

# 电荷量子比特与量子化光场之间的纠缠\*

李照鑫 邹 健 蔡金芳 邵 彬

(北京理工大学物理系, 北京 100081)

(2005 年 5 月 30 日收到, 2005 年 10 月 21 日收到修改稿)

研究了初态为混合态的电荷量子比特与量子化光场之间的纠缠. 通过求解系统的 concurrence 下限, 研究初态的混合度  $\lambda$  和失谐量  $\Delta$  对系统纠缠随时间演化的影响. 在弱场中, 电荷量子比特初始是激发态的系统, 其纠缠度远远大于电荷量子比特初始是基态的系统, 并且  $\Delta$  对系统的纠缠有明显的抑制作用. 在强场中, 电荷量子比特初始分别为激发态和基态时系统的纠缠演化接近一致, 初态混合度最高时系统的纠缠度最小, 并且  $\Delta$  对系统纠缠的影响变弱.

关键词: 约瑟夫森结, 纠缠, 混合态, concurrence 下限

PACC: 0365, 4250

## 1. 引 言

最近几年, 量子信息和量子计算的研究取得了很大进展. 量子计算机的物理实现是该研究领域的一个重要部分, 人们正在对各种实现方案进行深入的探索, 其中基于库珀对箱的介观超导量子器件(约瑟夫森结)显示了巨大的潜力. 研究发现, 介观超导量子器件可以构造用于量子计算机的电荷量子比特<sup>[1-5]</sup>, 与其他的量子计算实现方案相比, 具有容易受外场的控制、可以在介观电路中实现的优点, 并且具备级联形成复杂逻辑网络的基础. 实验已经发现, 电荷量子比特的本征频率出现在微波区<sup>[6]</sup>. 因此, 考虑到量子光学的最新进展, 研究电荷量子比特与量子化微波场的相互作用, 对于量子计算机的实现具有重要的实际意义.

量子纠缠是量子计算和量子信息的关键资源, 如何产生和量化系统的纠缠是实现量子信息和量子计算的基础. 本文研究不同初态(包括纯态和混合态)的电荷量子比特与相干态光场之间的纠缠, 这是一个  $2 \otimes \infty$  维的系统. 对于处于混合态的  $2 \otimes \infty$  维系统, 目前还未发现很好的计算纠缠度的方法. 我们采用的方法是把这个系统投影到  $2 \otimes 2$  维的子空间, 通过求 concurrence 下限研究系统的纠缠, 主

要研究光场的平均光子数  $\bar{n}$ 、电荷量子比特初态的混合度  $\lambda$  和电荷量子比特本征频率与光场频率的失谐量  $\Delta$  对系统的纠缠度随时间演化的影响.

## 2. 模型及解

本文的研究对象电荷量子比特是一个拥有  $N$  个超导库珀对电子的超导箱(或叫做超导岛), 这个超导箱被一个低电容  $C_J$  的约瑟夫森隧道结(具有约瑟夫森耦合能  $E_J$ ) 连接到一个超导电极上, 通过一个外部门电容  $C_g$  可以在这个系统上加一个可控大小的经典驱动电压  $V_g$ . 这个超导箱被放置在一个单模微波辐射腔中, 假设门电容不受量子化光场的作用, 这个箱-场系统的哈密顿量为<sup>[7,8]</sup>

$$H = \frac{(Q - C_g V_g - C_J V_F)^2}{2(C_g + C_J)} - E_J \cos \phi + \hbar \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

(1) 式哈密顿量中相应的变量是库珀对箱的电量  $Q = 2Ne$  和穿过结的相位差  $\phi$ ,  $a^\dagger$  和  $a$  是频率为  $\omega$  的单模光场的产生和湮没算符,  $V_F$  是辐射场穿过结时产生的感应电动势, 可以写成

$$V_F = i \left( \frac{\hbar \omega}{2C_F} \right)^{1/2} (a - a^\dagger), \quad (2)$$

式中的参量  $C_F$  与约瑟夫森结的厚度、绝缘体的介

\* 国家自然科学基金(批准号: 10374007)资助的课题.

电常数及光腔的尺寸有关<sup>[7]</sup>.

我们选择库珀对电子的能量  $E_C = e^2/2(C_g + C_J)$  远远大于约瑟夫森耦合能  $E_J$  和电子热运动能量  $k_B T$  的情况, 并且认为  $V_g = e/C_g$ , 这样只需考虑两个低能量的电荷态  $|N=0\rangle$  和  $|N=1\rangle$ <sup>[2,3,5]</sup>, 其中  $Q|N=2Ne|N$ . 在这种情况下系统的哈密顿量在电荷态基矢  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下可以表示成自旋  $\frac{1}{2}$  的两态形式<sup>[3,5,8]</sup>,

$$H = E_C \left[ 1 + \frac{C_J^2}{e^2} V^2 \right] - \frac{1}{2} E_J \tau_x - 2E_C \frac{C_J}{e} V \tau_z + \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (3)$$

其中  $\tau_x$  和  $\tau_z$  是在赝自旋基矢  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  下的泡利矩阵.

考虑到目前实验技术可以实现的情况:  $C_J \sim 10^{-15}$  F,  $\omega \sim 10^{10}$  Hz,  $C_F \sim 10^{-11}$  F 和  $k_B T \ll E_J \sim \hbar\omega \ll E_C \ll \Delta$ , 在这种情况下可以忽略(3)式中含有  $V^2$  的项. 为了处理问题方便, 我们选择基矢

$$\begin{aligned} |e\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|1\rangle - |0\rangle), \\ |g\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|1\rangle + |0\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

分别表示电荷量子比特的基态和激发态. 根据(2)式, 在旋波近似下, 系统的哈密顿量(3)式在新的基矢  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  下可以简化为

$$H = \frac{1}{2} E_J \sigma_z - i\hbar g (a \sigma_+ - a^\dagger \sigma_-) + \hbar\omega a^\dagger a, \quad (5)$$

式中  $\sigma_z$  是新基矢  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  下的泡利矩阵,  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  是升、降算符, 且

$$g = \frac{eC_J}{2(C_g + C_J)} \left( \frac{\omega}{2\hbar C_F} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

它反映了电荷量子比特与光场的耦合强度. 这里需要指出是, 文献[9]也曾得到过类似的哈密顿量.

在相互作用绘景中, 这个哈密顿量可以写成(取  $\hbar = 1$ )

$$H_1 = \frac{1}{2} \Delta \sigma_z - i g (a \sigma_+ - a^\dagger \sigma_-), \quad (7)$$

式中  $\Delta = E_J - \omega$  是电荷量子比特的本征频率与光场频率之间的失谐量. 这个哈密顿量与简单 Jaynes-Cummings 模型的哈密顿量很相似<sup>[10,11]</sup>. 经过计算, 得到该系统的时间演化算符  $U(t) = \exp(-iH_1 t)$  的矩阵形式为

$$U(t) = \begin{pmatrix} C_{n+1}^- & -a S_n \\ a^\dagger S_{n+1} & C_n^+ \end{pmatrix}. \quad (8)$$

这里令算符

$$\begin{aligned} C_n^\pm &= \cos \Omega_n t \pm i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \Omega_n t}{\Omega_n}, \\ S_n &= g \frac{\sin \Omega_n t}{\Omega_n}, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \left( \frac{\Delta^2}{4} + g^2 n \right)^{1/2}, \\ n &= a^\dagger a. \end{aligned}$$

本文考虑初始时( $t=0$ )整个系统处于直积态: 电荷量子比特处于混合态, 量子化光场处于相干态, 相应的密度算符分别为

$$\rho_c(0) = \lambda |e\rangle\langle e| + (1-\lambda) |g\rangle\langle g|, \quad (9)$$

$$\rho_f(0) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \alpha^{*n}}{\sqrt{m!n!}} \exp(-|\alpha|^2) |m\rangle\langle n|. \quad (10)$$

这里  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 其中  $\lambda=0$  和  $\lambda=1$  分别表示电荷量子比特处在基态和激发态,  $\lambda=0.5$  时电荷量子比特处于最混合的状态, 并且  $\lambda_1 = 1-\chi$  和  $\lambda_2 = \chi$  ( $0 \leq \chi \leq 1$ ) 具有相同的混合度;  $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$ ,  $\bar{n} = |\alpha|^2$  是相干态光场的平均光子数. 系统密度算符随时间的演化为

$$\begin{aligned} \rho_{c-f}(t) &= U(t) \rho_c(0) \otimes \rho_f(0) U^\dagger(t) \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} Q_{j,k} \begin{pmatrix} C_{n+1}^- \lambda & -a S_n (1-\lambda) \\ a^\dagger S_{n+1} \lambda & C_n^+ (1-\lambda) \end{pmatrix} \\ &\quad \times |j\rangle\langle k| \begin{pmatrix} C_{n+1}^+ & a S_n \\ -a^\dagger S_{n+1} & C_n^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$Q_{j,k} = \frac{\alpha^j \alpha^{*k}}{\sqrt{j!k!}} \exp(-|\alpha|^2).$$

纯态系统的纠缠度可以用 von Neumann 熵来定义, 但混合态系统纠缠的度量非常复杂. 对于  $2 \otimes 2$  维的量子系统, Wootters<sup>[12]</sup> 提出的通过求 concurrence 来度量系统纠缠的方法是比较方便可行的. 已知  $2 \otimes 2$  维系统的密度算符  $\rho$ , 这个系统的 concurrence 表示为

$$C = \max\{0, \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - \nu_4\}, \quad (12)$$

其中  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \geq \nu_4$  是非厄米矩阵

$$R = \rho (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^y) \rho^* (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^y)$$

的本征值的平方根. 这里  $\rho^*$  是  $\rho$  的共轭矩阵,  $\sigma^y$  为泡利矩阵.  $C$  的值在 0—1 之间,  $C=0$  时系统没

有纠缠,  $C = 1$  时系统处于最大纠缠态,  $0 < C < 1$  表示系统处于部分纠缠态<sup>[13]</sup>.

本文研究的对象是一个  $2 \otimes \infty$  维的混合系统, 目前对于这类系统的纠缠还没有完备的度量方法. 我们可以把它投影到  $2 \otimes 2$  维子空间求子空间的 concurrence, 这种投影不会增加系统的纠缠, 所有子空间 concurrence 的平均是整个系统纠缠的下限<sup>[14,15]</sup>. 现在我们利用投影算符

$$\Pi_n = (|e \ e\rangle + |g \ g\rangle) \otimes (|n \ n\rangle + |n+1 \ n+1\rangle), \quad (13)$$

把整个系统投影到这个子空间, 得到  $2 \otimes 2$  维的密度矩阵  $\rho_n$  为

$$\rho_n(t) = \frac{\Pi_n \alpha(t) \Pi_n}{T_n(t)}, \quad (14)$$

式中

$$T_n(t) = \text{Tr}[\Pi_n \rho(t) \Pi_n].$$

由(12)式得到子空间的 concurrence 的时间演化  $C_n(t)$ , 对所有子空间的  $C_n(t)$  求权重平均,

$$\alpha(t) = \frac{\sum_n T_n(t) C_n(t)}{\sum_n T_n(t)}. \quad (15)$$

这就是整个系统的 concurrence 下限.

### 3. 结果及讨论

借助于数值计算, 我们求出电荷量子比特与量子化光场系统在不同初始条件下随时间演化的 concurrence 下限  $C(t)$ . 图 1 给出平均光子数  $\bar{n}$  为 0.2 和 20 时, 对于不同初始混合度  $\lambda$ , 系统 concurrence 下限的时间演化过程. 从图 1(a) 可以看到, 当  $\bar{n}$  很小时电荷量子比特初始处于激发态 ( $\lambda = 1$ ) 和基态 ( $\lambda = 0$ ) 系统的纠缠存在较大差别, 初始为激发态的纠缠度远高于初始为基态的纠缠度, 最小的纠缠出现在靠近基态的一边 ( $\lambda \ll 0.5$ ), 并且很特别的是, 电荷量子比特初始处于最大混合态 ( $\lambda = 0.5$ ) 时比处于基态时的系统纠缠度高. 从图 1(b) 可以看到, 当  $\bar{n}$  较大时电荷量子比特初始处于激发态和基态的系统, 其纠缠随时间的演化趋向一致, 最小纠缠出现在初态混合度最大 ( $\lambda = 0.5$ ) 处, 纠缠的时间演化曲线以  $\lambda = 0.5$  的截面呈现镜像对称分布. 由此我们得出结论: 在弱场中, 电荷量子比特初始的激发态对增加系统的纠缠影响很大; 而随着平均

光子数  $\bar{n}$  的增大, 初始是基态的系统的纠缠度也在提高, 电荷量子比特初态的混合度成为影响系统纠缠度的主要因素, 当初态的混合度最大时, 系统的纠缠度最小, 初态越接近纯态, 系统的纠缠度越大, 而且初始  $\lambda_1 = 1 - \chi$  和  $\lambda_2 = \chi$  的系统具有相同混合度, 其纠缠度随时间的演化也接近一致.

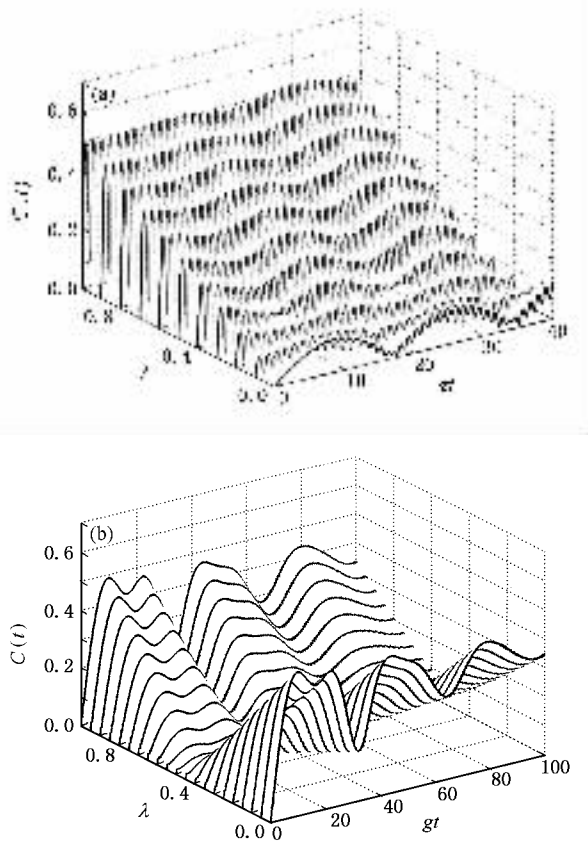


图 1 对于不同的  $\lambda$ , 系统 concurrence 下限的时间演化  $\Delta = 0.1, g = 0.02$ . (a)  $\bar{n} = 0.2$ , (b)  $\bar{n} = 20$

我们关心的另一个问题是失谐量  $\Delta$  对系统纠缠的影响, 这里仍选取  $\bar{n} = 0.2$  和  $\bar{n} = 20$  的两种情况做对比观察, 图 2 给出对于不同的  $\Delta$ , 系统的 concurrence 下限随时间的演化. 从图 2(a) 可以看出, 在  $\bar{n}$  较小时系统的纠缠度随着  $\Delta$  的增加而迅速减小, 失谐量对系统的纠缠具有明显的抑制作用; 从图 2(b) 可以看出, 当  $\bar{n}$  很大时对应于不同  $\Delta$  的纠缠度随时间演化的最大值趋向相等, 失谐量对系统纠缠的抑制力减弱, 但会影响纠缠振荡的周期:  $\Delta = 0$  时纠缠振荡的周期较小, 随着  $\Delta$  的增加纠缠振荡的周期在明显地增大. 这些现象表明: 在共振的情况下电荷量子比特和光场之间的耦合非常强, 而在非共振的情况下, 由于光场和库珀对之间

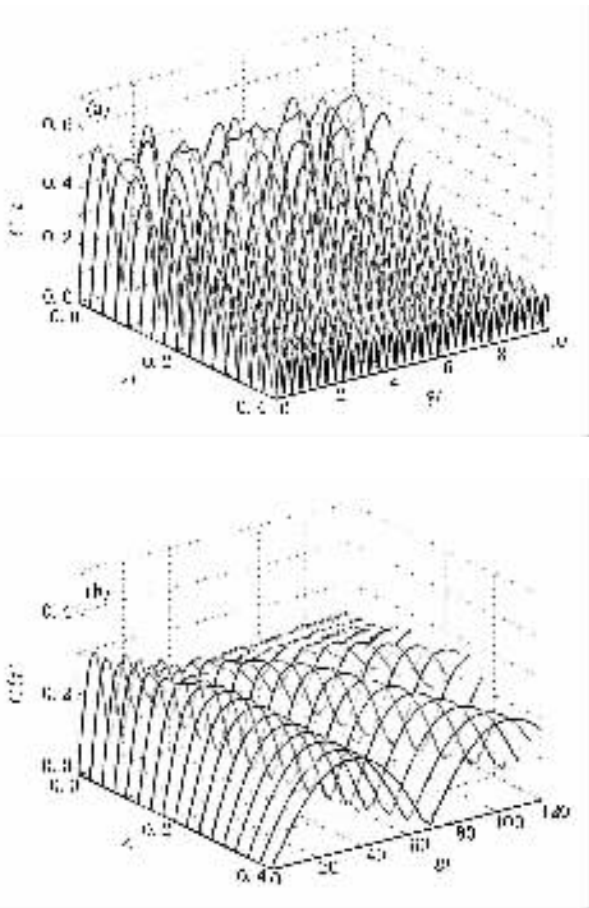


图 2 对于不同的失谐量  $\Delta$ , 系统 concurrence 下限的时间演化  $\lambda = 0.8, g = 0.02$ . (a)  $\bar{n} = 0.2$ , (b)  $\bar{n} = 20$

的耦合没有像共振时那么强, 所以它们之间的纠缠就会减弱. 但当系统的平均光子数很大时, 失谐量对系统纠缠最大值的影响没有弱场时那么强, 这时光场强度成为影响系统纠缠的主要因素.

## 4. 结 论

本文主要通过求 concurrence 下限, 研究初态是混合态的电荷量子比特和相干态光场之间的纠缠, 研究初态的混合度  $\lambda$  及失谐量  $\Delta$  对系统纠缠度的影响. 研究发现平均光子数  $\bar{n}$  较小时, 系统纠缠的时间演化受初始条件的影响较大: 电荷量子比特的初态是激发态时系统的纠缠度最高, 初态越接近于基态系统的纠缠度越低, 而且在初始处于最大混合态  $\lambda = 0.5$  时, 其系统纠缠度明显高于初始处于基态的纯态系统, 同时失谐量  $\Delta$  对系统的纠缠具有明显的抑制作用. 当平均光子数  $\bar{n}$  很大时, 电荷量子比特初态的混合度成为影响系统纠缠的主要因素: 初态混合度最大的系统纠缠最小, 初态为纯态的系统纠缠最大, 而且初态具有相同混合度  $\lambda_1 = 1 - \chi$  和  $\lambda_2 = \chi$  的系统, 其纠缠随时间的演化接近一致, 失谐量  $\Delta$  对纠缠的影响减弱, 系统在时间演化中的最大纠缠度没有因为  $\Delta$  增大而减小, 但纠缠在时间演化中振荡的周期随着  $\Delta$  增大而增大.

- [ 1 ] Kasterner M A 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 849
- [ 2 ] Shnirman A, Schön G, Hermon Z 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2371
- [ 3 ] Makhlin Y, Schön G, Shnirman A 1999 *Nature* **398** 305  
Makhlin Y, Schön G, Shnirman A 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 357
- [ 4 ] Nakamura Y, Pashkin Y A, Tsai J S 1999 *Nature* **398** 786
- [ 5 ] Krech W, Wagner T 2000 *Phys. Lett. A* **275** 159
- [ 6 ] Martinis J M, Nam S, Aumentado J et al 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 117901
- [ 7 ] Migliorea R, Messina A, Napoli A 2000 *Eur. Phys. J. B* **13** 585
- [ 8 ] Yao Y S, Zou J, Shao B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1200  
Yao Y S, Zou J, Shao B 2003 *Chin. Phys.* **12** 649
- [ 9 ] Plastina F, Falcì G 2003 *Phys. Rev. B* **67** 224514
- [ 10 ] Lai Z J, Yang Z Y, Bai J T et al 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3733  
(in Chinese) [ 赖振讲, 杨志勇, 白晋涛等 2004 物理学报 **53** 3733 ]
- [ 11 ] Cai X H, Kuang L M 2002 *Chin. Phys.* **11** 0876  
Huang Y X, Zhan M S 2004 *Chin. Phys.* **13** 2021
- [ 12 ] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [ 13 ] Xiang S H, Yang X, Song K H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1289 (in Chinese) [ 向少华, 杨 雄, 宋克慧 2004 物理学报 **53** 1289 ]
- [ 14 ] Bose S, Fuentes-Guridi I, Knight P L et al 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 050401
- [ 15 ] Rendell R W, Rajagopal A K 2003 *Phys. Rev. A* **67** 062110

# Entanglement between charge qubit and quantized field<sup>\*</sup>

Li Zhao-Xin Zou Jian Cai Jin-Fang Shao Bin

( *Department of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China* )

( Received 30 May 2005 ; revised manuscript received 21 October 2005 )

## Abstract

We investigate time evolution of the entanglement between charge qubit initially in mixed states and quantized field. By calculating the concurrence lower bound, we study the effect of initial mixedness  $\lambda$  and detuning  $\Delta$  on the entanglement of the system. In the case of weak field, the degree of entanglement for charge qubit being initially in excited state is much larger than that for charge qubit being initially in ground state, and detuning  $\Delta$  can efficiently reduce the entanglement. But in the case of strong field, the time evolution of the entanglement is about the same for charge qubit being initially in excited and ground states, the more mixed the initial state of charge qubit is prepared, the weaker the entanglement is, and  $\Delta$  has less effect on the entanglement than in the case of weak field.

**Keywords** : Josephson junction, entanglement, mixed state, concurrence lower bound

**PACC** : 0365, 4250

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10374007 ).