

点,在气泡界面的光呈点状则称之为点光源.如图 1 所示,点光源的入射角、折射角分别为 α 和 β ,且 $\beta = \sin^{-1}(1.33\sin\alpha)$ (水和空气折射率分别为 1.33 和 1.00).点光源入射到水中气泡表面 A 点将发生第 1 次反射,将其记为 I'_0 ,经气泡第 1 次折射的光线记为 $l=1$.经过 B 点在气泡内壁反射的光线记为 $l=2$,依此类推有 $l=3, l=4$ 和 l'_1, l'_2, l'_3 .由于光的偏振性,下面用菲涅耳公式计算水中气泡界面的反射和折射光强.

2.1. 入射光 p 分量的光强规律

A 点所进行的第 1 次折射、反射的振幅 A_1 和 A'_0 与入射光振幅 A_0 之间的关系由菲涅耳公式

$$\frac{A'_{0p}}{A_{0p}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)},$$

$$\frac{A_{1p}}{A_{0p}} = \frac{2\sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha)} \quad (1)$$

确定,则 A 点反射到气泡外表面的光强为

$$I'_{1p} = I_{0p} \frac{\tan^2(\beta - \alpha)}{\tan^2(\alpha + \beta)}, \quad (2)$$

其中 $I_{0p} = A_{0p}^2$ 是入射光 p 分量强度. A 点折射进入内表面的光强为

$$I_{1p} = I_{0p} \frac{4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta) \cdot \cos^2(\beta - \alpha)}. \quad (3)$$

第 2 次折射、反射(B 点)处界面的光强为

$$I_{2p} = (A'_{1p})^2 = A_{1p}^2 \cdot \frac{4\sin^2\alpha \cos^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)\cos^2(\alpha - \beta)}$$

$$= A_{1p}^2 \cdot a \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{2p} = A_{1p}^2 - (A_{2p})^2 = A_{1p}^2 \cdot \frac{\tan^2(\alpha + \beta) - \tan^2(\beta - \alpha)}{\tan^2(\alpha + \beta)}$$

$$= A_{1p}^2 \cdot b \quad (\text{内表面}), \quad (4)$$

其中

$$a = \frac{4\sin^2\alpha \cos^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)\cos^2(\alpha - \beta)},$$

$$b = \frac{\tan^2(\alpha + \beta) - \tan^2(\beta - \alpha)}{\tan^2(\alpha + \beta)}. \quad (5)$$

第 3 次折射、反射(C 点)处界面的光强为

$$I_{3p} = (A'_{2p})^2 = A_{2p}^2 \cdot a \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{3p} = A_{2p}^2 - (A_{3p})^2 = A_{2p}^2 \cdot b \quad (\text{内表面}). \quad (6)$$

第 4 次折射、反射(D 点)处界面的光强为

$$I_{4p} = A_{3p}^2 \cdot a \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{4p} = A_{3p}^2 \cdot b \quad (\text{内表面}). \quad (7)$$

由此可见,气泡界面连续两次反射的光强之比

为 $\frac{I'_{4p}}{I_{3p}} = \frac{I'_{3p}}{I_{2p}} = \frac{\tan^2(\beta - \alpha)}{\tan^2(\beta + \alpha)} = q_p$,连续两次折射的光强

之比为 $\frac{I'_{3p}}{I_{2p}} = \frac{I'_{2p}}{I_{1p}} = q_p$.气泡界面第 n 次反射、折射的光强与 I_{2p}, I'_{2p} 之间的关系为

$$I_{np} = I_{2p} q_p^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{np} = I'_{2p} q_p^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (\text{内表面}), \quad (8)$$

其中

$$q_p = \frac{\tan^2(\beta - \alpha)}{\tan^2(\beta + \alpha)}. \quad (9)$$

当光线以一定的角度入射气泡,由(4)式确定 I_{2p} 和 I'_{2p} 后,通过(8)式就可以进一步确定光线在气泡界面的其他各次反射和折射的 p 分量光强.

2.2. 入射光 s 分量的光强规律

图 1 中,当入射光在 A 点以振幅 A_0 入射时,则折射光和反射光振幅 A_1, A'_0 的 s 分量也由菲涅耳公式

$$\frac{A'_{0s}}{A_{0s}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \frac{A_{1s}}{A_{0s}} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (10)$$

确定.类似 p 分量的计算, A 点入射光 s 分量在气泡的外、内表面的光强为

$$I_{1s} = I_{0s} \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{1s} = I_{0s} \frac{4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \quad (\text{内表面}), \quad (11)$$

其中 $I_{0s} = A_{0s}^2$ 是入射光强的 s 分量.在图 1 的 B 点,光线第 2 次折射和反射的 s 分量光强为

$$I_{2s} = (A'_{1s})^2$$

$$= A_{1s}^2 \cdot \frac{4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{2s} = A_{1s}^2 - (A_{2s})^2$$

$$= A_{1s}^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \quad (\text{内表面}). \quad (12)$$

当入射光在气泡界面第 n 次反射和折射时,气泡界面 s 分量的光强为

$$I_{ns} = I_{2s} q_s^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{ns} = I'_{2s} q_s^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (\text{内表面}), \quad (13)$$

其中

$$q_s = \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)}. \quad (14)$$

从(8)和(13)式得出如下结论:入射光的 p, s 分量在水中气泡界面某处反射和折射时,气泡界面内

外表面所产生的光强除了第 1 次不同外,以后连续两次反射、折射的强度比具有相同的值,对 s、p 偏振态该比值不同。

由于总光强是 s、p 分量之和,所以在气泡界面某点,第 n 次反射和折射的光强与第 2 次的强度之间的关系为

$$\begin{aligned} I_n &= I_{2s} q_s^{n-2} + I_{2p} q_p^{n-2} \\ I'_n &= I'_{2s} q_s^{n-2} + I'_{2p} q_p^{n-2} \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (15)$$

我们计算出图 1 的 B 点处光线第 2 次折射出气泡的光强为

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{2s} + I_{2p} = 8I_0 \frac{\sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \beta}{\sin^4(\alpha + \beta) \cdot \cos^4(\beta - \alpha)} \\ &\times [1 + \cos^4(\beta - \alpha)], \end{aligned} \quad (16)$$

其中 I_0 为入射到水中气泡界面的光强。

2.3. 偏振度

当光线以一定的入射角入射,第 n 次反射和折射光线的偏振度为

$$P = \frac{|I_{np} - I_{ns}|}{I_{np} + I_{ns}}. \quad (17)$$

当 $\alpha = 30^\circ$ 入射到水中气泡界面,从表 1 可见,经多次反射和折射后的偏振度在不断提高,到了第 4 次就变成完全偏振光。

表 1 水中气泡界面多次反射、折射的偏振度

次数	1	2	3	4
偏振度/%	2.21	4.42	16.42	99.99

3. 线光源入射到水中气泡界面的光强规律

实际照射到水中气泡界面的光线都有一定的宽度,如果光线照到水中气泡表面呈一维的线状则称

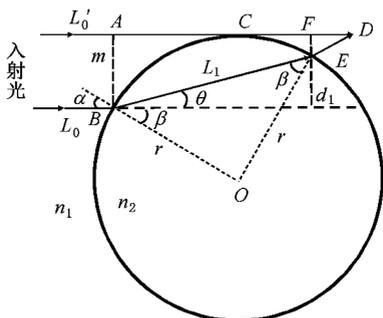


图 2 线光源入射示意图

之为线光源,如图 2 所示.假设宽度为 m 的入射光 L_0 和 L'_0 照射到水中气泡界面的弧线 BC 处,其中 L'_0 与气泡相切,气泡半径为 r.由于每一条入射光进入气泡,再从气泡另一界面出射的位置可由图 2 中的 \overline{FE} 单一决定.而且 $\overline{FE} = m - d_1$,计算后得

$$\overline{FE} = r(1 - \sin \alpha) - 2r \cos \beta \sin(\beta - \alpha). \quad (18)$$

为研究线光源入射对气泡界面某点光强的影响,讨论 \overline{FE} 随入射角的微小变化所产生的影响,即将 \overline{FE} 对入射角 α 求导,为简便起见,令气泡半径 $r = 1$ 则由(18)式得

$$\begin{aligned} \frac{d(\overline{FE})}{d\alpha} &= 2 \cos \beta \cos(\beta - \alpha) \\ &- \frac{2.66 \cos \alpha \cos(2\beta - \alpha)}{\sqrt{1 - 1.7689 \sin^2 \alpha}} - \cos \alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

(19) 式表面上看不出规律,通过计算机绘出图 3 所示的曲线,可见 $d(\overline{FE})/d\alpha$ 有正有负,入射角 $\alpha = 35^\circ$ 时是转变值,亦即当 $\alpha < 35^\circ$ 时, $d(\overline{FE})/d\alpha < 0$ 且随入射角的增大而缓慢增大,而 \overline{FE} 随入射角的增大而缓慢减小;当 $35^\circ < \alpha < 48^\circ$ 时, $d(\overline{FE})/d\alpha > 0$ 且随入射角的增大而快速增大, \overline{FE} 随入射角的增大而增大.由于我们在实验中所用的激光光源,光线宽度较细,其入射角变化较小,因此,只要将入射角避开 $\alpha = 35^\circ$ 附近,则光线第 2 次折射出气泡,在其界面位置处的光强仅由(16)式的单一光线决定,与光线的宽度无关,测量光强时就不必考虑其他光线的影响,这一结论为实验中处理有一定宽度的光线照射水中气泡起了非常重要的指导作用。

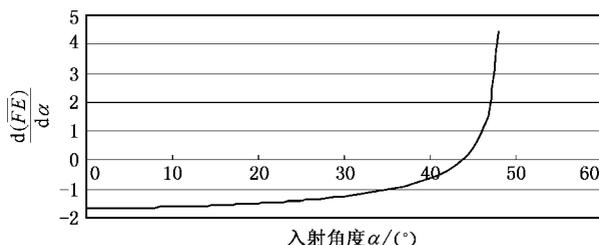


图 3 线光源第 2 次折射出气泡的宽度随入射角的导数与入射角的关系

4. 面光源入射到水中气泡界面的光强规律

如果光线照射到水中气泡表面呈二维的面状则称之为面光源,面光源在气泡界面所产生的光强应该是相应点光源的二重积分.如图 4(a)为面光源入

射到水中气泡表面上的正视图,图 4(b)是从图 4(a)左上方的俯视图,图 4(b)中所见的 GH 是照射到气泡表面的那个面上任意一条水平直线,且 $GH = 2HM = 2l$, M 是 GH 的中点, l 是可以透过探测的距

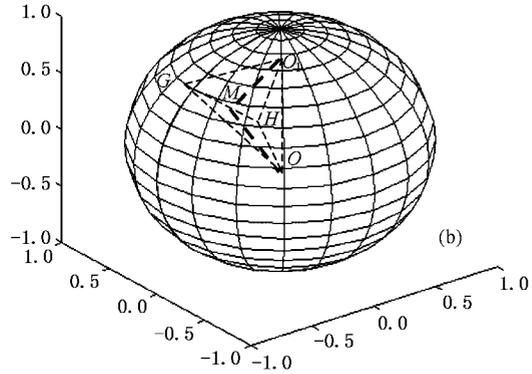
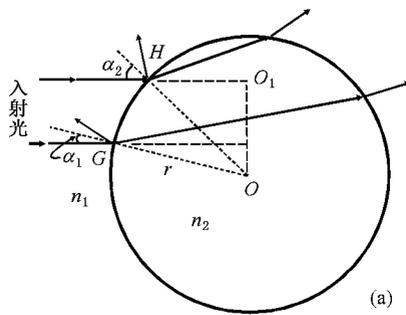


图 4 面光源照射气泡计算光强示意图 (a)正视图 (b)俯视图

为了区别于点光源的光强公式,当面光源照射到水中气泡界面时,在相应光强的下角标处加“面”字,则面光源入射到水中气泡界面,第 2 次折射和反射处的内外界面 p 分量光强为

$$I_{2p\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I_{2p} d\alpha d\gamma \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{2p\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I'_{2p} d\alpha d\gamma \quad (\text{内表面}),$$
(20)

其中 I_{2p} 和 I'_{2p} 如(4)式所示,第 n 次折射和反射处的内外界面的 p 分量光强为

$$I_{np\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I_{2p} q_p^{n-2} d\alpha d\gamma \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{np\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I'_{2p} q_p^{n-2} d\alpha d\gamma \quad (\text{内表面}),$$
(21)

同理,对于 s 分量,第 2 次折射和反射处的内外界面光强分别为

$$I_{2s\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I_{2s} d\alpha d\gamma \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{2s\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I'_{2s} d\alpha d\gamma \quad (\text{内表面}),$$
(22)

其中 I_{2s} 和 I'_{2s} 如(12)式所示,第 n 次折射和反射处的内外界面光强分别为

$$I_{ns\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I_{2s} q_s^{n-2} d\alpha d\gamma \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{ns\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I'_{2s} q_s^{n-2} d\alpha d\gamma \quad (\text{内表面}).$$
(23)

则第 n 次折射和反射的界面总光强为

由点光源照射水中气泡所产生的界面光强公式进行二重积分,即可得到面光源照射所产生的光强,其中入射角 α 的积分范围为 $0-48^\circ$, γ 角的取值范围为 $0-90^\circ$, $\sin \gamma = l/r \cos \alpha_1$.

$$I_{n\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [I_{2p} q_p^{n-2} + I_{2s} q_s^{n-2}] d\alpha d\gamma \quad (\text{外表面}),$$

$$I'_{n\text{面}} = 2 \int_0^\gamma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [I'_{2p} q_p^{n-2} + I'_{2s} q_s^{n-2}] d\alpha d\gamma \quad (\text{内表面}).$$
(24)

5. 实验结果及数值解

5.1. 实验结果

我们计算了点光源以 $\alpha = 30^\circ$ 的入射角照射到水中气泡界面某处的反射光、折射光占入射光强度的比例,即 $(I_{np} + I_{ns})/I_0$,然后用光功率计测量了入射光、反射光、折射光的强度如表 2 所示.通过自制气泡发生装置,利用浙江大学的 SZ-301 数字式照度计将 He-Ne 激光器发出的光线照射水中气泡界面,测量入射到气泡表面的光照度为 $19.30 \times 10^3 \text{ lx}$,而通过气泡界面第 1 次反射的光线照度为 $0.94 \times 10^3 \text{ lx}$,第 2 次折射出气泡的照度为 $4.46 \times 10^3 \text{ lx}$,气泡界面第 1 次反射光线占入射光的 4.85%,与理论值 4.87% 符合得相当好,而第 2 次折射出气泡的光线占入射光的 23.10%,与理论值 55.20% 有较大的误差.误差来源有二:所使用的照度计不可能完全靠近气泡界面,一旦离开气泡界面一定距离探测,光线就会被水吸收而造成误差;第 2 次折射的光线成为分散的片光,光线不易对准照度计的探测窗口而产生误差.

从表 2 可见,理论上,水中气泡的第 1 次反射光仅占入射光的 4.87%,大部分折射进入气泡,而第 2 次折射出气泡的光占入射光的 55.20%,但第 3 次折射出气泡的光占入射光的比例仅 0.03%,已经很小了,因此对水中气泡界面的光强分布,只需计算光线 4 次反射和折射就足够了.表 2 中“--”为不可测的光强,因为光线在气泡内部,而“* *”也测不到,光强太弱.

表 2 水中气泡界面光强的理论与实验值比较

	反 射			折 射		
	I_0	$I=2$	$I=3$	$I=1$	I_2	
占入射光比例(理论值)/%	4.87	2.93	0.14	88.32	55.21	0.03
照度实验值/lx	0.94×10^3	--	--	--	4.46×10^3	* *
占入射光的比例(实验值)/%	4.85				23.10	



图 5 水中气泡界面的 4 束光(He-Ne 激光 632.8nm)

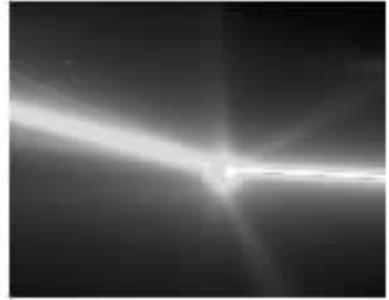


图 6 水中气泡界面的 5 束光(DPSS 激光 532nm)

5.2. 面光源的数值解

由于(24)式的积分较复杂,无法得出解析解,我们用 Excel 得出面光源的入射角在 20° — 30° 范围内计算反射、折射光强的比例,步长取 0.1° ,得出第 1 次反射光与入射光的强度比为 2.25%,第 2 次折射出气泡的光强与入射光强之比为 44.15%,与表 2 所提供的点光源以 30° 角入射时的实验值 4.85%, 23.1% 理论值 4.87%, 55.21% 相比,在误差允许的范围得出的数值解结论认为是成立的,因为面光源反射比例随入射角的增大而增大.

6. 结 论

1. 给出点光源入射到水中气泡某点的内外界面光强公式,气泡界面的某次反射、折射光线的光强与第 2 次的光强具有等比数列的关系.该结论不仅

图 5 和图 6 是利用 He-Ne 激光器和 DPSS 单频半导体固体激光器照射水中气泡,用 600 万像素的 Nikon D100 CCD 相机分别抓拍到水中气泡的照片.从图 5 中可以明显看出单束激光照射水中气泡所产生的第 1 次反射线、第 2 和第 3 次折射出气泡的光线共 4 条,各光线的强弱具有明显的变化,表 2 的测量数据来自图 5 的气泡.图 6 可以看出 5 条光线,由于光线太强,气泡的界面已经很不清晰了.

对水中气泡界面适用,对于光从光密媒质到光疏媒质的界面均适用.

2. 理论计算和实验均表明,水中气泡界面的光强只需计算 4 次反射和折射.第 4 次折射出气泡的光线强度趋于零,而且到第 4 次界面的折射、反射光线就变成了完全偏振光.

3. 当避开 35° 左右的入射角入射时,即便有一定宽度的线光源照到水中气泡界面,第 2 次折射出气泡的光强也与光线的宽度无关,类似一条很窄的光线入射所产生的光强分布.

4. 将入射角为 30° 的激光照射到水中气泡界面进行了理论计算和实验,实验值与理论值、数值解符合得比较好,检验了所计算的公式.

5. 本文所推导出来的水中气泡界面的光强公式为 PIV 技术的亮度阈值的选取具有非常重要的指导意义.

- [1] Reese J , Chen R C , Fan L S 1995 *Experiments in Fluids* **19** 367
- [2] Hu Y , Wang X H , Guo L T *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4124 (in Chinese) [胡 颖、王晓红、郭澜涛等 2005 物理学报 **54** 4124]
- [3] Murai Y , Matsumoto Y , Yamamoto F 2001 *Experiments in Fluids* **30** 11
- [4] Liu H J , An Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1406 (in Chinese) [刘海军、安 宇 2004 物理学报 **53** 1406]
- [5] Tang Y H , Zhang C M , Liu H C *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4065 (in Chinese) [唐远河、张淳民、刘汉臣等 2005 物理学报 **54** 4065]
- [6] Ira Leifer , Gerrit de Leeuw , Gerard Kunz *et al* 2003 *Chemical Engineering Science* **58** 5211
- [7] Wen C , Yuichi M , Toshio S *et al* 2005 *Flow Measurement and Instrumentation* **16** 35
- [8] Zhu Q D , Yoshiharu O 2001 *Journal of Harbin Engineering University* **22** 27 (in Chinese) [朱齐丹、尾崎义治 2001 哈尔滨工程大学学报 **22** 27]
- [9] Chen X P , Xie R Z , Shao D C *et al* 2001 *Water Resources and Hydropower Engineering* **32** 13 (in Chinese) [陈先朴、西汝泽、邵东超等 2001 水利水电技术 **32** 13]
- [10] Xu L F , Chen G , Li J Z *et al* 2002 *Journal of Experimental Mechanics* **17** 458 (in Chinese) [许联锋、陈 刚、李建中等 2002 实验力学 **17** 458]
- [11] Ma Q , Tang Y H , Xie G Y *et al* 2005 *Laser & Optoelectronics Progress* **42** 19 (in Chinese) [马 琦、唐远河、解光勇等 2005 激光与光电子学进展 **42** 19]

Study of the interface optical property of bubbles in water based on PIV^{*}

Tang Yuan-He^{1)†} Xie Guang-Yong¹⁾ Liu Han-Chen²⁾ Shao Jian-Bin¹⁾ Ma Qi¹⁾ Liu Hui-Ping¹⁾ Ning Hui¹⁾
Yang Yu¹⁾ Yan Cheng-Hai¹⁾

1) (School of Science , Xi ' an University of Technology , Xi ' an 710048 , China)

2) (School of Science , Xi ' an University of Engineer Science and Technology , Xi ' an 710048 , China)

(Received 7 July 2005 ; revised manuscript received 11 November 2005)

Abstract

Based on the technique of PIV (particle image velocimetry) , We calculated the light intensity of the bubble interface and discovered that the intensities of lighr reflected or refracted twice succeedingly abide by the rules of geometric series , and the light will disappear after reflecting or refracting 4 times by the bubbles . When the angle of incidence of 35° is avoided , the intensity of second refraction out of a bubble is independent of the incident beam width , similar to the case of a narrow light ray falling on the bubble interface . The integral formulas for the intensities of reflection or refraction are given for the planar light beam falling on the bubble interface . The numerical solution of the integral is in agreement with the experiment value .

Keywords : bubbles in water , interface , optical property intensity , PIV (particle image velocimetry)

PACC : 4225G , 5170 , 4220

* Project supported by the Education Office of Shanxi Province (Grant No.03JK067) and 2005 Defiant Cup of Xi ' an University of Technology .

† E-mail : ltp200@sohu.com