad (18)$$

其线性化系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -by_2 - 3x_1^2 y_1. \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

(19) 式变为

$$\dot{Y} = [A + F(t)]Y. \quad (20)$$

系统最大 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|Y(t)\| \quad \text{其中 } \|Y(t)\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (21)$$

利用 Khasminskii 球面坐标变换, 根据 (10)–(15) 式的讨论, 在上述相同的参数、初值条件下得到系统平均最大 Lyapunov 指数与随机相位强度的关系如图 5 所示.

由图 5 可知, 在 σ 小于临界值 $\sigma_c = 0.050$ 时, 平均最大 Lyapunov 指数 λ 为负, 当 $\sigma_c = 0.050$ 时, λ 突然由负变为正, 说明系统由稳定状态转变为混沌状

态 随后 λ 迅速增加, $\sigma \geq 0.071$ 时, λ 的值略有减小. 因此可用 $\sigma \in (\sigma_c, 0.2]$ 的参数范围对原系统诱发混沌.

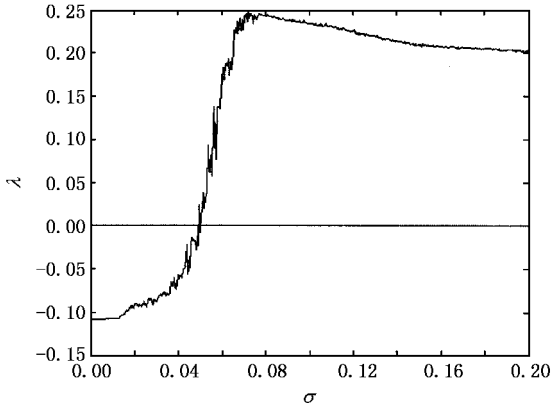


图 5 平均最大 Lyapunov 指数 λ 随噪声强度 σ 演化的曲线

为检查控制效果, 图 6 给出了 $\sigma = 0.08$ 时系统的相图、Poincaré 截面、时间历程图, 与图 4 对比可以看出, 此时相轨混乱, Poincaré 截面上是随机的混沌吸引子, 时间历程没有规律, 说明此时系统为混沌运动.

4. 结 论

噪声在实际的物理、工程环境中广泛存在, 因此研究噪声对系统动力学行为的影响是很有意义的事情. 本文研究了随机相位在非反馈混沌控制中的调节作用. 对于两类 Duffing 系统, 随着其强度的增加, 随机相位可能导致两种不同的作用效果, 即控制住混沌或产生混沌, 说明了随机相位的扰动可能导致系统从有序转变为混沌, 也可使系统从混沌转变为有序. 另外, 文中随机相位都是在强度较小的情况下即可实现混沌控制, 这在实际中可节省大量的能量, 同时方便简单.

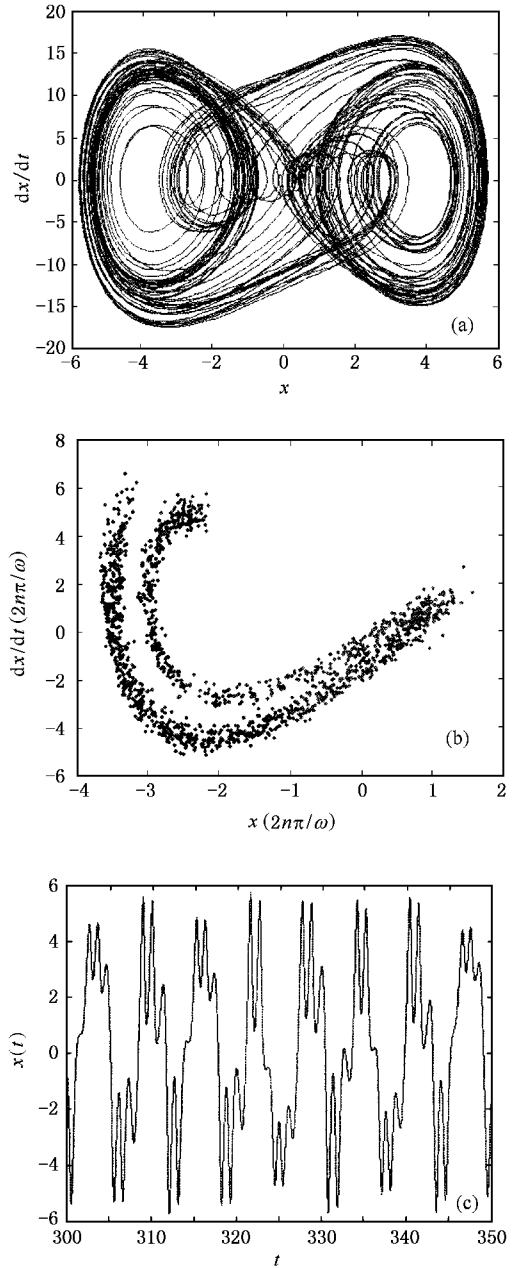


图 6 (a) $\sigma = 0.08$ 时系统的相图 (b) $\sigma = 0.08$ 时系统的 Poincaré 截面 (c) $\sigma = 0.08$ 时系统的时间历程图

[1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
 [2] Tong P Q 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 196 (in Chinese) 童培庆 1995 物理学报 **44** 196
 [3] Luo X S, Fang J Q, Kong L J et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1423 (in Chinese) 罗晓曙、方锦清、孔令江等 2000 物理学报 **49** 1423
 [4] Li L X, Peng H M, Lu H B et al 2001 *Chin. Phys.* **10** 796
 [5] Zhang J S 2001 *Chin. Phys.* **10** 97

[6] Braiman Y, Goldhirsch I 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2545
 [7] Lima R, Pettini M 1990 *Phys. Rev. A* **41** 726
 [8] Jackson E A 1991 *Phys. Rev. A* **44** 4839
 [9] Kapitaniak T 1991 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **1** 357
 [10] Ramesh M, Narayanan S 1999 *Chaos, Solitons & Fractals* **10** 1473
 [11] Liu W Y, Zhu W Q, Huang Z L 2001 *Chaos, Solitons & Fractals* **12** 527

- [12] Wei J G , Leng G 1997 *Appl. Math. Comput.* **88** 77 (in Chinese] 胡 岗、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制(上海 : 上海科技教育出版社)
- [13] Qu Z L , Hu G , Yang G J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1736
- [14] Lei Y M , Xu W , Xu Y , Fang T 2004 *Chaos , Solitons & Fractals* **21** 1175 [17] Khasminskii R Z 1967 *Theory Probability Appl.* **12** 44
- [15] Xu Y , Mahmoud G M , Xu W , Lei Y M 2005 *Chaos , Solitons & Fractals* **23** 265 [18] Wedig W V 1990 *Structural dynamics* (Rotterdam : Balkema) p141
- [16] Hu G , Xiao J H , Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) [19] Wolf A , Swift J , Swinney H , Vastano A 1985 *Physica D* **16** 285
- [20] Zhu W Q 1998 *Random Vibration* (Beijing : Science Press) (in Chinese] 朱位秋 1998 随机振动(北京 : 科学出版社)

Chaos control of Duffing systems by random phase^{*}

Li Shuang[†] Xu Wei Li Rui-Hong

(Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi ' an 710072 , China)

(Received 8 April 2005 ; revised manuscript received 25 August 2005)

Abstract

In this paper , the effect of random phase for Duffing systems is investigated. We show that random phase can generate chaos or suppress chaos by the average of top Lyapunov exponent , which is computed based on Khasminskii ' s spherical coordinate formulation for linear stochastic systems. In addition , phase portraits , Poincaré surface of section and time evolution are studied to confirm the obtained results. Both methods lead to fully consistent results.

Keywords : random phase , chaos control , the top Lyapunov exponent , Poincaré surface of section

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091 and 10332030) , the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (Grant No. 2003A03) and the Graduate Starting Seed Fund of Northwestern Polytechnical University (Grant No. Z200572).

[†] E-mail : lishuang@mail.nwpu.edu.cn