第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1607-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.4,April,2006

Gibbons-Maeda dilaton 黑洞的纠缠熵*

刘成周[1)2)†]　赵　峥[1)]

1)(北京师范大学物理系,北京　100875)

2)(滨州学院物理与电子科学系,滨州　256600)

(2005 年 8 月 2 日收到;2005 年 10 月 24 日收到修改稿)

按纠缠熵方法,计算了 Gibbons-Maeda(G-M) dilaton 黑洞视界外部与黑洞内量子态纠缠的一薄层内量子场的统计熵,得到了 G-M dilaton 黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵.用广义不确定原理对量子态密度进行修正,克服了 brick-wall 模型中视界附近态密度的发散困难,该薄层可以紧贴在事件视界上.对 brick-wall 外部量子场中与黑洞内自由度有关联的自由度统计熵进行了计算,并把结果与 brick-wall 内量子场的熵进行比较分析,显示两结果具有与视界面积成正比的一致性,但后者能更好地反映黑洞熵的本质.利用留数定理,克服了计算中的积分困难,所得的结论是定量成立的.计算和讨论表明:黑洞事件视界外部附近的高密度量子态与黑洞内部有强关联,brick-wall 模型中的紫外截断是不合理的.在视界附近的高能态量子场中,应当考虑引力场的量子化效应,brick-wall 模型中的紫外截断也是不必要的.在 brick-wall 内外的量子场中,对黑洞熵有贡献的均是与黑洞内部量子态有关联的自由度.

关键词:纠缠熵,黑洞,广义不确定原理,截断

PACC:0420,0470

1.引　言

黑洞具有与事件视界面积成正比的 Bekenstein-Hawking(B-H)熵[1,2],且其标准 B-H 熵公式为

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A_{\mathrm{h}}}{4 l_{\mathrm{P}}^2}, \tag{1}$$

式中,A_{h} 为事件视界面积,l_{P} 为普朗克长度.

处于纠缠态的复合系统,其子系统处于混合态中,而子系统观测到的熵就是纠缠熵.纠缠熵理论认为黑洞熵起源于黑洞事件视界内外量子场的相互关联[3],(1)式中的 S_{BH}是对由于视界内外自由度的纠缠而产生的纠缠熵.brick-wall 模型[4] 把黑洞熵解释为视界外部量子态的熵,其本质是把黑洞事件视界内外的量子场构成纠缠态,从而通过计算黑洞视界外子系统自由度的熵得到黑洞的 B-H 熵.由于黑洞事件视界内外的量子场处于一个纠缠态中,而黑洞外部的观者仅能观测到事件视界外的自由度,从而所得混合态的密度矩阵度量的是对整个黑洞内部信息的丢失,因此,此时得到的黑洞外部自由度的纠缠熵就是黑洞内部自由度的熵,也就是黑洞B-H熵.标记黑洞内外的子系统分别为 1 和 2,则有如下公式成立:

$$S_{\mathrm{E}} = S_1 = S_2 = S_{\mathrm{BH}}, \tag{2}$$

式中 S_{E} 表示系统的纠缠熵.这样,brick-wall 模型就给出了计算黑洞纠缠熵的一种具体方法,且已被应用于多种黑洞熵的计算[5—25],促进了人们对黑洞熵起源的理解.但在 brick-wall 模型计算中出现了视界附近量子态密度的发散困难,因而需人为地引入紫外截断,该截断是不自然的.薄层 brick-wall 模型[10—13,17—25]把黑洞熵解释为黑洞视界外一薄层内量子场的熵,对 brick-wall 模型进行了推广,给出了更多的黑洞热性质,又对紫外截断因子选择进行了分析,但紫外截断仍不能避免.

弦理论和非对易几何对海森伯不确定原理进行了修正,使其成为广义不确定原理[26—28].把广义不确定原理引入黑洞热力学[29—33],结果表明视界附近的量子态密度及其统计熵是有限的,brick-wall 模型中的紫外截断是可以避免的.文献[30—32]的计算中出现了积分困难,其结果黑洞熵与视界面积成正

* 国家自然科学基金(批准号:10375008)资助的课题.

† E-mail:czlbj20@yahoo.com.cn

比的结论是定性成立的.本文把广义不确定原理引入 Gibbons-Maeda (G-M) dilaton 黑洞熵的计算,用纠缠熵方法对处于黑洞视界外部与黑洞内量子态纠缠的一薄层内量子场的统计熵进行计算,得到了 G-M dilaton 黑洞的 B-H 熵.这里,该薄层的固有厚度具有广义不确定原理确定的最小长度量级,且该薄层紧贴在事件视界上,计算是在不引入任何紫外截断的情况下进行的.而这一薄层内的量子场正是在原始 brick-wall 模型中通过引入紫外截断被忽略掉的 brick-wall 内的量子场.利用留数定理克服了计算中的积分困难,所得的结论是定量成立的.再对 brick-wall 外部量子场的统计熵进行计算,通过考虑广义不确定原理在弱场情况下的近似和对与黑洞内无关联自由度的去除,得到了 G-M dilaton 黑洞熵与视界面积成正比的结论.然后,把通过 brick-wall 内外量子场计算的黑洞熵进行比较分析,结果显示两结论具有与视界面积成正比的一致性,但前者能较好地给出(1)式所示黑洞熵的标准表达式.这一讨论有助于揭示黑洞的纠缠熵起源及其本质,而且可以表明,黑洞事件视界外附近的量子态与黑洞内部自由度处于强关联中,brick-wall 模型中的紫外截断是不合理的 在视界附近的强引力场中,应当考虑引力场的量子化效应,brick-wall 模型中的紫外截断也是不必要的.在 brick-wall 内外的量子场中,对黑洞熵有贡献的均是与黑洞内部量子态有纠缠的自由度.

2. G-M dilaton 黑洞视界附近的量子态密度

下面首先计算和讨论广义不确定原理影响下的 G-M dilaton 黑洞视界附近的量子态密度.

G-M dilaton 黑洞外部时空线元为[34]

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{R^2}\mathrm{d}t^2 + \frac{R^2\mathrm{d}r^2}{(r-r_+)(r-r_-)} + R^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{3}$$

式中,

$$r_+ = M \pm \sqrt{M^2+D^2-P^2-Q^2},$$
$$D = (P^2-Q^2)/2M,$$
$$R^2 = r^2 - D^2,$$

这里,D 是轴子 dilaton 荷,M,Q 和 P 分别表示黑洞的质量、电荷和磁荷.事件视界位置及面积分别为

$$\begin{aligned} r_\mathrm{h} &= M + \sqrt{M^2+D^2-P^2-Q^2}, \\ A_\mathrm{h} &= 4\pi(r_h^2 - D^2). \end{aligned} \tag{4}$$

把(3)式代入零质量标量粒子的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0, \tag{5}$$

且做代换[8]

$$\phi = \exp(-\mathrm{i}Et)\psi(r,\theta,\varphi), \tag{6}$$

可以得到

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \left(\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\frac{\partial}{\partial r}\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{R^2}\right. \\ &\left.+\frac{2r}{r^2-D^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{(r-r_+)(r-r_-)} \\ &\times\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \\ &+\frac{R^4\omega^2}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\psi = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

采用 Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) 近似,令波函数形式为

$$\psi = \exp[\mathrm{i}S(r,\theta,\varphi)]. \tag{8}$$

则有

$$\begin{aligned} p_r^2 &= \frac{R^4}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\omega^2 - \frac{1}{(r-r_+)(r-r_-)} \\ &\times\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

这里,粒子动量的三个空间分量分别为

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial S}{\partial r}, \\ p_\theta &= \frac{\partial S}{\partial\theta}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial S}{\partial\varphi}. \end{aligned} \tag{10}$$

粒子的三动量平方为

$$\begin{aligned} p^2 &= g^{rr}p_r^2 + g^{\theta\theta}p_\theta^2 + g^{\varphi\varphi}p_\varphi^2 \\ &= \frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\omega^2. \end{aligned} \tag{11}$$

按普通量子力学,由海森伯不确定原理给出的坐标-动量不确定关系为 $\Delta x\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}$,这样,相空间 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ 内的量子态数为

$$\mathrm{d}N = \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{12}$$

而据广义不确定原理,在动量为主导的情况下,广义坐标-动量不确定关系为[26,27]

$$\Delta x\Delta p \geqslant \frac{1}{2}\left[\hbar + \frac{\lambda}{\hbar}(\Delta p)^2\right], \tag{13}$$

式中 λ 为表征引力对海森伯不确定原理的修正常量,具有普朗克面积量级,$\lambda \sim l_p^2$.(13)式表明,位置

不确定度不能任意小，其最小限度为

$$\Delta x_{\min} = \sqrt{\lambda}, \tag{14}$$

此即由广义不确定原理给出的最小长度值.

据(13)式还可得到相空间 $d^3\boldsymbol{x}d^3\boldsymbol{p}$ 内的量子态数[28]

$$dN' = \frac{d^3\boldsymbol{x}d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3(1+\lambda p^2)^3}. \tag{15}$$

把(11)式代入(15)式，可得 G-M dilaton 黑洞事件视界外附近相空间 $d^3\boldsymbol{x}d^3\boldsymbol{p}$ 内的量子态数

$$dN' = \frac{d^3\boldsymbol{x}d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3\left[1+\lambda\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\omega^2\right]^3}. \tag{16}$$

显然，在 G-M dilaton 时空中，广义不确定原理改变了由海森伯不确定原理给出的量子态密度，而且这一改变是能量依赖的. G-M dilaton 黑洞视界附近的量子系统处于高能态中，这里引力对量子不确定原理的影响进而对量子态密度的改变不能被忽略. 而且，在事件视界附近 $p^2\to\infty$，因此可以理解，依据海森伯不确定原理由(12)式给出的在视界附近发散的量子态密度在应用广义不确定原理后可以变得有限，从而可在避免紫外截断的情况下对视界附近量子场的自由能、熵等进行解析计算.

3. G-M dilaton 黑洞的纠缠熵与 brick-wall 模型

由于(12)式给出的态密度在视界附近的发散困难，在原始 brick-wall 模型及其改进后的薄层模型中，均在距视界为 ε 处设立了 brick-wall，这里 ε 为一小量($\varepsilon\ll r_h$). 这样，该 brick-wall 与视界间的量子态在黑洞熵计算中被人为地忽略掉了. 研究表明，在纠缠熵方法中对黑洞熵有贡献的主要就是视界附近薄层内的量子态[12—15]，这样紫外截断的引入就不自然和不自洽. 这里，利用(16)式对处于 G-M dilaton 事件视界与 brick-wall 间量子态的熵进行计算，并把结果与 brick-wall 外量子场的熵相比较，以通过纠缠熵方法更具体地理解黑洞熵的起源和进一步明确 brick-wall 模型中的紫外截断问题.

据(9)和(16)式，且采用 $\hbar=k_B=G=c=1$ 的自然单位制，粒子能量处于 ω 以下的系统微观态数目为

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{dr\,d\theta\,d\varphi\,dp_r\,dp_\theta\,dp_\varphi}{\left[1+\lambda\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\omega^2\right]^3}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{dr\,d\theta\,d\varphi}{\left[1+\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\right]^3}\int\frac{2}{(r-r_+)^{1/2}(r-r_-)^{1/2}}\left(\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}-p_\theta^2-\frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)^{1/2}dp_\theta\,dp_\varphi\\ &= \frac{\omega^3}{6\pi^2}\int_{r_h}^{r_h+\varepsilon}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2\left(1+\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\right)^3}dr\int\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.\end{aligned} \tag{17}$$

要求(17)式根号下非负可定出 p_θ 和 p_φ 的积分上下限.

根据量子统计理论，系统的自由能为

$$F = \frac{1}{\beta}\sum_\omega\ln[1-\exp(-\beta\omega)]. \tag{18}$$

视能级为连续时则求和变成积分，并把(17)式代入，则有

$$\begin{aligned}F(\beta) &= \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}d\Gamma(\omega)\ln[1-\exp(-\beta\omega)]\\ &= -\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(\omega)d\omega}{\exp(\beta\omega)-1}\\ &= -\frac{1}{6\pi^2}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}dr\int\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\\ &\quad\times\int_0^{+\infty}\frac{\omega^3}{\left(1+\lambda\frac{R^2\omega^3}{(r-r_+)(r-r_-)}\right)^3[\exp(\beta\omega)-1]}d\omega.\end{aligned} \tag{19}$$

这样，可得从 r_h 至 $r_h+\varepsilon$ 薄层内量子场的熵为

$$S_{\rm in}=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{\beta^2}{6\pi^3}\int_{r_{\rm h}}^{r_{\rm h}+\varepsilon}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}{\rm d}r\int\sin\theta{\rm d}\theta{\rm d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{\omega^4\exp(\beta\omega)}{[\exp(\beta\omega)-1]^2\left(1+\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\right)^3}{\rm d}\omega$$

$$=\frac{\beta^2}{6\pi^3}\int_{r_{\rm h}}^{r_{\rm h}+\varepsilon}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}{\rm d}r\int\sin\theta{\rm d}\theta{\rm d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{\omega^4}{[\exp(\beta\omega)-1][1-\exp(-\beta\omega)]\left(1+\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\right)^3}{\rm d}\omega.\quad(20)$$

令

$$\Lambda(\omega)=\int_0^{+\infty}\frac{\omega^4{\rm d}\omega}{[\exp(\beta\omega)-1][1-\exp(-\beta\omega)]\left(1+\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\right)^3}=\int_0^{+\infty}f(\omega){\rm d}\omega,\quad(21)$$

且做代换

$$\lambda g_{rr}\omega^2=\frac{\lambda R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}=x^2,$$

考虑到 $f(\omega)$ 为偶函数,则有

$$\Lambda(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega){\rm d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\beta^2\lambda^{3/2}}\left(\frac{(r-r_-)(r-r_+)}{R^2}\right)^{3/2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2x^4{\rm d}x}{\left(\exp\left(\frac{ax}{2}\right)-\exp\left(-\frac{ax}{2}\right)\right)^2(1+x^2)^3}.\quad(22)$$

这里,

$$a=\sqrt{\frac{(r-r_-)(r-r_+)}{\lambda R^2}}\beta.\quad(23)$$

显然,在 G-M dilation 黑洞视界附近,$a\to0$.

取复变函数[33]

$$f(z)=\frac{a^2z^4}{\left(\exp\left(\frac{az}{2}\right)-\exp\left(-\frac{az}{2}\right)\right)^2(1+z^2)^3}.\quad(24)$$

可以看出,$z=0$ 是一可去极点. 当 $a\neq2\pi,4\pi,\cdots$时,$z={\rm i}$ 是一个三阶极点,该极点的留数为

$${\rm Res}f({\rm i})=\frac{1}{\rm i}\frac{a^2}{2^8\sin^4\frac{a}{2}}\left[-a^2\left(1+\cos^2\frac{a}{2}\right)+5a\sin a-6\sin^2\frac{a}{2}\right];\quad(25)$$

$z=\frac{2k\pi{\rm i}}{a}(k=1,2,3,\cdots)$ 是一系列二阶极点,它们的留数为

$${\rm Res}f\left(\frac{2k\pi{\rm i}}{a}\right)=\frac{1}{\rm i}\sum_k\left(\frac{a}{2k\pi}\right)^3\frac{\left(\frac{a}{2k\pi}\right)^2+2}{\left[\left(\frac{a}{2k\pi}\right)^2-1\right]^4}.\quad(26)$$

当 $a\to0$ 时,$f(z)$ 在上半复平面上的留数之和为

$${\rm Res}f(z)=\frac{1}{2\pi{\rm i}}\times\frac{\pi}{16}.\quad(27)$$

这样,据留数定理可得

$$\Lambda(\omega)=\frac{1}{2\beta^2\lambda^{3/2}}\left(\frac{(r-r_-)(r-r_+)}{R^2}\right)^{3/2}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2x^4{\rm d}x}{\left(\exp\left(\frac{ax}{2}\right)-\exp\left(-\frac{ax}{2}\right)\right)^2(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{\pi}{32\beta^2\lambda^{3/2}}\left(\frac{(r-r_-)(r-r_+)}{R^2}\right)^{3/2}.\quad(28)$$

把(28)式代入(20)式,则得 G-M dilaton 黑洞事件视界与 brick-wall 间标量场的熵为

$$S_{\rm in}=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{\beta^2}{6\pi^3}\int_{r_{\rm h}}^{r_{\rm h}+\varepsilon}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}{\rm d}r\times\int\sin\theta{\rm d}\theta{\rm d}\varphi\Lambda(\omega)$$

$$=\frac{4\pi}{192\pi\lambda^{3/2}}\int_{r_{\rm h}}^{r_{\rm h}+\varepsilon}\frac{R^3}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}}{\rm d}r.\quad(29)$$

考虑到 ε 为小量,则有

$$S_{\rm in}\approx\frac{4\pi}{192\pi\lambda^{3/2}}\int_{r_{\rm h}}^{r_{\rm h}+\varepsilon}\frac{R_{\rm h}^2R}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}}{\rm d}r$$

$$=\frac{A_{\rm h}}{192\pi\lambda^{3/2}}\delta,\quad(30)$$

式中 $A_{\rm h}$ 为(3)式所示的事件视界面积,

$$\delta=\int_{r_{\rm h}}^{r_{\rm h}+\varepsilon}\frac{R}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}}{\rm d}r$$

为 brick-wall 距事件视界的固有距离.

取 δ 为小量,且令其具有普朗克长度量级

$$\delta=n\sqrt{\lambda}.\quad(31)$$

按(14)式表示的广义不确定原理的理论要求和(30)式的计算要求,可以确定 n 的取值范围为大于 1 的较小正数.

至此,就可通过计算 brick-wall 内量子场的统计熵,定量得到 G-M dilation 黑洞熵为

$$S_{\text{in}} = \frac{n}{192\pi\lambda}A_{\text{h}}. \tag{32}$$

对于 $r_{\text{h}}+\varepsilon$ 至 L 间的量子场(这里 $L \gg r_{\text{h}}$),类似于(17)式,可得粒子能量处于 ω 以下的系统微观态数目为

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{\left(1+\lambda\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\omega^2\right)^3}$$
$$= \frac{\omega^3}{6\pi^2}\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L} \frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2\left(1+\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\right)^3}\mathrm{d}r\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{33}$$

对于(33)式中的 $\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}$ 项,注意到随着 r 离开 r_+,$\frac{1}{r-r_+}$ 会从无穷大急剧减小,而 λ 是具有普朗克面积量级的小量,因而在视界附近之外的空间,可以把 $\lambda\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}$ 作为小量忽略掉.这样,(33)式可改写为

$$\Gamma(\omega) = \frac{\omega^3}{6\pi^2}\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\mathrm{d}r \times\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{34}$$

实际上这是用(12)式取代了(15)式.相应地,$r_{\text{h}}+\varepsilon$ 至 L 间的所有能量量子场的自由能和熵分别为

$$F(\beta) = \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\Gamma(\omega)\ln(1-\exp(-\beta\omega))$$
$$= -\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(\omega)\mathrm{d}\omega}{\exp(\beta\omega)-1}$$
$$= -\frac{1}{6\pi^2}\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\mathrm{d}r \times\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{\omega^3}{\exp(\beta\omega)-1}\mathrm{d}\omega,$$
$$= -\frac{1}{6\pi^2}\times4\pi\times\frac{\pi^4}{15\beta^4} \times\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\mathrm{d}r, \tag{35}$$

$$S = \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}$$
$$= \frac{8\pi^3}{45\beta^3}\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\mathrm{d}r$$
$$= \frac{8\pi^3L^3}{135\beta^3}+\frac{r_+-r_-}{360\varepsilon} + \left(-\frac{1}{180}+\frac{r_+(r_+-r_-)}{60(r_+^2-D^2)}\right)\ln\frac{L}{\varepsilon}. \tag{36}$$

(36)式中仅第二项与视界面积成正比,而第一项和第三项可分别解释为黑洞外辐射气体在平直时空背景上的熵和对数修正项,与这些对应的自由度可被认为并不通过视界与黑洞内的量子态相关联,因而应当被排除在黑洞的纠缠熵之外.又注意到 ε 为小量,有

$$\delta = \int_{r_{\text{h}}}^{r_{\text{h}}+\varepsilon}\sqrt{\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}}\mathrm{d}r$$
$$\approx \int_{r_{\text{h}}}^{r_{\text{h}}+\varepsilon}\sqrt{\frac{R_h^2}{r_+-r_-}}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r-r_{\text{h}})}}$$
$$= 2\sqrt{\frac{R_{\text{h}}^2\varepsilon}{r_+-r_-}}. \tag{37}$$

这样,把(37)式代入(36)式中的第二项,则可通过计算 brick-wall 外量子场的统计熵,定量得到 G-M dilaton 黑洞的纠缠熵为

$$S_{\text{out}} = \frac{r_+-r_-}{360}\frac{4R_{\text{h}}^2}{(r_+-r_-)\delta^2} = \frac{1}{360\pi n^2\lambda}A_{\text{h}}. \tag{38}$$

4. 结果及讨论

按纠缠熵理论,黑洞熵起源于黑洞事件视界内外量子场的相互关联,而处于视界外附近的高密度量子态均与黑洞内部自由度有明显关联,因而会对

黑洞的纠缠熵有重要贡献.事件视界附近是强引力空间,而引力会增加粒子坐标和动量的不确定度,进而改变相空间内的量子态密度,且这一改变在强引力空间是显著的,它可以使得在原始 brick-wall 模型中视界附近发散的自由能和熵变得收敛.这样,在 G-M dilaton 时空中,按纠缠熵方法,并考虑引力场的量子化效应,在避免紫外截断的情况下,本文就对原始 brick-wall 模型中忽略掉的处于事件视界与 brick-wall 之间量子态的熵进行了计算,且定量得到了 brick-wall 内量子场的熵与 G-M dilaton 黑洞事件视界面积成正比的结论.这具体表明,黑洞视界外附近的量子场在黑洞的纠缠熵计算中是不应该被忽略的,且对该处的量子场需要考虑引力引起的不确定性.在弱引力下,引力场的量子化效应可以忽略,此时广义不确定原理会还原到海森伯不确定原理.比如令 $\lambda=0$,则(15)式就变成了(12)式.由于 brick-wall 外部的引力相对较弱,这样,就可以用(12)式计算其间的量子态数、自由能和熵.结果表明,brick-wall 内外量子场的熵是一致的,均与 G-M dilaton 黑洞的事件视界面积成正比,而前者为后者的 $\frac{45}{24}n^3$ 倍.

黑洞熵是黑洞事件视界的内禀性质,从纠缠熵的观点看,这可以理解为源于黑洞内外自由度被分离从而形成纠缠态正是因为事件视界的存在.这样,作为紧贴在黑洞事件视界薄层内量子场的熵,熵表达式(32)比远离视界的 brick-wall 外量子场的熵表达式(38),可更准确地反映黑洞熵的本质.由于计算均离开了事件视界,(32)和(38)式都会与 G-M dilaton 黑洞的标准 B-H 熵有偏离,但由于(32)式计算且仅计算了事件视界附近的量子场,而(38)式只计算了距事件视界远处的量子场,后者对黑洞熵的偏离就会比前者明显得多.这可解释为随着远离事件视界,黑洞外的自由度与黑洞内的自由度的关联会减弱,且会有与黑洞内无关联的自由度出现,而黑洞内外量子态的纠缠可以理解为是通过引力场实现的.讨论本文的计算结果可进一步较具体地看到这一点.

首先,(38)式是(36)式通过去除第一和第三项得到的,这两项被分别解释为黑洞外辐射气体在平直时空背景上的熵和对数修正项.从纠缠熵方法看,可理解为这两项是与视界进而与黑洞内均无关联的因素所产生的,因而被排除在黑洞的纠缠熵之外.而(32)式计算的是黑洞视界外附近强引力场中的自由度,推导中没有出现类似(36)式中与视界和黑洞内无关联的因素,因而不存在多余项,能比较直接和自然地通过计算这些自由度的统计熵得到其 B-H 熵.这表明,黑洞事件视界外附近强引力场中的所有自由度均与黑洞内的自由度处于纠缠态中,而距事件视界较远处的量子场中的自由度仅有部分与黑洞内自由度相关联.以上这些也进一步表明,brick-wall 模型中的 B-H 熵就是纠缠熵.

其次,能否较理想地得到(1)式的标准 S_{BH} 公式,是判断黑洞熵计算方法优劣的重要依据.由于 $n>1$,由(32)式显见

$$S_{\mathrm{in}}=\frac{n}{192\pi\lambda}A_{\mathrm{h}}>\frac{1}{192\pi\lambda}A_{\mathrm{h}}. \tag{39}$$

因而,取合适的截断就可以通过 S_{in} 得到标准的 S_{BH}.实际上,取 $n=48\pi$,就可得到

$$S_{\mathrm{in}}=\frac{1}{4\lambda}A_{\mathrm{h}}. \tag{40}$$

这样,令 $\lambda=l_{\mathrm{P}}^2$,(40)式就是(1)式所示的 G-M dilaton 黑洞的标准 B-H 熵公式.而此时,据(38)式有

$$S_{\mathrm{out}}=\frac{1}{360\pi\times(48\pi)^2\lambda}A_{\mathrm{h}}, \tag{41}$$

即该截断下 S_{out} 是标准 S_{BH} 的 $\frac{1}{90\times(48\pi)^3}$ 倍.而且,(38)式说明

$$S_{\mathrm{out}}=\frac{1}{360\pi n^2\lambda}A_{\mathrm{h}}<\frac{1}{360\pi\lambda}A_{\mathrm{h}}. \tag{42}$$

由此可知,无论取什么样的截断都不会从 brick-wall 外部的量子场得到标准的 S_{BH}.如要获得 $S_{\mathrm{out}}=\frac{1}{4\lambda}A_{\mathrm{h}}$,则需 $n^2=\frac{1}{90\pi}$,即 $\delta=\sqrt{\frac{1}{90\pi}\lambda}$,但由(14)式显见,这是广义不确定原理所不允许的,即有如下表达式成立:

$$S_{\mathrm{out}}\neq\frac{A_{\mathrm{h}}}{4\lambda}=\frac{A_{\mathrm{h}}}{4l_{\mathrm{P}}^2}. \tag{43}$$

还有,如要 S_{out} 与 S_{in} 相等,需要 $\frac{45}{24}n^3=1$,即 $n=\left(\frac{24}{45}\right)^{1/3}<1$,而这同样是不可能的,因而有

$$S_{\mathrm{out}}\neq S_{\mathrm{in}}. \tag{44}$$

这可以解释为,由于 S_{out} 与 S_{in} 分别来自黑洞事件视界外不同处的量子场,这两处的量子场与视界和黑洞内部的特征态关联程度不同,根据这两处量子态分别计算得到的黑洞纠缠熵就不会等同.

另外,当 n 变小时 brick-wall 内的量子态数减少,

S_{in}就会变小，正如(32)式所表示的那样；同时 brick-wall 外量子态数等量增加，S_{out}将变大，也如(38)式所示. 例如，当把 brick-wall 从距视界固有长度 $48\pi\sqrt{\lambda}$处推到距视界固有长度为(14)式所示的最小距离$\sqrt{\lambda}$处，即令截断 $\delta=\sqrt{\lambda}$，据(32)式得到

$$S'_{\text{in}} = \frac{1}{192\pi\lambda}A_{\text{h}}, \tag{45}$$

从而可得 S_{in}的减少量为

$$S_{\text{in}} - S'_{\text{in}} = \left(\frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{192\pi\lambda}\right)A_{\text{h}}.$$

此时，如把 $\delta=\sqrt{\lambda}$代入(38)式，则有

$$S'_{\text{out}} = \frac{1}{360\pi\lambda}A_{\text{h}},$$

可得 S_{out}的增加量为

$$S'_{\text{out}} - S_{\text{out}} = \left(\frac{1}{360\pi\lambda} - \frac{1}{360\pi\times(48\pi)^2\lambda}\right)A_{\text{h}}.$$

这样就会出现 $S_{\text{in}} - S'_{\text{in}} \neq S'_{\text{out}} - S_{\text{out}}$ 的不合理结果. 出现这一错误的原因在于(38)式是按(12)式的态密度公式计算的，当把 $r_{\text{h}}+\varepsilon-\sigma$—$r_{\text{h}}+\varepsilon$ 薄层内的量子场包括在 brick-wall 外部时，由于该薄层属强引力空间，须考虑量子引力效应，因而要使用(15)式的态密度公式. 这里，ε 是与固有长度 $\tau=48\pi\sqrt{\lambda}$对应的径向坐标长度，σ 是与固有长度 $\zeta=(48\pi-1)\sqrt{\lambda}$对应的径向坐标长度. 而把 $r_{\text{h}}+\varepsilon$ 处作为量子引力效应考虑与否的分界线，可看作是基于从(33)式到(34)式转化分析基础上的一个工作假定. 这样，$r_{\text{h}}+\varepsilon-\sigma$ 至 L 间量子场的量子态数应为

$$\begin{aligned}
\Gamma(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon-\sigma}^{r_{\text{h}}+\varepsilon}\mathrm{d}r + \int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L}\mathrm{d}r\right]\int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon-\sigma}^{r_{\text{h}}+\varepsilon}\mathrm{d}r\int\frac{\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\left[1+\lambda\dfrac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\omega^2\right]} \\
&\quad\times\int\frac{2}{(r-r_+)^{1/2}(r-r_-)^{1/2}}\left(\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)} - p_\theta^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)^{1/2}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}_p \\
&\quad+\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L}\mathrm{d}r\int\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int\frac{2}{(r-r_+)^{1/2}(r-r_-)^{1/2}}\left(\frac{R^4\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)} - p_\theta^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)^{1/2}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi \\
&= \frac{\omega^3}{6\pi^2}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\left[\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon-\sigma}^{r+\varepsilon}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2\left(1+\lambda\dfrac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\right)^3}\mathrm{d}r\right. \\
&\quad\left.+\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon}^{L}\frac{R^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\mathrm{d}r\right].
\end{aligned} \tag{46}$$

把(46)式代入自由能公式和统计熵公式

$$F(\beta) = \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\Gamma(\omega)\ln[1-\exp(-\beta\omega)],$$

$$S = \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta},$$

并对 $r_{\text{h}}+\tau-\sigma$—$r_{\text{h}}+\tau$ 和 $r_{\text{h}}+\tau$—L 的量子场分别使用(32)和(38)式的方法，且仅考虑与黑洞内自由度有关联的自由度，则可得到通过对 brick-wall 外量子场的计算所得到的 G-M dilaton 黑洞的纠缠熵为

$$\begin{aligned}
S'_{\text{out}} &= \frac{1}{192\pi\lambda^{3/2}}\int_{r_{\text{h}}+\varepsilon-\sigma}^{r_{\text{h}}+\varepsilon}\frac{R_{\text{h}}^2R}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}}\mathrm{d}r + \frac{r_+-r_-}{360\varepsilon} \\
&= \left(\frac{\zeta}{192\pi\lambda^{3/2}} + \frac{1}{360\pi\tau^2}\right)A_{\text{h}} \\
&= \left(\frac{48\pi-1}{192\pi\lambda} + \frac{1}{360\pi\times(48\pi)^2\lambda}\right)A_{\text{h}}.
\end{aligned} \tag{47}$$

显然，这样就可得到 $S_{\text{in}} - S'_{\text{in}} = S'_{\text{out}} - S_{\text{out}} = \left(\frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{192\pi\lambda}\right)A_{\text{h}}$ 的合理结果.

5.结 论

G-M dilaton 黑洞事件视界内外自由度的纠缠是其 B-H 熵的起源.在按纠缠熵方法计算 G-M dilaton 黑洞的 B-H 熵时,与黑洞内量子态有强关联的黑洞事件视界外附近的量子态有概念性的重要作用,brick-wall 模型中的紫外截断是不合理的.在通过远离事件视界的 brick-wall 外部的量子场计算黑洞熵时,也需要通过考虑量子态中与黑洞内有关联的因素,且把计算中出现的无关联项去除,才能得到黑洞熵与视界面积成正比的结论.这些均体现了纠缠熵方法的理论要求.考虑引力场的量子化效应后,视界附近的量子场是有限的,brick-wall 模型中的紫外截断是不必要的.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333
[2] Hawking S W 1975 *Commun*. *Math*. *Phys*. **43** 199
[3] Bombelli L, Rabinder K K, Lee J *et al* 1986 *Phys*. *Rev*. D **34** 373
[4] 't Hooft G 1985 *Nucl*. *Phys*. B **256** 727
[5] Ghosh A, Mitra P 1994 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **73** 2521
[6] Lee H, Kim S W, Kim W T 1996 *Phys*. *Rev*. D **54** 3904
[7] Ho J, Kim W T, Park Y J *et al* 1997 *Class*. *Quantum Grav*. **14** 2617
[8] Jing J L 1998 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **37** 1441
[9] Liu W B, Zhu J Y, Zhao Z 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1822 (in Chinese) [刘文彪、朱建阳、赵 峥 2000 物理学报 **49** 1822]
[10] Li X, Zhao Z 2001 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **18** 463
[11] Liu W B, Zhao Z 2001 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **18** 310
[12] Gao C J, Liu W B 2000 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 2221
[13] Mukohyama S W, Israel W 1998 *Phys*. *Rev*. D **58** 104005
[14] Jing J L 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 459
[15] Shen Y G 2002 *Phys*. *Lett*. B **537** 187
[16] Shen Y G, Gao C J 2002 *Gen*. *Rel*. *Grav*. **34** 1035
[17] Li C A, Wei X Q, Meng Q M *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2173 (in Chinese) [李传安、魏显起、孟庆苗等 2002 物理学报 **51** 2173]
[18] Zhu B, Yao G Z, Zhao Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2656 (in Chinese) [朱 斌、姚国政、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2656]
[19] Song T P, Yao G Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1144 (in Chinese) [宋太平、姚国政 2002 物理学报 **51** 1144]
[20] Li C A, Meng Q M, Su J Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1897 (in Chinese) [李传安、孟庆苗、苏九清 2002 物理学报 **51** 1897]
[21] Li G Q 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3005 (in Chinese) [李固强 2005 物理学报 **54** 3005]
[22] He H, Zhao Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2661 (in Chinese) [贺 晗、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2661]
[23] Zhang J Y, Zhao Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2399 (in Chinese) [张静仪、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2399]
[24] Sun M C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1350 (in Chinese) [孙鸣超 2003 物理学报 **52** 1350]
[25] Song T P, Hou C X 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1398 (in Chinese) [宋太平、侯晨霞 2002 物理学报 **51** 1398]
[26] Kempt A, Mangano G, Robert B M 1995 *Phys*. *Rev*. D **52** 1108
[27] Garay L J 1995 *Int*. *J*. *Mod*. *Phys*. A **10** 145
[28] Cheng L N, Minic D, Okamura N *et al* 2002 *Phys*. *Rev*. D **65** 125028
[29] Li X 2002 *Phys*. *Lett*. B **537** 306
[30] Li X 2002 *Phys*. *Lett*. B **540** 9
[31] Han Y W, Hong Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3270 (in Chinese) [韩亦文、洪 云 2004 物理学报 **53** 3270]
[32] Liu C Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1977 (in Chinese) [刘成周 2005 物理学报 **54** 1977]
[33] Sun X F, Liu W B 2004 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **19** 677
[34] Garfinkle D, Horowitz G T, Strominger A 1991 *Phys*. *Rev*. D **43** 3140

Entanglement entropy of the Gibbons-Maeda dilaton black hole*

Liu Cheng-Zhou[1)2)†]　Zhao Zheng[1)]

1)（Department of Physics，Beijing Normal University，Beijing　100875，China）

2)（Department of Physics and Electronics Science，Binzhou College，Binzhou　256600，China）

（Received 2 August 2005；revised manuscript received 24 October 2005）

Abstract

By using the entanglement entropy method，in the Gibbons-Maeda（G-M） dilaton space-time，the statistical entropy of the quantum field in a thin film is calculated and the Bekenstein-Hawking entropy of the G-M dilaton black hole is obtained. Here，the quantum field is entangled with the quantum states in the black hole and the thin film sticks to the event horizon from outskirt of the black hole. Taking into account the effect of the generalized uncertainty principle on the quantum state density，the difficulty of the divergence of the state density near the event horizon in the brick-wall model is removed. Calculating the statistical entropy of the degrees of freedom entangling to the quantum states in the black hole in the quantum field outside the brick-wall and comparing the result to the entropy from the degrees of freedom inside brick-wall，we see that the two results are consistent but the latter may embody preferably the essence of black hole entropy. Using the residue theorem，the integration difficulty in the calculation is overcome and the result of the paper is founded quantitatively. These calculation and discussion imply that the high density quantum states near the event horizon are strongly correlated with the quantum states in black hole and the ultraviolet cut-off in the brick-wall model is not reasonable. The quantization of gravity field should be considered in the high energy quantum field near the event horizon and the ultraviolet cut-off is not necessary. In the quantum field inside and outside the brick-wall，the degrees of freedom contributing to the black hole entropy are just those correlating with the degrees of freedom in the black hole.

Keywords：entanglement entropy，black hole，generalized uncertainty principle，cut-off

PACC：0420，0470

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No. 10375008）.

† E-mail：czlbj20@yahoo.com.cn