

同伦分析法在求解非线性演化方程中的应用^{*}

石玉仁^{1)†} 许新建¹⁾ 吴枝喜¹⁾ 汪映海¹⁾ 杨红娟²⁾ 段文山²⁾ 吕克璞²⁾

1) 兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

2) 西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2005 年 8 月 7 日收到 2005 年 10 月 25 日收到修改稿)

利用同伦分析法求解了(2+1)维改进的 Zakharov-Kuznetsov 方程, 得到了它的近似周期解, 该解与精确解符合很好. 结果表明, 同伦分析法在求解高维非线性演化方程时, 仍然是一种行之有效的方法. 同时, 还对该方法进行了一定的扩展, 经过扩展后的方法能够更方便地求解更多非线性演化方程的高精度近似解析解.

关键词: 同伦分析法, 改进的 Zakharov-Kuznetsov 方程, 周期解

PACC: 0340K, 0290

1. 引言

物理学的众多问题都可以用非线性偏微分方程(NPDE)描述, 所以求解 NPDE 显得十分重要. 对 NPDE 的求解, 一直是数学家和物理学家感兴趣的问题. 30 多年来, 数学物理研究领域内一大成就就是提出了许多求解 NPDE 的精巧数学方法, 如逆散射法、Bäcklund 变换法等. 近年来, 很多学者又提出了许多新的方法, 如齐次平衡法^[1-4]、双曲函数法^[5-8]、sine-cosine 方法、Jacobi 椭圆函数展开法^[9-11]、同伦分析法^[12-16]等. 这些方法都可以借助近年发展起来的计算机代数系统得以部分甚至完全实现, 从而大大提高了工作效率.

同伦分析法是求解非线性问题的一种重要方法, 被成功用于解决工程技术中的许多非线性问题, 如非牛顿流体的磁流体动力学^[17]、深水中非线性波的传播^[18]、自激系统的自由振荡^[19]等. 这些成功应用的例子表明, 同伦分析法对于解决很多非线性问题是行之有效的. 关于该方法的更多介绍请参看文献 [2]. 但就作者所知, 用该方法求解高维非线性演化方程的报道似乎很少.

文献 [20] 在研究耦合非线性传输线时, 得到了下列方程:

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0. \quad (1)$$

若(1)式中 $p = 1$, 则称其为 Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程. 若 $p \neq 1$, 则称为改进的 ZK (mZK) 方程. 本文用同伦分析法求解了 $p = 2$ 时的(2+1)维 mZK 方程, 得到了它的近似周期解, 该解与精确解符合很好, 表明该方法在求解一类非线性演化方程时仍十分有效. 另外, 我们也对该方法进行了一定的扩展. 扩展后的方法能够用于更多类型的非线性演化方程的求解, 而且应用起来更为简便.

2. 同伦分析法求解

考虑方程(1) $p = 2$ 时的行波解

$$u(x, t) = A f(\xi), \quad (2)$$
$$\xi = k_1 x + k_2 y - \omega t + \xi_0,$$

式中 A 是波的振幅, k_1, k_2 是波矢, ω 是波的圆频率, 均为未知常数; ξ_0 是任意常数, 影响波相位. 此时(1)式变为

$$-cf' + \alpha f^2 f' + \beta f''' = 0, \quad (3)$$

式中撇号表示 $\frac{d}{d\xi}$,

$$c = \frac{\omega}{k_1},$$

$$\alpha = A^2,$$

$$\beta = k_1^2 + k_2^2,$$

下面利用同伦分析法对方程(3)进行求解.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10247008)资助的课题.

[†] E-mail: shiyr04@st.lzu.edu.cn.

若方程(3)有周期为 T 的解, 则 $f(\xi)$ 可表示为 Fourier 三角级数. 不失一般性, 假设 $T = 2\pi$. 如果 $T \neq 2\pi$, 则可通过合适的变量代换使其周期为 2π . 若 $f(\xi)$ 是 ξ 的奇函数, 则 $f(\xi)$ 可表示为 Fourier 正弦级数; 如果 $f(\xi)$ 是 ξ 的偶函数, 则 $f(\xi)$ 可表示为 Fourier 余弦级数. 由于篇幅关系, 本文仅考虑 $f(\xi)$ 是奇函数的情形, 更一般的情况将在后面的研究中讨论. 此时, 方程(3)的解可表示为

$$f(\xi) = \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \sin(m\xi), \quad (4)$$

式中 A_m ($m = 1, 2, \dots$) 是 Fourier 正弦系数.

定义线性微分算符

$$L = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}, \quad (5)$$

构造下列零阶变形方程:

$$(1-q)L[F(\xi, q) - f_0(\xi)] = qhM[F(\xi, q), \alpha(q)], \quad (6)$$

式中 $q \in [0, 1]$, 为一重要可变参数; h 是一个非零辅助参数; $f_0(\xi) = F(\xi, 0) = \sin \xi$, 且

$$\begin{aligned} & M[F(\xi, q), \alpha(q)] \\ &= -\alpha(q) \frac{\partial F(\xi, q)}{\partial \xi} + \alpha F^2(\xi, q) \frac{\partial F(\xi, q)}{\partial \xi} \\ &+ \beta \frac{\partial^3 F(\xi, q)}{\partial \xi^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

从(6)(7)式可以看出, 当参量 q 从 0 变到 1 时, $F(\xi, q)$ 从 $f_0(\xi)$ 变为方程(3)的解 $f(\xi)$, 同时 $\alpha(q)$ 也从某个初始猜测值 c_0 变为方程(3)中的 c . 若变化过程足够光滑, 则 $F(\xi, q)$ 和 $\alpha(q)$ 可以展开为 q 的 Maclaurin 级数. 如果这两个级数在 $q = 1$ 点都收敛, 则有

$$\begin{aligned} f(\xi) &= F(\xi, q)|_{q=1} \\ &= F(\xi, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \\ &= f_0(\xi) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\xi), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c &= \alpha(q)|_{q=1} = \alpha(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m \alpha(q)}{dq^m} \Big|_{q=0} \\ &= c_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m, \end{aligned} \quad (9)$$

式中,

$$f_m(\xi) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \quad (10)$$

$$c_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m \alpha(q)}{dq^m} \Big|_{q=0} \quad (11)$$

称为 m 阶变形导数.

将方程(6)两边同时对 q 求导 m 次, 然后同除以 $m!$ 且取 $q = 0$, 可得如下关于 $f_m(\xi)$ 的 m 阶变形方程

$$L[f_m(\xi) - f_{m-1}(\xi)] = hR_m(\xi) \quad (m \geq 1), \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} R_m(\xi) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} M[F(\xi, q), \alpha(q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \\ &= - \sum_{n=0}^{m-1} c_n f_{m-1-n}(\xi) \\ &+ \alpha \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^n f_k(\xi) f_{n-k}(\xi) \right) \\ &\times f'_{m-1-n}(\xi) + \beta f'''_{m-1}(\xi). \end{aligned} \quad (13)$$

值得说明的是, 方程(12)是一“递推”型方程, 即当求解 $f_m(\xi)$ 时, 除 c_{m-1} 外其他量(如 $f_k(\xi)$, c_k ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$))已在前面解出. 而且方程(12)是关于 $f_m(\xi)$ 的一线性微分方程, 很容易求解. 为便于看出这一点, 下面分别列出 $m = 1$ 和 $m = 2$ 的情形:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{d\xi} + \frac{d^3}{d\xi^3} \right) [f_1(\xi) - f_0(\xi)] \\ &= h[-c_0 f_0(\xi) + \alpha f_0(\xi)^2 f_0'(\xi) + \beta f_0'''(\xi)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{d\xi} + \frac{d^3}{d\xi^3} \right) [f_2(\xi) - f_1(\xi)] \\ &= h[-c_0 f_1'(\xi) - c_1 f_0(\xi) + \alpha f_0(\xi)^2 f_1'(\xi) \\ &+ 2\alpha f_0 f_1 f_0'(\xi) + \beta f_1'''(\xi)]. \end{aligned} \quad (15)$$

由于 $f_0(\xi)$ 已知, 则可从(14)式解出 $f_1(\xi)$, 然后再从(15)式解出 $f_2(\xi)$, ... 依次类推.

进一步, 发现 $R_m(\xi)$ 可表示为

$$R_m(\xi) = \sum_{n=1}^{m+1} \gamma_{m,n} \cos[(2n-1)\xi], \quad (16)$$

式中 $\gamma_{m,n}$ 是系数. 考虑到方程(12)的特点, $R_m(\xi)$ 中 $\cos \xi$ 的系数 $\gamma_{m,1}$ 应为零, 否则 $f_m(\xi)$ 中会出现形如 $\xi \cos \xi$ 的项, 但(4)式表明这样的项不应该出现, 即有

$$\gamma_{m,1} = 0. \quad (17)$$

用(17)式可以确定 c_{m-1} .

把(16)式代入(12)式解得

$$f_m(\xi) = -h \sum_{n=2}^{m+1} \frac{\gamma_{m,n}}{4n(n-1)(2n-1)} \sin[(2n-1)\xi]$$

$$\begin{aligned}
 &+ f_{m-1}(\xi) + C_{1,m} + C_{2,m} \cos \xi \\
 &+ C_{3,m} \sin \xi, \tag{18}
 \end{aligned}$$

式中 $C_{1,m}, C_{2,m}, C_{3,m}$ 是积分常数. 由(4)式可知

$$C_{1,m} = C_{2,m} = 0. \tag{19}$$

利用 $f(\xi)$ 的振幅为 1 这个条件可确定常数 $C_{3,m}$. 该条件可写为

$$f_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_m\left(\frac{3\pi}{2}\right). \tag{20}$$

对于 $\gamma_{m,n}$, 可把(16)(18)式代入(13)式, 然后令等式两端 $\cos(2n-1)\xi$ 项对应系数相等来确定. 这一过程比较繁琐, 但可借助计算机代数系统完成.

最终可得方程(3)的 M 阶近似解析解,

$$\begin{aligned}
 f(\xi) &\approx \sum_{m=0}^M f_m(\xi), \\
 c &\approx \sum_{m=0}^M c_m. \tag{21}
 \end{aligned}$$

3. 与精确解的比较

在实际计算过程中, 用上述方法得到的是在某一阶截断的解, 一般是方程(3)的一个近似解析解. 为了解该解的近似程度, 不妨与精确解作一比较. 方程(1)的周期性精确解可用 Jacobi 椭圆函数法得到.

在上述计算过程中, 有一个重要参数 h , 一般可以通过调节 h 的值以保证级数收敛. 图 1 显示了 $\alpha = 5, \beta = -0.5, M = 10$ 时的 $c-h$ 曲线图. 此时虚线所示为 c 的精确值, 从方程(1)对应的精确解可知, $c \approx 1.8714792246216$. 可以看出, 大约在 $0.5 < h < 3$ 范围内, 我们所得到的解非常接近于 c 的精确值. 如当 $h = 2$ 时, (21) 式给出 $c \approx 1.8714857$, 与精确值差别很小. 图 2(a) 显示了取上述值时, $f(\xi)$ 与精确解的比较. 可见用同伦分析法给出的解与精确解符合很好. 注意此时的精确解是 Jacobi 椭圆正弦函数形式的. 图 2(b) 显示了 $\alpha = 5, \beta = 0.25, M = 15, h = -2$ 时近似解与精确解的比较. 此时 $c-h$ 曲线图(图略)表明收敛范围大约为 $-4 < h < -0.7$. c 的精确值为 0.792202 , 当 $h = -2$ 时同伦分析法给出 $c \approx 0.7921709$, 两者差别很小. 这种情况下精确解是以 Jacobi 椭圆余弦函数形式给出的, 同伦分析法给出的近似解仍和精确解符合很好.

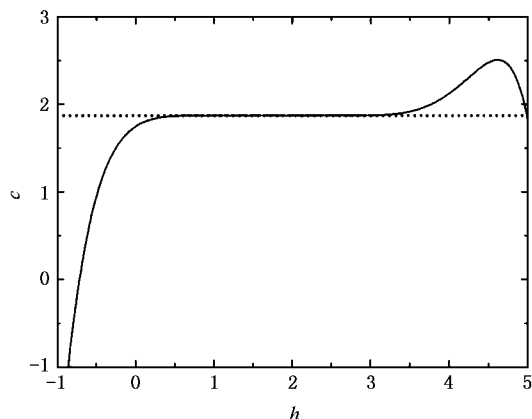


图 1 $c-h$ 曲线图 实线为同伦分析法给出的解, 圆点为精确解. $\alpha = 5, \beta = -0.5, M = 10$

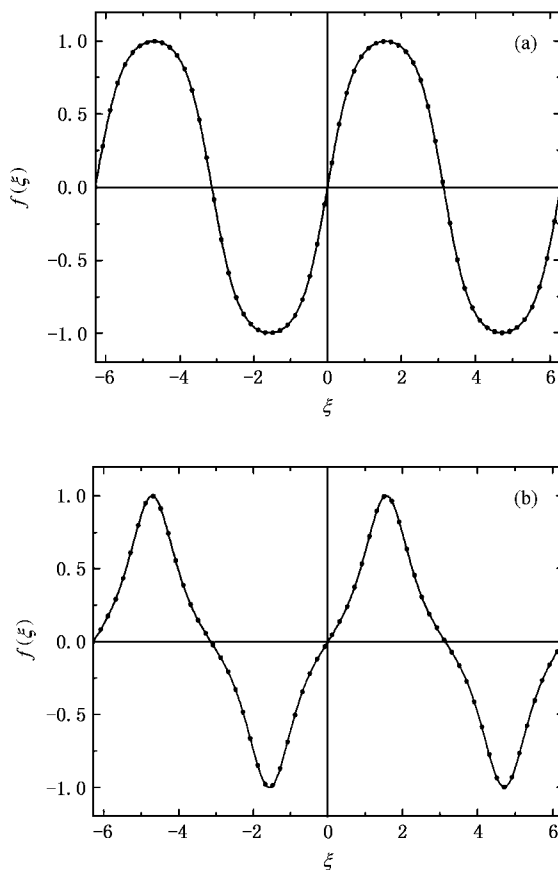


图 2 方程(3)近似解与精确解的比较 实线为同伦分析法给出的解, 圆点为精确解. (a) $\alpha = 5, \beta = -0.5, M = 10, h = 2$; (b) $\alpha = 5, \beta = 0.25, M = 15, h = -2$

4. 方法的扩展

以上用同伦分析法给出了方程(3)的一组近似

解析解,进一步可得 mZK 方程(1)的解析解. 从近似解与精确解的比较中可看出,同伦分析法给出解的精度很高,说明同伦分析法在求解高维的非线性演化方程时仍然十分有效. 但我们在实践中发现,对很多非线性演化方程,上述方法不能直接应用. 如对著名的 Korteweg-de Vries(KdV)方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (22)$$

虽然它存在 Jacobi 椭圆函数周期解,但以上介绍的同伦分析法对求它的周期解似乎无能为力. 下面对此方法进行一定的扩展,使其可用于求解更多的非线性演化方程. 为方便起见,这里以 KdV 方程为例来说明,推广到求解其他非线性演化方程也是很直接的.

将方程(3)两端同时对 ξ 积分一次并取积分常数为零,整理后得

$$f'' = \frac{c}{\beta}f - \frac{\alpha}{3\beta}f^3. \quad (23)$$

将方程(23)两端同乘以 f' 并对 ξ 积分一次,取积分常数为零,整理后得

$$f^2 = \frac{c}{\beta}f^2 - \frac{\alpha}{6\beta}f^4. \quad (24)$$

引入函数 $g = \frac{df}{d\xi}$, 则有下列关系式:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\xi} &= g, \\ \frac{dg}{d\xi} &= \frac{c}{\beta}f - \frac{\alpha}{3\beta}f^3, \\ g^2 &= \frac{c}{\beta}f^2 - \frac{\alpha}{6\beta}f^4. \end{aligned} \quad (25)$$

可见函数 f, g 满足文献[7]中的两个条件,它们可以作为展开函数来构造非线性演化方程的精确解.

考虑方程(22)的行波解. 作变换

$$\begin{aligned} u &= \phi(\xi), \\ \xi &= K(x - vt + \xi_0), \end{aligned} \quad (26)$$

式中 K 是波数, v 是波速,均待定. 需注意:这里的 ξ 与(2)式中的 ξ 不一样! 方程(22)变为

$$-v \frac{d\phi}{d\xi} + 6\phi \frac{d\phi}{d\xi} + K^2 \frac{d^3\phi}{d\xi^3} = 0. \quad (27)$$

设(27)式具有下列形式的解:

$$\phi = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + b_1 g + b_2 fg, \quad (28)$$

式中 a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 为待定常数. 把(28)式代入(27)式,并借助(25)式化简所得方程,使得方程中只含 f 和 g 的幂次项并且 g 的幂次不高于 1. 最后令 $f^i, f^i g (i = 0, 1, 2, \dots)$ 项的系数为零,得到一包含所有待定常数的非线性代数方程组. 求解此代数

方程组可以确定前面所有待定常数,从而得到方程(22)的解.

按上述方法并借助计算机代数系统 Mathematica, 最终得(复数解略去)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\beta v - 4K^2 c}{6\beta}, \\ a_2 &= \frac{K^2 \alpha}{3\beta}, \\ a_1 &= b_1 = b_2 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

这里 K, v 是任意非零实数. 故有

$$u(x, t) = \phi(\xi) = \frac{\beta v - 4K^2 c}{6\beta} + \frac{K^2 \alpha}{3\beta} f(\xi). \quad (30)$$

(30)式表明:若 f 是方程(3)的解,则(30)式就是方程(22)的解. 若将函数 f 截断到 M 阶,则有

$$\begin{aligned} u(x, t) = \phi(\xi) &\approx \frac{v}{6} - \frac{2K^2}{3\beta} \left(\sum_{m=0}^M c_m \right) \\ &+ \frac{K^2 \alpha}{3\beta} \left(\sum_{m=0}^M f_m(\xi) \right)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

(31)式为方程(22)的一个近似解析解,图3(a)

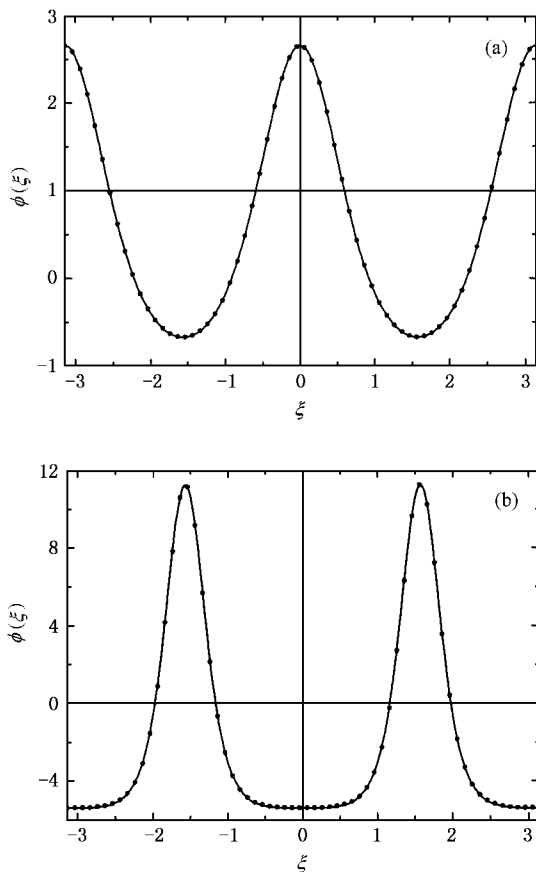


图3 方程(22)近似解与精确解的比较 实线为同伦分析法给出的解,圆点为精确解. $K = v = 1$. (a) $\alpha = 5, \beta = -0.5, M = 10, h = 2$; (b) $\alpha = 5, \beta = 0.1, M = 15, h = 2$

显示了取参数 $\alpha = 5, \beta = -0.5, M = 10, h = 2, K = 1, \nu = 1$ 时近似解与精确解的比较, 图 3(b) 显示了取参数 $\alpha = 5, \beta = 0.1, M = 15, h = -2, K = 1, \nu = 1$ 时近似解与精确解的比较. 从图 3 可看出, 近似解与精确解符合很好. 在图 3(b) 所取参数的情况下, Jacobi 椭圆函数的模 $r = 0.999083$, 非常接近于 1. 这意味着所得解已接近孤立波解.

值得说明的是, 图 3 所示显然是偶函数而不是奇函数形式的解. 这意味着方程 (22) 用以上介绍的同伦分析法直接解是失败的, 必须考虑把解展开为 Fourier 余弦级数. 展开成 Fourier 余弦级数后, 由于常数项的存在使得计算比正弦级数的情况要复杂得多^[15], 但我们扩展后的方法却很容易解出来. 事

实上, 在扩展后方法的计算过程中, 对 $f(\xi)$ 的奇偶性没有要求, 只要它是方程 (3) 的解就可以了.

5. 结 论

利用同伦分析法求解了 $(2+1)$ 维 mZK 方程, 得到了它的近似周期解, 该解与精确解符合很好. 结果表明, 同伦分析法在求解高维非线性演化方程时, 仍然是一种行之有效的方法. 同时, 我们也对该方法进行了一定的扩展. 经过扩展后的方法, 能够更方便地求解更多非线性演化方程的高精度近似解析解. 相信在非线性演化方程的求解过程中, 该法会发挥其重要的作用.

- [1] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [2] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett. A* **216** 67
- [3] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
- [4] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
- [5] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Sci. China A* **30** 1103 (in Chinese) [张桂戎、李志斌、段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]
- [6] Lü K P, Shi Y R, Duan W S *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山等 2001 物理学报 **50** 2074]
- [7] Shi Y R, Lü K P, Duan W S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) [石玉仁、吕克璞、段文山等 2003 物理学报 **52** 267]
- [8] Huang D J, Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese) [黄定江、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]
- [9] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]
- [10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10]
- [11] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]
- [12] Liao S J 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 499
- [13] Wu Y Y, Wang C, Liao S J 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1733
- [14] Wang C, Zhu J M, Liao S J *et al* 2003 *Int. J. Heat Mass Trans.* **46** 1855
- [15] Wang C, Wu Y Y, Wu W 2004 *Wave Motion* **41** 329
- [16] Liao S J, Pop I 2004 *Int. J. Non-linear Mech.* **39** 271
- [17] Liao S J 2003 *J. Fluid Mech.* **488** 189
- [18] Liao S J, Cheung K F 2003 *J. Eng. Math.* **45** 105
- [19] Liao S J 2003 *Int. J. Non-linear Mech.* **38** 1173
- [20] Duan W S, Hong X R, Shi Y R *et al* 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1231

Application of the homotopy analysis method to solving nonlinear evolution equations^{*}

Shi Yu-Ren¹†‡ Xu Xin-Jian¹ Wu Zhi-Xi¹ Wang Ying-Hai¹
Yang Hong-Juan² Duan Wen-Shan² Lü Ke-Pu²

¹ *Institute of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*

² *College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*

(Received 7 August 2005 ; revised manuscript received 25 October 2005)

Abstract

We obtained a class of approximate periodic solutions for the $(2 + 1)$ -dimensional modified Zakharov-Kuznetsov equation by using the homotopy analysis method (HAM). The solutions we got agree with the exact solutions. The results indicate that the HAM is still valid for solving a class of higher dimensional evolution equations. We also made some efforts to extend the HAM to find the analytical solutions for more nonlinear evolution equations in an easier way.

Keywords : homotopy analysis method , modified Zakharov-Kuznetsov equation , periodic solution

PACC : 0340K , 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10247008).

† E-mail : shiyr04@st.lzu.edu.cn.