第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1634-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.4,April,2006


# 相互作用对玻色气体热力学性质及稳定性的影响

袁都奇

(宝鸡文理学院物理系,宝鸡 721007)

(2005 年 7 月 18 日收到;2005 年 8 月 16 日收到修改稿)

根据由赝势法得到的非理想玻色气体的自由能和状态方程,研究了相互作用对凝聚温度的影响.从热力学角度揭示了存在引力作用时定压热容量、等温压缩系数、定压膨胀系数的反常热力学特性.研究了引力作用下玻色气体系统的不稳定性,给出了不稳定性的温度判据和粒子数密度判据.

**关键词:**相互作用,玻色气体,热力学性质,不稳定性判据

**PACC:**0530,6500,7430E

## 1. 引　　言

自 1995 年以来,由于囚禁超冷玻色气体实验的成功[1—4]以及囚禁超冷费米气体实验的进展[5—7],使得超冷量子气体理论成为人们关注的研究领域.对玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)的理论研究是多方面的,而相互作用对 BEC 的影响是备受关注的研究领域之一.相互作用对 BEC 的临界温度以及凝聚体的稳定性有着重要影响[8,9].研究表明,对于空间均匀的非理想玻色气体,若 s 波散射长度 $a>0$,即相互作用为排斥势时,粒子波函数的非线性薛定谔方程有稳态解,可以形成稳定的凝聚;若 s 波散射长度 $a<0$,即相互作用为吸引势时,会导致极其复杂的现象发生,不能形成稳定的 BEC,这是因为粒子间的有效吸引作用将引起凝聚体的崩塌.理论又预期若气体中的原子数充分少,原子间的相互吸引作用非常弱且处于外场中时,凝聚体可以出现亚稳态[10];若上述条件不满足时,凝聚体的衰变和崩塌也有学者讨论过[11—13].文献[14]对处于重力场光晶格中的 BEC 的'Wannier-Stark 定域'方式和'Landau-Zener 隧穿'方式的量子隧穿进行了理论和数值研究,给出了与实验数据符合较好的亚稳态的衰变率及其对温度的依赖关系.文献[8]的研究还表明,具有相互吸引作用的原子体系在球对称简谐势阱中的 BEC 可以呈现双稳态.

本文依据由赝势法得到的非理想玻色气体的自由能和状态方程,借助热力学理论研究相互作用对于空间均匀的非理想玻色气体热力学性质及系统状态稳定性的影响.给出相互作用对于临界温度的影响解析表达式.从热力学角度揭示存在引力作用时玻色气体定压热容量、定压膨胀系数、等温压缩系数的反常热力学特性.研究相互作用对系统稳定性的影响,给出引力作用时系统不稳定性的温度判据以及粒子数密度判据.

## 2. 相互作用对临界温度的影响

考虑处于体积 $V$ 内 $N$ 个存在弱相互作用的无自旋的玻色粒子组成的气体系统,并设无外场存在、系统是空间均匀的.$a$ 为粒子间二体相互作用的散射波长度,满足弱相互作用条件

$$\frac{|a|}{\lambda}\ll 1,\qquad \frac{|a|}{v^{1/3}}\ll 1, \tag{1}$$

式中,$\lambda=\dfrac{h}{(2\pi mkT)^{1/2}}$为热波长,$h$ 为普朗克常数,$k$ 为玻尔兹曼常数,$m$ 为粒子质量,$T$ 为热力学温度,$v=\dfrac{V}{N}$为每个粒子平均占据的体积.满足上述条件的非理想玻色气体的自由能 $A$ 为[15]

$$\frac{A}{N}=\begin{cases}\dfrac{A_{\rm id}}{N}+\dfrac{4\pi a\hbar^2}{mv} & (\bar{\xi}=0), \quad (2)\\[2ex] \dfrac{A_{\rm id}}{N}+\dfrac{2\pi a\hbar^2}{mv}\left(1+\dfrac{2v}{v_{\rm c}}-\dfrac{v^2}{v_{\rm c}^2}\right) & (\bar{\xi}>0), \quad (3)\end{cases}$$

式中，$A_{\text{id}}$表示理想玻色气体的自由能 $A(N)$，

$$v_c = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1)} = \frac{\lambda^3}{\xi(3/2)},$$

$\xi(n) = g_n(1)$为黎曼-泽塔函数.方程的适用条件中，$\xi = \frac{n_0}{N} = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, 1$ 表示处于 $P = 0$ 状态的粒子分数. $\bar{\xi} = 0$ 相应于系统的"气相"($T > T_c$)，$\bar{\xi} > 0$ 相应于系统的"凝聚相"($T < T_c$)，以下我们改用温度表示公式的适用范围.利用自由能的表达式求得非理想玻色气体的压强为[15]

$$P = \begin{cases} \dfrac{1}{V}\left[NkT\dfrac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} + \dfrac{4N^2\pi a\hbar^2}{mV}\right] & (T > T_c), \quad (4) \\ \dfrac{kT}{\lambda^3}\xi\left(\dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{2N^2\pi a\hbar^2}{mV^2}\left(1 + \dfrac{v^2}{v_c^2}\right) & (T < T_c). \quad (5) \end{cases}$$

(4)，(5)两式中的第一项均为相应温度范围内理想玻色气体的压强.

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x$$

为玻色积分，其中 $z$ 是无相互作用玻色子的"虚构"系统的逸度，即为理想玻色气体的逸度，$0 \leqslant z \leqslant 1$.

利用(4)或(5)式可以求得非理想玻色气体的临界温度与散射波长度及压强之间满足的关系.注意到在弱相互作用条件下第二项很小，将起微扰作用，且在临界温度状态 $g_n(z) = \xi(n)$，与体积无关，为此可先求出未微扰情况下临界温度的零级近似，进而求得具有相互作用时临界温度的一级近似为

$$T_c = \frac{h^{6/5}p^{2/5}}{(2\pi m)^{3/5}k\left[\xi\left(\frac{5}{2}\right)\right]^{2/5}} \times \left[1 + \frac{2^{6/5}a\left[\xi\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\left[\xi\left(\frac{5}{2}\right)\right]^{6/5}}\frac{(\pi m)^{1/5}p^{1/5}}{h^{2/5}}\right]^{-2/5}. \quad (6)$$

将(6)式与理想玻色气体($a = 0$)的结果[16]

$$T_c = \frac{h^{6/5}p^{2/5}}{(2\pi m)^{3/5}k\left[\xi\left(\frac{5}{2}\right)\right]^{2/5}} \quad (7)$$

进行比较，可以看出：存在吸引作用的玻色体系其 $T_c$ 高于理想玻色气体；存在排斥力作用的玻色体系其 $T_c$ 低于理想玻色气体.

## 3. 相互作用对有关热力学性质的影响

下面研究相互作用对玻色气体定压热容量、定压膨胀系数、等温压缩系数等热力学性质的影响，讨论存在引力相互作用时，系统上述热力学量的反常性质及其对应的温度条件和粒子数密度条件.

### 3.1. 定压热容量

利用(2)，(3)两式求得非理想玻色气体的内能及定容热容量分别为

$$U = -T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right)\right]_{N,V}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{2}NkTG_1 + \dfrac{N^2B}{V} & (T > T_c), \quad (8) \\ \dfrac{3}{2}NkT\dfrac{v}{\lambda^3}\xi\left(\dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{NB}{2v} - \dfrac{NB}{2\lambda^3}\xi\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{NBv}{\lambda^6}\left[\xi\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^2 & (T < T_c), \quad (9) \end{cases}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \begin{cases} \left(\dfrac{15}{4}G_1 - \dfrac{9}{4}G_2\right)Nk & (T > T_c), \quad (10) \\ \dfrac{15}{4}Nk\dfrac{v}{\lambda^3}\xi\left(\dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{3}{4}\dfrac{NB}{T\lambda^3}\xi\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{3NBv}{T\lambda^6}\left[\xi\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^2 & (T < T_c), \quad (11) \end{cases}$$

式中 $B = \frac{4\pi a\hbar^2}{m}$，反映了粒子间的二体相互作用. $B = 0$ 表示理想玻色气体；$B > 0$ 表示斥力作用；$B < 0$ 表示引力作用.

$$G_1 = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)},$$

$$G_2 = \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}.$$

在求解相关热力学性能时，与物态方程有关的热力学偏导数可直接由(4)，(5)两式求得，

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \begin{cases} \frac{Nk}{V}\left(\frac{5}{2}G_1 - \frac{3}{2}G_2\right) & (T > T_c), \quad (12) \\ \frac{5}{2}\frac{k}{\lambda^3}\xi\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2}\frac{B}{T\lambda^6}\left[\xi\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2 & (T < T_c), \quad (13) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \begin{cases} -\frac{N}{V^2}(kTG_2 + 2nB) & (T > T_c), \quad (14) \\ -\frac{N^2 B}{V^3} & (T < T_c), \quad (15) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Big/ \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

$$= \begin{cases} \frac{kV\left(\frac{5}{2}G_1 - \frac{3}{2}G_2\right)}{kTG_2 + 2nB} & (T > T_c), \quad (16) \\ \frac{1}{2}\frac{\left[\frac{5k}{\lambda^3}\xi\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{3B}{T\lambda^6}\left(\xi\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2\right]V^3}{N^2 B} & (T < T_c). \quad (17) \end{cases}$$

这里 $n = \frac{N}{V}$ 为粒子数密度.利用以上结果，求得弱相互作用玻色气体的定压热容量为

$$C_P = C_V + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{5}{2}G_1 - \frac{3}{2}G_2\right)\left[\frac{3}{2} + \frac{kT\left(\frac{5}{2}G_1 - \frac{3}{2}G_2\right)}{kTG_2 + 2nB}\right]Nk & (T > T_c), \quad (18) \\ \frac{15}{4}Nk\frac{v}{\lambda^3}\xi\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3NB}{T\lambda^3}\xi\left(\frac{3}{2}\right)\left[\frac{1}{4} - \frac{v\xi\left(\frac{3}{2}\right)}{\lambda^3}\right] + \frac{NTv}{4n^2 B}\left[\frac{5k}{\lambda^3}\xi\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{3B}{T\lambda^6}\left(\xi\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2\right]^2 & (T < T_c). \quad (19) \end{cases}$$

注意到 $T \to T_c$ 时，$\xi\left(\frac{1}{2}\right)$ 发散，$G_2 = 0$.由此可知，对于理想玻色气体 $C_{PT_c+0}$ 发散.对斥力作用的玻色气体($B > 0$)，由(10)，(11)式以及(18)，(19)式可知，在所有温度范围总有 $C_P > C_V$.对引力作用的玻色气体($B < 0$)，由上述关系式以及 $B$ 的定义可知，若粒子数密度一定，当温度满足

$$T < 2n\frac{|a|h^2}{\pi mk}\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

时，系统将出现 $C_P < C_V$ 的反常情况，这显然是违反热力学第一定律的，所以这种状态不可能存在.而当

$$T > 2n\frac{|a|h^2}{\pi mk}\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

时，系统是满足 $C_P > C_V$ 的正常状态.我们定义一个特征温度 $T_s$，

$$T_s = \frac{2n|a|h^2}{\pi mk}\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}. \quad (20)$$

显然 $T_s > T_c$.由上述讨论可知粒子数密度一定时，$T < T_s$ 的状态不可能存在.通过(10)，(18)式以及 $B$ 的定义可知，对存在引力作用的玻色气体，温度一定时(该温度满足 $T > T_c$)，存在一个粒子数密度的特征值 $n_c$，

$$n_c = \frac{\pi mkT}{2|a|h^2}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}. \quad (21)$$

当 $n > n_c$ 时 $C_P < C_V$，而 $n < n_c$ 则对应 $C_P > C_V$ 的

正常状态.

### 3.2. 定压膨胀系数

利用(16),(17)式求得非理想玻色气体的定压膨胀系数

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \begin{cases} \dfrac{k\left(\frac{5}{2}G_1 - \frac{3}{2}G_2\right)}{kTG_2 + 2nB} & (T > T_c), \quad (22) \\ \dfrac{\frac{5k}{\lambda^3}\xi\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{3B}{\lambda^6 T}\left[\xi\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{2n^2 B} & (T < T_c). \quad (23) \end{cases}$$

对理想玻色气体($B = 0$),由(22),(23)式可知,若 $T \leqslant T_c$ 时 $\alpha$ 发散.对非理想玻色气体,若为斥力作用时,$\alpha > 0$;$T \to 0$ 时,$\alpha \to 0$.若为引力作用,在 $T < T_s$ 或 $n > n_c$ 时,系统将出现 $\alpha < 0$ 的反常热力学性质.特征温度 $T_s$ 和粒子数密度的特征值 $n_c$ 再次作为系统存在引力作用时反常热力学性质的判别准则.

### 3.3. 等温压缩系数

利用(14),(15)式求得非理想玻色气体的等温压缩系数为

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \begin{cases} \dfrac{1}{n(kTG_2 + 2nB)} & (T > T_c), \quad (24) \\ \dfrac{1}{n^2 B} & (T < T_c), \quad (25) \end{cases}$$

由(24),(25)式可知,理想玻色气体在 $T \leqslant T_c$ 时 $\kappa_T$ 发散.对非理想玻色气体,若系统存在斥力作用时 $\kappa_T > 0$;若系统存在引力作用,且 $T < T_s$ 或 $n > n_c$ 时,系统将出现 $\kappa_T < 0$ 的反常情况.

## 4. 相互作用对稳定性的影响及不稳定性判据

不同于从粒子波函数的非线性薛定谔方程解的稳定性角度研究相互作用对于玻色气体系统稳定性影响的方法,本文从热力学角度研究相互作用对玻色气体系统稳定性的影响,并给出引力作用时系统不稳定性的温度判据和粒子数密度判据.这不仅有助于从宏观角度对 BEC 的理解与认识,也便于从宏观角度对不稳定性进行判别.

非理想玻色气体系统存在斥力作用时($B > 0$),由(14),(15)式可知,$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0$,对(10),(11)式分析可知,$B > 0$ 时 $C_V > 0$,这说明系统是稳定的.若系统存在引力作用时($B < 0$),由(14),(15)式可得,当 $T < T_s$ 或 $n > n_c$ 时 $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T > 0$,系统将出现不稳定性.

综上所述,无外场时,存在斥力作用的玻色气体系统是稳定的;而存在引力作用的玻色气体系统在一定的条件下会出现不稳定性,系统出现不稳定性的温度判据为

$$T < T_s. \tag{26}$$

出现不稳定性的粒子数密度判据为

$$n > n_c. \tag{27}$$

由于 $T_s > T_c$,所以存在引力作用的空间均匀的非理想玻色气体不仅不能形成 BEC,而且只有在 $T > T_s$ 或 $n < n_c$ 的状态才是稳定的.


[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198

[2] Bradley C C, Sackett C A ,Tollett J J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

[3] Dauis K B, Mewes M O, Andrew M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969

[4] Fried D G, Killian T C, Willmann L *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3811

[5] Mcalexander M I, Abraham E R I, Ritchie N W M *et al* 1995 *Phys. Rev.* A **51** R871

[6] Cataliotti F S, Cornell E A, Fort C *et al* 1998 *Phys. Rev.* A **57** 1136

[7] Demarco B, Jin D S 1999 *Science* **285** 1703

[8] Yan K Z, Tan W H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 (in Chinese) [阎珂柱、谭维翰 2000 物理学报 **49** 1909]

[9] Wang C, Yan K Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1284 (in Chinese) [王

、阎珂柱 2004 **物理学报** **53** 1284]

[10] Kagan Y, Shlyapnikov G V, Walravan J T M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2670

[11] Baym G, Pethick C J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 6

[12] Dodd R J, Edwards M, Williams C J *et al* 1996 *Phys. Rev.* A **54** 661

[13] Shuryak E V *Phys. Rev.* A **54** 3151

[14] Liu W M, Fan W B, Zheng W M *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408

[15] Pathria R K 1972 *Statistical Mechanics* (Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig: Pergamon Press) p320

[16] Pan Y Z, Chen L X 2003 *Chin. J. Low Temp. Phys.* **25** 110 (in Chinese) [潘玉灼、陈丽璇 2003 **低温物理学报** **25** 110]

# The influence of weak interaction on thermodynamic properties and the stability of imperfect Bose gas

Yuan Du-Qi

(*Department of Physics, Baoji College of Arts and Science, Baoji* 721007, *China*)

(Received 18 July 2005; revised manuscript received 16 August 2005)

Abstract

Using the free energy and the equation of state for an imperfect Bose gas, the analytical expression between the critical temperature and the length of dispersion wave and the pressure for the imperfect Bose gas is derived. The unusual properties of the specific heat at constant pressure and the expansion coefficient at constant pressure and isothermal compressibility by the attractive force for the imperfect Bose gas are revealed. The instability arising from the attractive force is pointed out, and the temperature criterion and particle density criterion of instability is given for the imperfect Bose gas under the action of attraction.

**Keywords**: interaction, Bose gas, thermodynamical properties, criterion of instability

**PACC**: 0530, 6500, 7430E