

谐和激励与有界噪声作用下具有同宿和异宿轨道的 Duffing 振子的混沌运动*

杨晓丽¹⁾²⁾ 徐 伟¹⁾ 孙中奎¹⁾

1) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

2) 陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062)

(2004 年 12 月 28 日收到 2005 年 12 月 9 日收到修改稿)

研究了具有同宿轨道、异宿轨道的双势阱 Duffing 振子在谐和激励与有界噪声摄动下的混沌运动. 基于同宿分叉和异宿分叉, 由 Melnikov 理论推导了系统出现混沌运动的必要条件及出现分形边界的充分条件. 结果表明: 当 Wiener 过程的强度参数大于某一临界值时, 噪声增大了诱发混沌运动的有界噪声的临界幅值, 相应地缩小了参数空间的混沌域, 且产生混沌运动的临界幅值随着噪声强度的增大而增大. 同时数值计算了最大 Lyapunov 指数, 由最大 Lyapunov 指数为零从另一角度得到了系统出现混沌运动的有界噪声的临界幅值. 发现在 Wiener 过程的强度参数大于某一临界值时, 有界噪声的临界值也随着噪声强度的增大而增大. 进一步用 Poincaré 截面研究了有界噪声对系统的影响, 结果表明, 当 Wiener 过程的强度参数小于某一临界值时, 混沌吸引子扩散的面积随噪声强度的增大而有所增大.

关键词: 混沌, 同宿和异宿分叉, 随机 Melnikov 方法, 最大 Lyapunov 指数

PACC: 0545, 0547

1. 引 言

考虑谐和激励与有界噪声摄动下的 Duffing 振子, 其运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \alpha x^5 - \delta y + d_1 \cos \Omega_1 t \\ &\quad + d_2 \xi(t), \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\alpha > 0$ 为非线性强度, $\delta > 0$ 为阻尼系数, $d_i > 0$ ($i = 1, 2$) 分别为谐和激励和有界噪声的幅值, $\xi(t)$ 为有界噪声^[1], 即

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \cos(\Omega_2 t + \psi), \\ \psi &= \sigma B(t) + \Gamma, \end{aligned}$$

式中, Ω_2 为中心频率, $B(t)$ 为标准的 Wiener 过程, σ 为频率的随机扰动强度, Γ 为 $[0, 2\pi)$ 均匀分布的随机变量. $\xi(t)$ 谱密度函数为

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sigma^2}{4(\omega - \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right).$$

方程 (1) 有广泛的应用背景, 物理学、工程技术以及生物学等领域中的许多问题都可以模型化为该方程.

目前非线性系统在周期或噪声摄动下的混沌运动越来越受到人们的关注^[2,3], 系统 (1) 的一些特例已有广泛的研究. 例如: 当 $\xi(t)$ 也为谐和激励时, Jing 等^[4] 用二阶平均法和 Melnikov 方法讨论了在周期摄动和拟周期摄动下系统复杂的动力学行为. 由于激励往往具有随机性质, 噪声摄动下系统 (1) 的一些特例也有不少研究. 例如: 当 $\alpha = 0$ 时, Lin 和 Yim^[5] 用随机 Melnikov 方法研究了谐和力与白噪声外激下系统的混沌运动, 发现弱噪声降低了出现混沌的谐和力幅值, 扩大了参数空间中的混沌域; Wei 和 Leng^[6] 计算了系统的最大 Lyapunov 指数, 发现噪声在某种程度对系统有一定的稳定作用; Xie^[7] 用修正的 Melnikov 函数推导了白噪声参激下谐和激励的

* 国家自然科学基金(批准号:10472091, 10332030), 陕西省自然科学基金(批准号:2003A03), 广东省自然科学基金(批准号:04011640)和西北工业大学博士论文创新基金(批准号:CX200516)资助的课题.

† E-mail: yangxl205@mail.nwpu.edu.cn

Duffing 振子出现混沌的必要条件,发现弱噪声增大出现混沌运动的谐和力幅值,而计算最大 Lyapunov 指数却发现噪声减小了出现混沌的谐和力幅值,两个结论正好相反;Liu 等^[8]结合随机 Melnikov 方法和数值方法研究了有界噪声参激下具有同宿轨道的 Duffing 振子混沌运动,发现对于较大的 Wiener 过程强度参数,系统产生混沌运动的阈值随噪声强度的增大而有所增大,对于较小的强度参数,两种方法得到结果却不一致。

因此,噪声对于系统混沌运动的影响有待进一步研究.鉴于此,本文研究谐和激励与有界噪声摄动下具有同宿轨道、异宿轨道的双势阱 Duffing 振子的混沌运动。

2. 随机 Melnikov 过程

当 $\delta = d_1 = d_2 = 0$ 时,与系统(1)相应的未扰系统的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \alpha x^5. \end{aligned} \quad (2)$$

系统(2)的 Hamilton 函数及势函数分别为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}\alpha x^6, \quad (3)$$

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}\alpha x^6. \quad (4)$$

系统(2)的相轨图和势函数图如图 1 所示.通过对系统(2)的平衡点稳定性分析可知:当 $\alpha = 0.125$ 时,系统(2)具有 5 个平衡点,其中 $S_i (i = 0, 1, 2)$ 为鞍点, $C_i (i = 1, 2)$ 为中心.从图 1(a)可见, Γ_{ho}^+ 和 Γ_{ho}^- 为连接鞍点 S_0 的两条同宿轨道, Γ_{he}^+ 和 Γ_{he}^- 为连接鞍点 S_1 和 S_2 的两条异宿轨道。

Melnikov 方法是基于摄动分析给出受到小扰动的可积系统出现横截同宿(异宿)轨道的解析条件,作为预测系统出现混沌运动的必要条件.由 Poincaré 理论^[9]知,如果 Melnikov 函数有简单零点,则系统稳定流形与不稳定流形横截相交,一旦相交就有无数次相交,吸引子的相空间发生形变,不停地伸缩与折叠,从而产生 Smale 马蹄意义下的混沌. Holmes^[10]首次应用 Melnikov 方法研究负线性刚度的谐和激励系统的混沌运动. Wiggins^[11]将 Melnikov 方法推广到激励为多种频率的情形;随后 Frey 和 Simiu^[12]提出广义随机 Melnikov 方法.下面用随机 Melnikov 方法研究系统(1)的混沌运动。

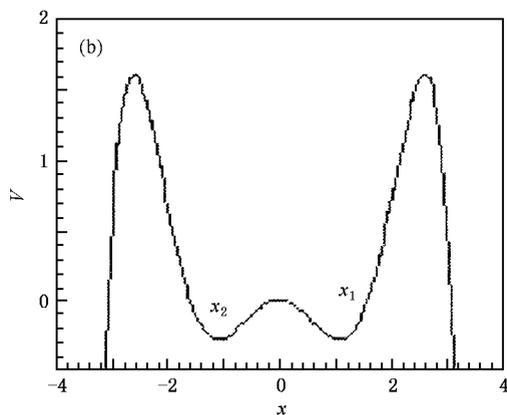
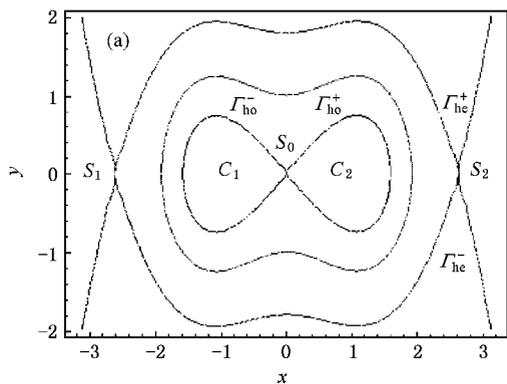


图 1 系统(2)的相轨图及势函数图 (a)相轨图, (b)势函数图

设 $(x_0, y_0) = (x_0(t), y_0(t))$ 为未扰系统(2)的同(异)宿轨道,且 $\Omega_2 = n\Omega_1 (n$ 为整数).假设 $\delta, d_i (i = 1, 2)$ 同为 ϵ 阶小量,即 $\delta = \epsilon\bar{\delta}, d_i = \epsilon\bar{d}_i (i = 1, 2)$.由于有界噪声 $\xi(t)$ 可以表示成一簇具有随机频率和相位的谐和函数之和的形式^[12],由文献[11]可得到系统(1)的随机 Melnikov 过程为

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\delta} y_0^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{d}_1 y_0 \cos \Omega_1(t_1 - t) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{d}_2 y_0 \xi_{i_2-t} dt \\ &= -I + Z(t_1) + Z_{i_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式中前两个积分为随机 Melnikov 过程的均值部分,最后一个积分为随机 Melnikov 过程的随机部分.将 $h(t) = \bar{d}_2 y_0(t)$ 看作轨道滤波器 F 的脉冲响应函数, $Z = \xi * h$ 是 ξ 关于 h 的卷积,是输入 ξ 经过滤波器 F 的输出.易知 Z_{i_2} 是一个平稳的随机过程,均值为零,方差为

$$\sigma_z^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega, \quad (6)$$

式中

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

从系统(2)很难求出 y_0 的解析表达式,我们用数值积分方法求解 y_0 (下面将会给出具体的算法).注意到 $y_0(t)$ 是 t 的函数,且 $t \in (-\infty, +\infty)$,当 (x_0, y_0) 为同宿轨道时,由图 1(a)可知,选积分的初始点为同宿轨道 Γ_{ho}^+ 与 x 轴的交点,此时 $y_0(t)$ 为 t 的奇函数,方程(5)可简化为

$$M_{hom}(t_1, t_2) = -2\bar{\delta}A + 2\bar{d}_1 \sin\Omega_1 t_1 I_{hom}(\Omega_1) + Z_{t_2}, \quad (7)$$

式中,

$$A = \int_0^{+\infty} y_0^2 dt,$$

$$I_{hom}(\Omega_1) = \int_0^{+\infty} y_0 \sin\Omega_1 t dt.$$

从而随机 Melnikov 函数在均方意义下出现简单零点的条件为

$$\begin{aligned} \delta A^2 \leq & d_1 I_{hom}(\Omega_1)^2 \\ & + \frac{(d_2 \sigma)^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} y_0 \sin\omega t dt \right|^2 \\ & \times \left(\frac{1}{4(\omega - \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4(\omega + \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

当 (x_0, y_0) 为异宿轨道时,选积分的初始点为异宿轨道 Γ_{he}^+ 与 y 轴的交点,此时 $y_0(t)$ 为 t 的偶函数,方程(5)可简化为

$$M_{het}(t_1, t_2) = -2\bar{\delta}B + 2\bar{d}_1 \cos\Omega_1 t_1 I_{het}(\Omega_1) + Z_{t_2}, \quad (9)$$

式中,

$$B = \int_0^{+\infty} y_0^2 dt,$$

$$I_{het}(\Omega_1) = \int_0^{+\infty} y_0 \cos\Omega_1 t dt.$$

从而随机 Melnikov 函数在均方意义下出现简单零点的条件为

$$\begin{aligned} \delta B^2 \leq & d_1 I_{het}(\Omega_1)^2 \\ & + \frac{(d_2 \sigma)^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} y_0 \cos\omega t dt \right|^2 \\ & \times \left(\frac{1}{4(\omega - \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{4(\omega + \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right) d\omega. \quad (10)$$

当有界噪声中 $\phi=0$ 时,系统(1)退化为双频谐和激励的 Duffing 振子.基于同宿分叉与异宿分叉,可能出现混沌的参数域分别为

$$\delta A \leq |d_1 I_{hom}(\Omega_1) + d_2 I_{hom}(\Omega_2)|, \quad (11)$$

$$\delta B \leq |d_1 I_{het}(\Omega_1) + d_2 I_{het}(\Omega_2)|, \quad (12)$$

式中,

$$I_{hom}(\Omega_2) = \int_0^{+\infty} y_0 \sin\Omega_2 t dt,$$

$$I_{het}(\Omega_2) = \int_0^{+\infty} y_0 \cos\Omega_2 t dt.$$

3. 数值计算

3.1. 同宿分叉及异宿分叉

在数值计算部分,固定方程(1)的参数 $\alpha = 0.125$, $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 2.0$.对于同宿分叉条件((8)和(11)式),首先需要对方程(2)用四阶 Runge-Kutta 数值求解 $y_0(t)$ (步长取为 0.001),然后用数值积分方法(步长取为 0.1)求积分常数 A , I_{hom} 和 I_{hom2} .在参数空间 (d_1, d_2, δ) 中,可能出现混沌运动临界值的上界((8)和(11)式中的不等式取为等式)之间的关系分别如图 2(a)和(b)所示;在平面 (d_1, δ) 和 (d_2, δ) 中,可能出现混沌运动临界值的上界之间的关系如图 2(c)和(d)所示.

方程(1)异宿分叉条件((10)和(12)式)可类似地讨论,可能出现混沌运动临界值的上界之间关系见图 3.由图 2 和图 3 可知,有界噪声在频率上的扩散增大了诱发混沌运动的临界幅值,相应地减小了参数空间混沌域.另外,当 $d_1 = 0.15$, $\delta = 0.25$ 时,(8)和(10)式也分别描绘了诱发混沌运动的有界噪声的临界幅值与 Wiener 过程的强度参数之间的关系,如图 4 中的实线所示.

3.2. 分形边界

检验同宿分叉和异宿分叉的另一有效工具是数值计算系统的分形域边界,同宿分叉或异宿分叉的临界值是系统出现分形边界的充分条件^[13-15].当系统出现分形边界时,即使系统处于非混沌运动状态,系统对初始条件也极端敏感.取 $d_2 = 0.2$, $\delta = 0.25$,当 d_1 小于同宿分叉的临界值 0.1367 时,系统(1)将

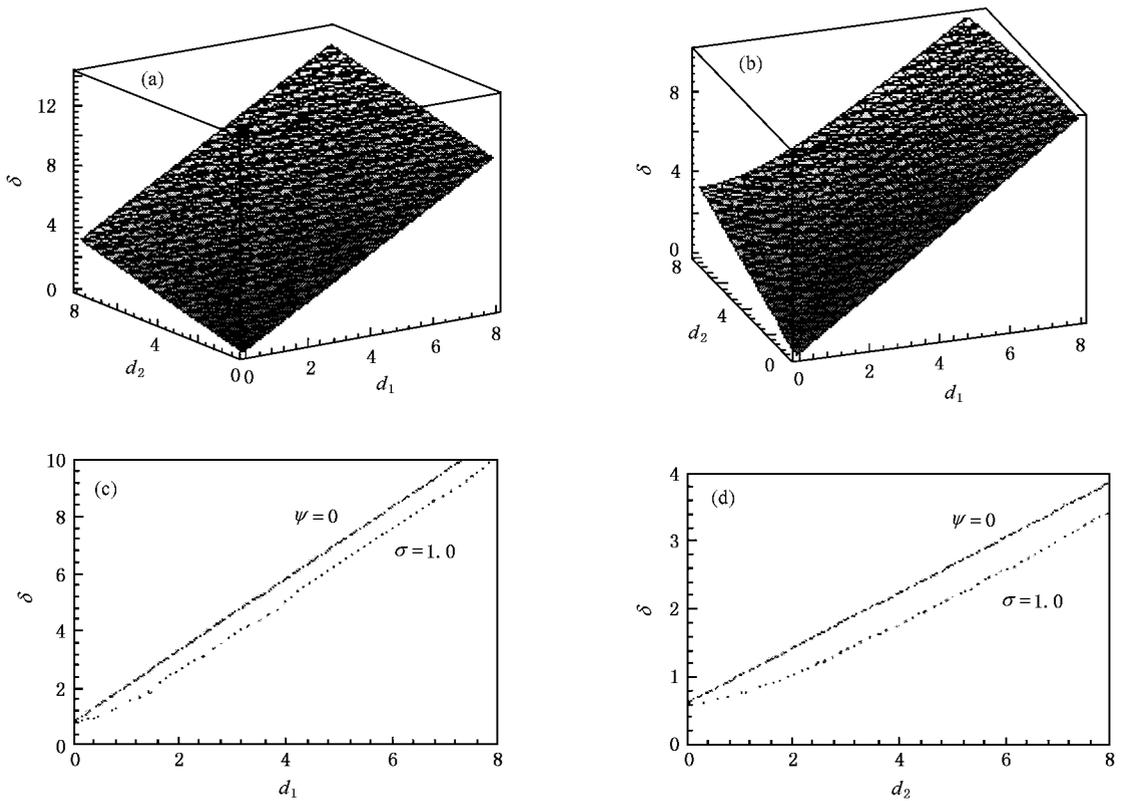


图 2 系统 (1) 的同宿分叉曲面和曲线 (a) 空间 (d_1, d_2, δ) 同宿分叉曲面 (在 $\psi=0$) (b) 空间 (d_1, d_2, δ) 同宿分叉曲面 (在 $\sigma=1.0$) (c) 平面 (d_1, δ) 同宿分叉曲线 (在 $d_2=2.0$) (d) 平面 (d_2, δ) 同宿分叉曲线 (在 $d_1=0.5$)

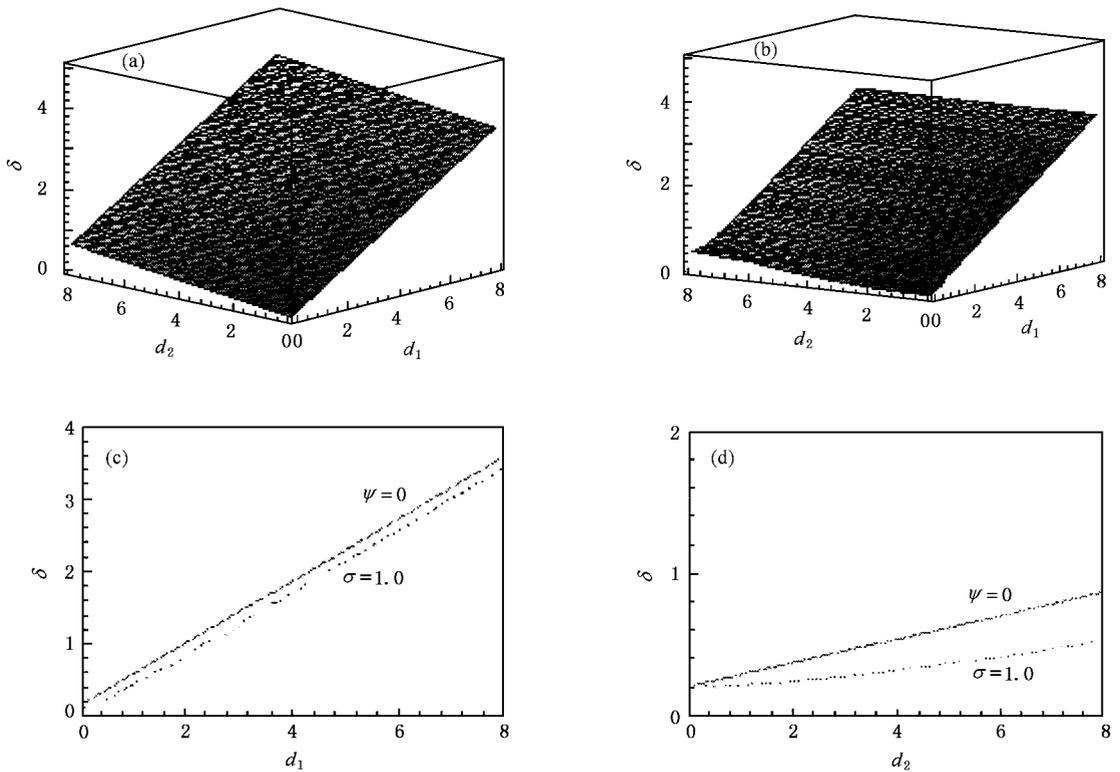


图 3 系统 (1) 的异宿分叉曲面和曲线 (a) 空间 (d_1, d_2, δ) 异宿分叉曲面 (在 $\psi=0$) (b) 空间 (d_1, d_2, δ) 异宿分叉曲面 (在 $\sigma=1.0$) (c) 平面 (d_1, δ) 异宿分叉曲线 (在 $d_2=2.0$) (d) 平面 (d_2, δ) 异宿分叉曲线 (在 $d_1=0.5$)

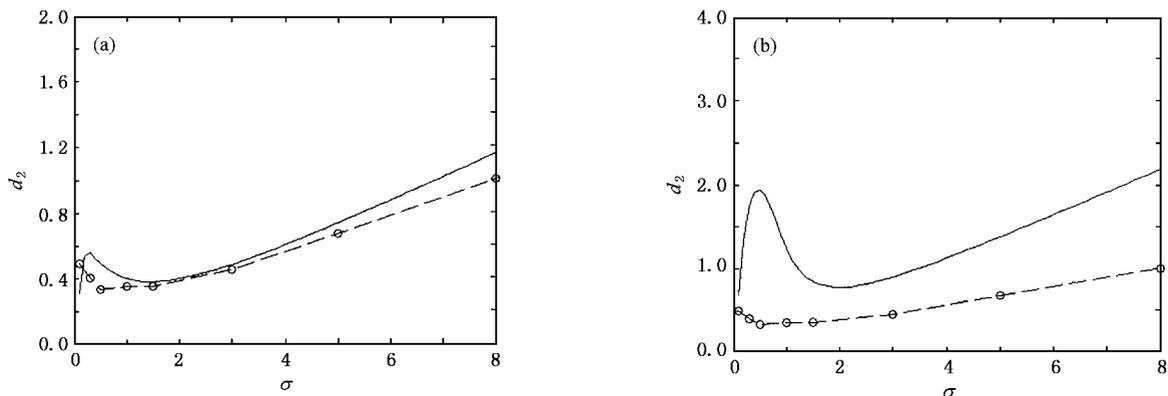


图4 有界噪声的临界幅值 d_2 与 Wiener 过程的强度参数 σ 之间的关系 ——为理论解, ---为数值解. (a) 同宿分叉; (b) 异宿分叉

在势阱 x_1 或 x_2 内做周期运动, 当 d_1 略大于同宿分叉的临界值时, 系统仍有可能是周期运动. 图 5 是

$d_1 = 0.1, 0.1367, 0.15, 0.17$ 时, 系统运动处在势阱 x_1 周围的吸引域; 同样可以讨论系统运动处在势阱 x_2

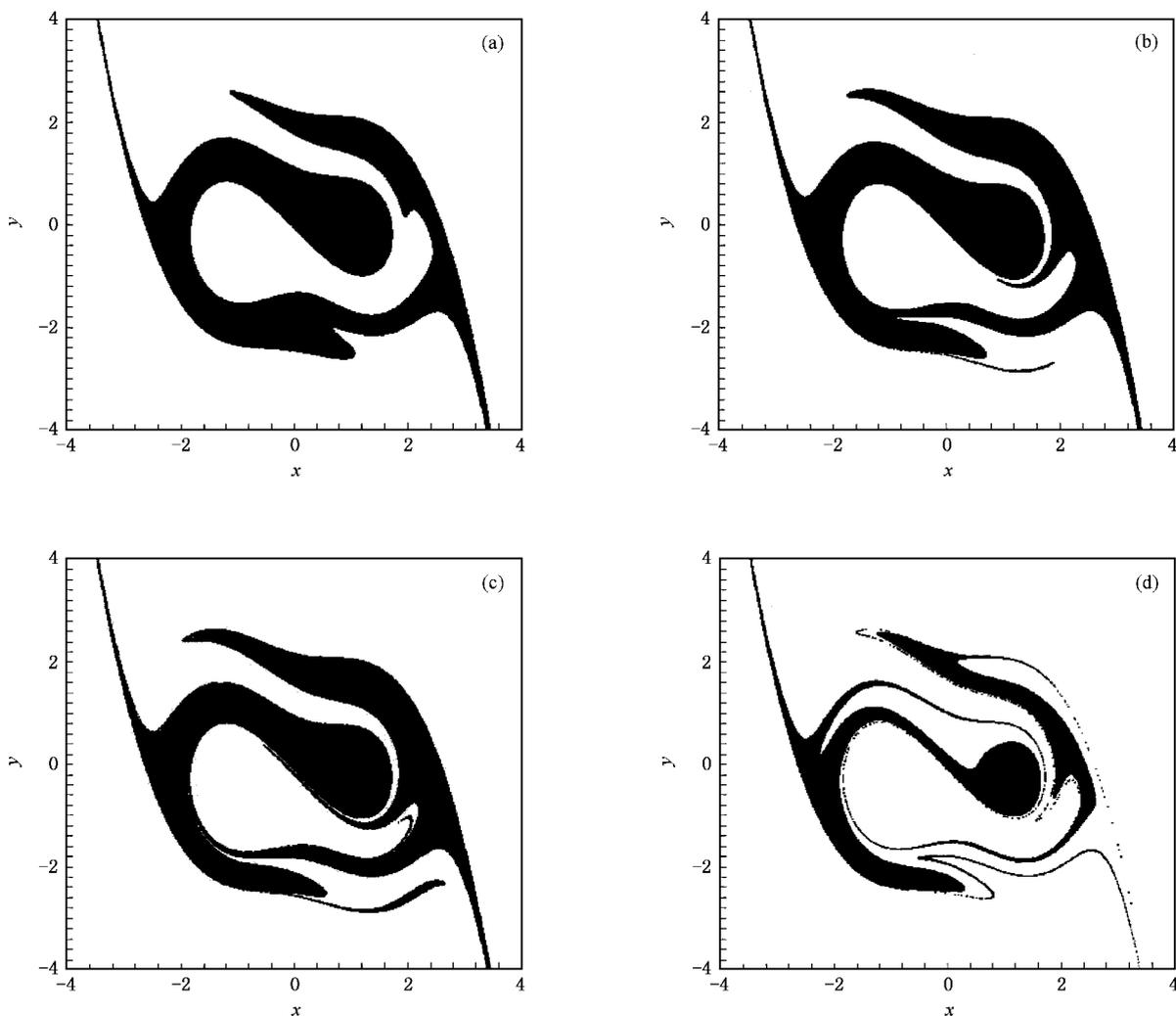


图5 系统运动处在势阱 x_1 周围的吸引域 (a) $d_1 = 0.1$ (b) $d_1 = 0.1367$, (c) $d_1 = 0.15$ (d) $d_1 = 0.17$

周围的吸引域. 由图 5 可见, 当 $d_1 < 0.1367$ 时, 吸引域有规则的边界, 随着 d_1 的增大吸引域的规则边界被破坏, 分形吸引域边界越来越明显.

3.3. 最大 Lyapunov 指数

为了检验由随机 Melnikov 过程的均方值准则得到的可能出现混沌的有界噪声临界值 d_2 与 Wiener

过程的强度参数 σ 关系, 下面采用 Wolf 等^[16]的 ODE (一般微分方程) 算法计算系统(1)的最大 Lyapunov 指数. 固定参数 $\delta = 0.25$, $d_1 = 0.15$, 当 $\psi = 0$ 及 $\sigma = 0.1, 0.5, 3.0, 5.0, 8.0$, 系统的最大 Lyapunov 指数如图 6 所示. 由最大 Lyapunov 指数为零, 得到诱发混沌运动的临界值与 Wiener 过程的强度的关系如图 4 中的虚线所示. 由图 6 可见: 对于较小的幅值

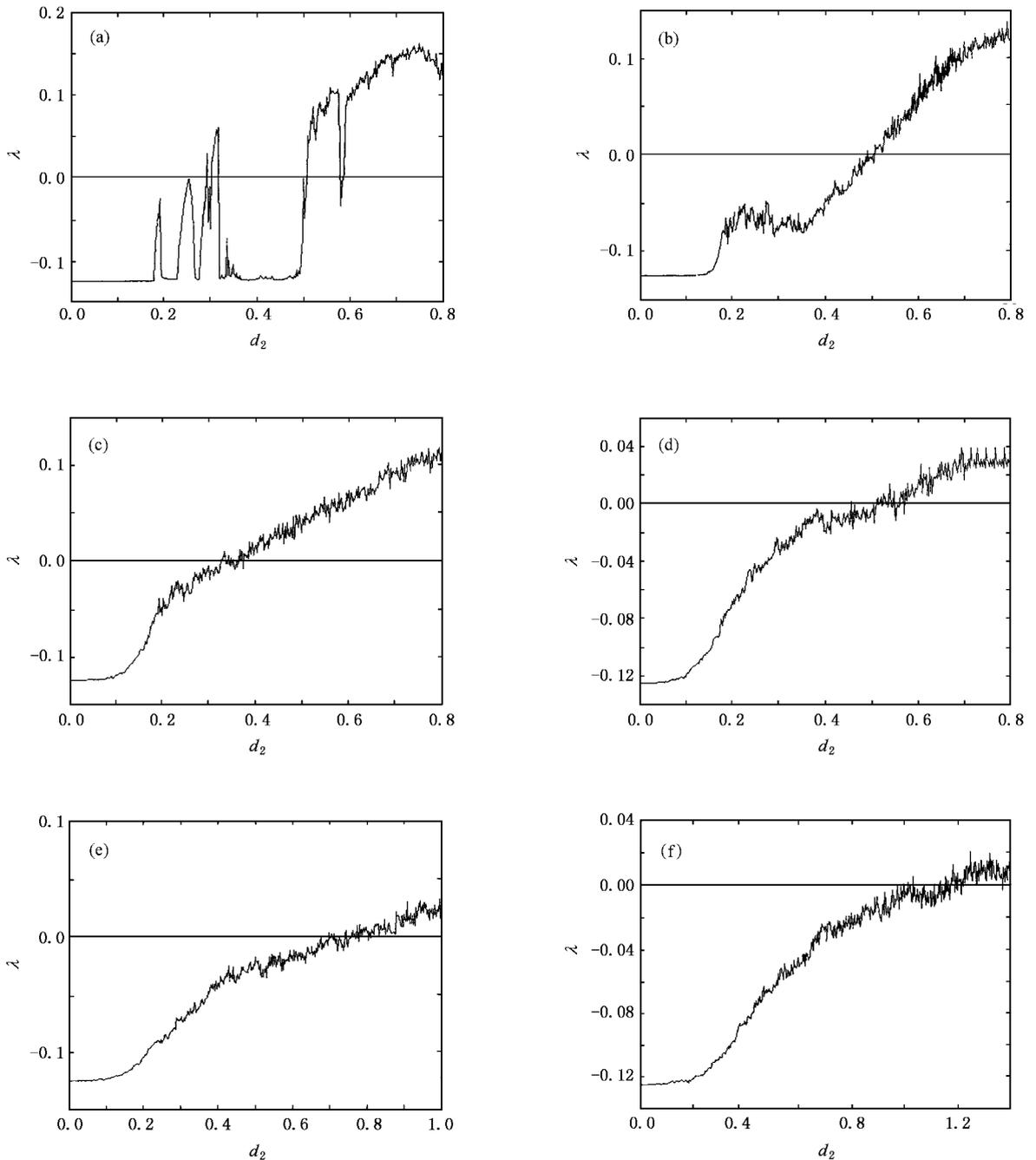


图 6 系统(1)的最大 Lyapunov 指数 λ 与有界噪声的幅值 d_2 之间的关系 (a) $\psi = 0$ (b) $\sigma = 0.1$ (c) $\sigma = 0.5$ (d) $\sigma = 3.0$, (e) $\sigma = 5.0$, (f) $\sigma = 8.0$

d_2 最大 Lyapunov 指数为负,随着 d_2 的增大,最大 Lyapunov 指数由负变为正,表明系统出现混沌运动.在谐和激励下,当 d_2 超过临界值之后,最大 Lyapunov 指数还有许多负值出现,表明系统又回到周期运动;在有界噪声作用下,噪声的作用是改变这些周期运动.

从图 4 可知,对于较小的 Wiener 过程的强度参数,出现混沌运动的临界值与噪声强度之间的关系类似于文献[7]所述,文献[7]指出,随机 Melnikov 方法预测的结果表明系统出现混沌运动临界值随着噪声强度的增大而增大,而数值计算最大 Lyapunov 指数的结果却相反.对于较大的 Wiener 过程的强度参数,两种方法得到的结果都表明诱发混沌运动的临界值随着噪声强度的增大而增大.

3.4. Poincaré 截面

为验证上述数值计算最大 Lyapunov 指数结果

的正确性及说明有界噪声对系统混沌吸引子的影响,下面研究系统(1)的 Poincaré 截面.取连续迭代的 Poincaré 截面为

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma, \\ \Sigma = \{ (x(t), y(t)) \mid t = 0, \\ 2\pi/\Omega_1, 4\pi/\Omega_1, \dots \} \subseteq R^2.$$

在相平面上选取 100 个初始点,对于每一个初始点,用四阶的 Runge-Kutta 方法对系统(1)求解,且迭代每经过一个周期取一个相点,对每一个初始点取 10000 个相点,选后 9500 个相点做 Poincaré 截面.从系统(1)的最大 Lyapunov 指数可知:当 $d_2 = 0.7, \sigma = 0, 0.005, 0.1$ 时,最大 Lyapunov 指数大于零,系统处于混沌状态.取上述参数,此时系统(1)的 Poincaré 截面的结果见图 7.由图 7 可见,对于相同幅值的有界噪声,当 Wiener 过程的强度参数小于某一临界值时,混沌吸引子扩散的面积随噪声强度的增大而有所增大.

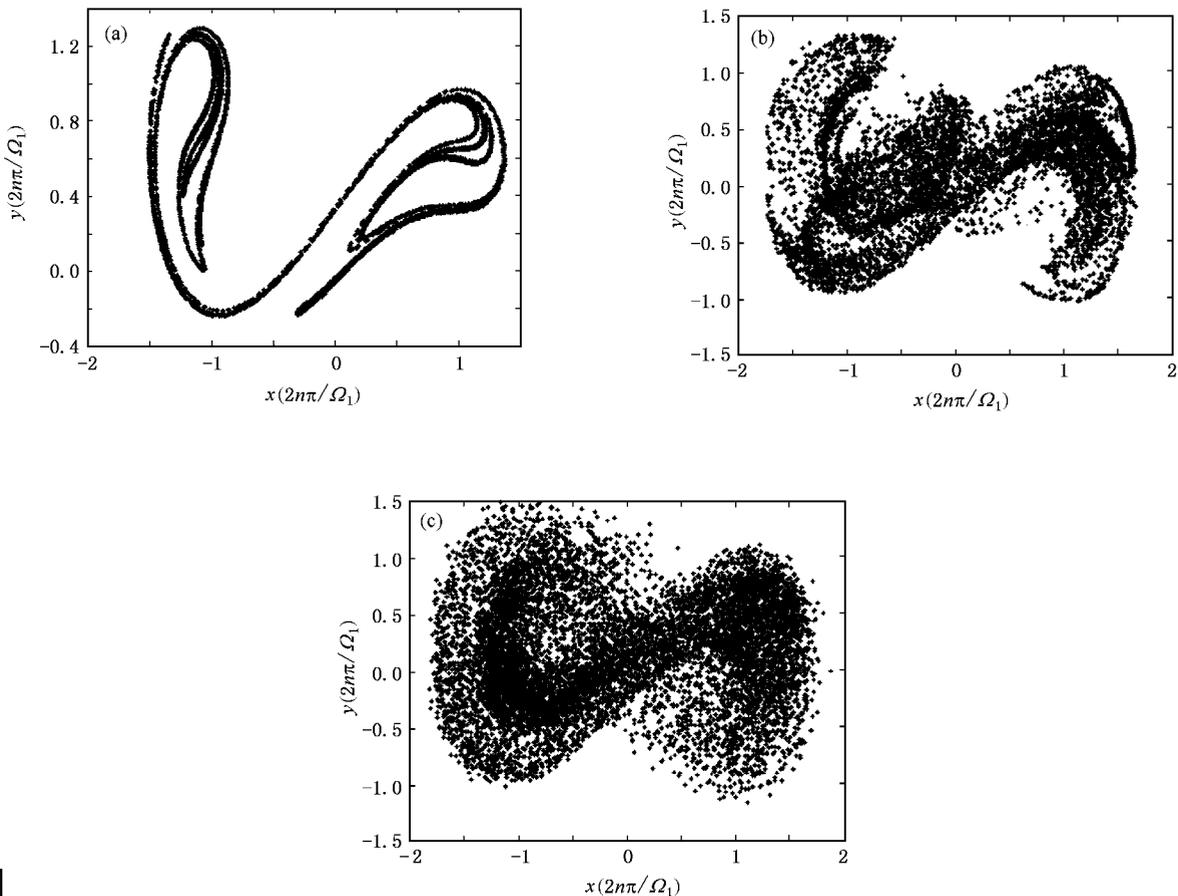


图 7 系统(1)的 Poincaré 截面 (a) $\sigma = 0.0$, (b) $\sigma = 0.005$ (c) $\sigma = 0.1$



4. 结 论

研究了有界噪声对谐和激励下具有同宿轨道、异宿轨道的双势阱的 Duffing 振子混沌运动的影响. 首先, 基于同宿分叉和异宿分叉, 由 Melnikov 方法推导了系统出现混沌运动的必要条件及出现分形边界的充分条件, 并由此条件描绘了系统的分叉曲面、分叉曲线和吸引域. 结果表明: 对于较大的 Wiener 过程的强度参数, 噪声增大了诱发混沌运动有界噪声的临界幅值, 缩小了参数空间的混沌域, 且诱发混沌运动的临界值随着 Wiener 过程强度参数的增大而增大. 其次, 数值计算了系统的最大 Lyapunov 指数,

对于较大的 Wiener 过程的强度参数, 由最大 Lyapunov 指数为零得到产生混沌运动有界噪声的临界幅值也随着 Wiener 过程强度参数的增大而增大, 然而对于较小的噪声强度, 两种方法得出的结果却截然相反, 这尚待进一步研究. 另外, 数值计算 Poincaré 截面结果表明, 当 Wiener 过程的强度参数小于某一临界值时, 混沌吸引子扩散的面积随噪声强度的增大而有所增大. 最后, 需要指出的是本文所研究的 Duffing 系统的势阱是无界的. 在这种特殊的情形下, 如何基于异宿分岔应用 Melnikov 方法研究系统的混沌行为, 目前还存在着一定的争议. 本文对此作了一些有益的尝试, 更深入的探讨将另文发表.

-
- [1] Lin Y K, Cai G Q 1995 *Probabilistic Structural Dynamics* (New York : McGraw-Hill)
- [2] Chen X W 2002 *Chin. Phys.* **11** 441
- [3] Peng J H, Tang J S, Yu D J *et al* 2002 *Chin. Phys.* **11** 213
- [4] Jing Z J, Wang R Q 2005 *Chaos Solitons Fract.* **22** 887
- [5] Lin H, Yin S C S 1996 *J. Appl. Mech.* (ASME) **63** 509
- [6] Wei J G, Leng G 1997 *Appl. Math. Comp.* **88** 77
- [7] Xie W C 1994 *Nonlinear Stoch. Dynam.* **78** 215
- [8] Liu W Y, Zhu W Q, Huang Z L 2001 *Chaos Solitons Fract.* **12** 527
- [9] Guckenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcations of Vector Fields* (New York : Springer-Verlag)
- [10] Holmes P J 1979 *Philos. Trans. R. Soc. A* **292** 419
- [11] Wiggins S 1988 *Global Bifurcations and Chaos : Analytical Methods* (New York : Springer-Verlag)
- [12] Frey M, Simiu E 1993 *Physica D* **63** 321
- [13] Tan N, Xu J X, Kang Y M *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2989 (in Chinese) [谭 宁、徐健学、康艳梅等 2003 物理学报 **52** 2989]
- [14] Moon F C, Li G X 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 1439
- [15] Gong P L, Xu J X, Sun Z C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 841 (in Chinese) [龚璞林、徐健学、孙政策 2001 物理学报 **50** 841]
- [16] Wolf A, Swift J, Swinney H *et al* 1985 *Physica D* **16** 285

Influence of harmonic and bounded noise excitations on chaotic motion of Duffing oscillator with homoclinic and heteroclinic orbits^{*}

Yang Xiao-Li^{1)2)†} Xu Wei¹⁾ Sun Zhong-Kui¹⁾

¹⁾ *Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

²⁾ *College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*

(Received 28 December 2004 ; revised manuscript received 9 December 2005)

Abstract

In this paper, the influence of harmonic and bounded noise excitations on the chaotic motion of a double well Duffing oscillator possessing both homoclinic and heteroclinic orbits is investigated. The criteria for occurrence of transverse intersection on the surface of homoclinic and heteroclinic orbits are derived by Melnikov theory, and are complemented by numerical calculations which display the bifurcation surfaces and the fractality of the basins of attraction. The results imply that the threshold amplitude of bounded noise for the onset of chaos moves upwards as the noise intensity increases beyond a critical value, which is further verified by numerically calculating the top Lyapunov exponents of the original system. Then we come to the conclusion that larger noise intensity results in smaller possible chaotic domain in the parameter space. The influence of bounded noise on Poincaré maps of the system response is also discussed, which indicates that when the noise intensity is less than some critical value, larger noise intensity results in larger area which the map occupies in the phase plane.

Keywords : chaos, homoclinic and heteroclinic bifurcations, random Melnikov method, top Lyapunov exponents

PACC : 0545, 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091, 10332030), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2003A03), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 04011640) and the Doctorate Foundation of Northwestern Polytechnical University, China (Grant No. CX200516).

[†] E-mail : yangxl205@mail.nwpu.edu.cn