

电磁波导的辛分析与对偶棱边元^{*}

陈杰夫^{1)†} 郑长良²⁾ 钟万勰¹⁾

1) 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连理工大学, 大连 116023)

2) 大连海事大学机电与材料工程学院, 大连 116026)

(2005 年 7 月 28 日收到, 2005 年 10 月 8 日收到修改稿)

将电磁波导的控制方程导向了 Hamilton 体系、辛几何的形式. 以电磁场的横向分量组成对偶向量并采用分离变量法, 可以得到 Hamilton 算子矩阵的辛本征值问题. 共轭辛正交归一关系、辛本征展开定理等均可在此应用. 对于复杂横截面和填充非均匀材料的电磁波导, 提出对偶棱边元, 对截面半解析离散后即可进行数值求解. 对偶棱边元克服了结点基有限元求解电磁场问题的困难, 与常规棱边元相比在某些方面具有一定的优势.

关键词: 电磁波导, Hamilton 体系, 对偶变量, 棱边元

PACC: 5235H, 0260

1. 引 言

电磁波导的分析和计算是很重要的课题, 有限元方法在其中的应用虽早, 但常规的结点基单元并不能很好地表征电磁场的性质, 这也造成了结点基有限元在计算电磁学中的几个困难: 伪解的消除^[1]、材料和导体的界面条件的施加^[2]、尖导体或尖材料边缘奇异性电磁场的表征^[3]等. 棱边元^[4]的出现很好地解决了上述的三类问题, 因此也被视为比较理想的求解电磁场问题的单元. 常规的棱边元总是基于单个变量的矢量波动方程, 在应用于求解电磁波导问题时, 实际上采取了用矢量基插值函数表征横向未知量而用标量基插值函数表征纵向(波的传播方向)未知量的混合单元的方法. 对于电磁波导的不同的课题, 如求解截止频率或计算波导的色散曲线, 常规的棱边元求解往往需要做一定的调整, 最后则会得到不同的有限元列式.

本文参考弹性力学的辛求解体系, 将电磁波导的基本方程导向了 Hamilton 体系、辛几何的形式. 将电磁波导的传播方向模拟为时间坐标, 并选取横向的电磁场分量组成对偶变量, 通过分离变量法可以得到 Hamilton 型的算子矩阵本征值问题, 采用共轭辛正交关系及本征函数向量展开的方法即可对该问题进行求解. 对于截面形状较复杂或介质填充不均

匀的电磁波导, 参考矢量基有限元的构造, 提出对偶棱边元对波导进行半解析离散后进行数值求解. 基于对偶变分原理的棱边元方法可以统一地求解电磁波导的多个课题, 与常规的棱边元方法相比在数值精度、高次模的计算等方面具有一定的优势, 文末的数值算例验证了算法的有效性.

2. 电磁波导的对偶变分原理

以填充有互易媒质的电磁波导为例, 设定其波的传播方向沿 z 轴, 横截面为 Ω , 而 Γ 是其理想导体边界. 相应的频域控制微分方程为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (1)$$

Dirichlet 边界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \text{ 在边界 } \Gamma \text{ 上}, \quad (2)$$

因为波导中填充的是互易媒质, 其介电常数张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与磁导率张量 $\boldsymbol{\mu}$ 是对称的, 通过适当的坐标系变换, 总可以表示为对角张量的形式, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\mu} &= \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10372019)资助的课题.

[†] E-mail: chenjiefu@student.dlut.edu.cn

相应于(1)(2)式的变分原理可以表达为

$$\Pi(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \iint_{\Omega} [\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} + j\omega \mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}/2 + j\omega \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}/2] \mathrm{d}\Omega \quad \delta\Pi = 0, \quad (4)$$

其中 \mathbf{E}, \mathbf{H} 为复数量,且应成为独立的试函数, * 号表示取其复共轭.

对变分原理(4)的验证如下:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \iint_{\Omega} [\delta\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \delta\mathbf{E} + j\omega\delta\mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} + j\omega\delta\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^*] \mathrm{d}\Omega \\ &= \iint_{\Omega} [\delta\mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}) + \delta\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^* + j\omega\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^*) + \nabla \cdot (\delta\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] \mathrm{d}\Omega \\ &= \iint_{\Omega} [\delta\mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}) + \delta\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - j\omega\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{H})^*] \mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \mathrm{d}\Gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

因为 \mathbf{E} 需预先满足边界条件(2),必有 $\delta\mathbf{E}$ 沿法线方向 \mathbf{n} 则 $\delta\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 垂直于 \mathbf{n} 而边界积分项 $\mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ 恒为零.由于 \mathbf{E}, \mathbf{H} 在域内独立变分,因此给出方程(1)变分原理(4)得证.

定义对偶向量 \mathbf{q}, \mathbf{p} ^[5] 为

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}_t, \mathbf{p} = \mathbf{H}_t \times \mathbf{z}, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ 分别为电、磁场的横向分量.如此有

$$\mathbf{E} = \mathbf{q} + \mathbf{E}_z, \mathbf{H} = \mathbf{z} \times \mathbf{p} + \mathbf{H}_z. \quad (7)$$

并把矢量算子 ∇ 拆为纵向与横向算子,单独记 z 方向微商 $\alpha(\#) \partial_z = (\#)$, 即

$$\nabla = \nabla_t + (\cdot) \mathbf{z}, \text{ 其中 } \nabla_t = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y. \quad (8)$$

根据(7)式把(4)式的被积函数展开,并做适当变换可得

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -j\omega\boldsymbol{\mu}'_t \cdot -j(\omega\varepsilon_z)\nabla_t\nabla_t \cdot \\ -j\omega\boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot + j(\omega\mu_z)\nabla_t \times \nabla_t \times & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

与方程(14)对应的理想导体侧边边界条件则是

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_t = 0 &\Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{q} = 0, \\ \mathbf{E}_z = 0 &\Rightarrow \nabla_t \cdot \mathbf{p} = 0, \end{aligned} \quad \text{在边界 } \Gamma \text{ 上.} \quad (16)$$

采用分离变量法,令

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(x, y)Z(z), \quad (17)$$

分离变量后的纵向方程为 $\dot{Z} = \gamma Z$, 容易解得

$$Z(z) = \exp(\gamma z), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{E}, \mathbf{H}) &= \iint_{\Omega} [\mathbf{p}^* \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_z^* \cdot \nabla_t \times \mathbf{q} + j\omega(\mathbf{q}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{q} + \varepsilon_z \mathbf{E}_z^* \cdot \mathbf{E}_z)/2 \\ &\quad + \mathbf{E}_z \cdot (\nabla_t \cdot \mathbf{p})^* + j\omega(\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\mu}'_t \cdot \mathbf{p} + \mu_z \mathbf{H}_z^* \cdot \mathbf{H}_z)/2] \mathrm{d}\Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\mu}'_t$ 定义如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\mu}'_t = \begin{bmatrix} \mu_y & 0 \\ 0 & \mu_x \end{bmatrix}.$$

对 $\mathbf{E}_z, \mathbf{H}_z$ 先行变分,得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= -j\nabla_t \cdot \mathbf{p}(\omega\varepsilon_z), \\ \mathbf{H}_z &= j\nabla_t \times \mathbf{q}(\omega\mu_z). \end{aligned} \quad (11)$$

将(11)式代入(9)式并做简单的矢量式恒等运算后,即可得到关于 \mathbf{q}, \mathbf{p} 的对偶变分原理

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \iint_{\Omega} [\mathbf{p}^* \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] \mathrm{d}\Omega \quad \delta\Pi \\ &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 即是 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= (\nabla_t \times \mathbf{q})^* \cdot (\nabla_t \times \mathbf{q})(2\omega\mu_z) \\ &\quad - j\omega\mathbf{q}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{q}/2 \\ &\quad + (\nabla_t \cdot \mathbf{p})^* (\nabla_t \cdot \mathbf{p})(2\omega\varepsilon_z) \\ &\quad - j\omega\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\mu}'_t \cdot \mathbf{p}/2. \end{aligned} \quad (13)$$

3. 对偶方程组与辛本征值问题

完成(12)式的变分运算即得出电磁波导的对偶微分方程

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v}, \quad (14)$$

式中各项定义为

相应地得到横向本征方程

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} = \gamma\boldsymbol{\psi}, \quad (19)$$

式中 $\gamma, \boldsymbol{\psi}$ 分别是待求的本征值与本征向量函数.

可以验证本征方程(19)的算子矩阵 \mathbf{H} 是 Hamilton 型^[6]的,也即对于任两个满足侧边边界条件的状态函数向量 \mathbf{v}_a 与 \mathbf{v}_b , 运用矢量格林公式及高斯定理并结合边界条件(16)可以证得

$$\begin{aligned}
& \mathbf{v}_a, \mathbf{H}\mathbf{v}_b \\
&= \iint_{\Omega} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_b d\Omega \\
&= \iint_{\Omega} [-j\omega \mathbf{q}_a \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{q}_b + j(\omega\mu_z) \mathbf{q}_a \cdot \nabla_t \times \nabla_t \\
&\quad \times \mathbf{q}_b + j\omega \mathbf{p}_a \cdot \boldsymbol{\mu}'_t \cdot \mathbf{p}_b \\
&\quad + j(\omega\varepsilon_z) \mathbf{p}_a \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \mathbf{p}_b] d\Omega \\
&= \iint_{\Omega} [-j\omega \mathbf{q}_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{q}_a + j(\omega\mu_z) \mathbf{q}_b \cdot \nabla_t \times \nabla_t \\
&\quad \times \mathbf{q}_a + j\omega \mathbf{p}_b \cdot \boldsymbol{\mu}'_t \cdot \mathbf{p}_a \\
&\quad + j(\omega\varepsilon_z) \mathbf{p}_b \cdot \nabla_t \nabla_t \cdot \mathbf{p}_a] d\Omega \\
&= \iint_{\Omega} \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_a d\Omega = \mathbf{v}_b, \mathbf{H}\mathbf{v}_a, \quad (20)
\end{aligned}$$

上式中尖括号算子表示辛内积, 定义为

$$\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b \triangleq \iint_{\Omega} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_b d\Omega, \quad (21)$$

而 \mathbf{J} 为 2 阶单元辛矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

对于 Hamilton 型的算子矩阵 \mathbf{H} , 有一系列关于其本征值问题的结论. 如 γ 是本征值则 $-\gamma$ 一定也是本征值. 因此全部本征值可以分为两类, 即

$$\begin{aligned}
1) & \gamma_i, \operatorname{Re}(\gamma_i) < 0 \text{ 或 } \operatorname{Re}(\gamma_i) = 0 \wedge \operatorname{Im}(\gamma_i) > 0, \\
2) & \gamma_{-i}, \gamma_{-i} = -\gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (23)
\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{Re}(\gamma_i) = 0$ 的本征解即对应于波的传播.

本征值 γ_i 和 γ_{-i} 所对应的本征向量函数 $\boldsymbol{\psi}_i$ 和 $\boldsymbol{\psi}_{-i}$ 互为辛共轭. \mathbf{H} 阵本征函数向量相互间的共轭辛正交归一关系^[7]为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j &= 0, \\
\boldsymbol{\psi}_{-i}, \boldsymbol{\psi}_{-j} &= 0, \\
\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_{-j} &= \delta_{ij}, \quad i, j > 0. \quad (24)
\end{aligned}$$

将本征函数向量编排为 $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_{-1}, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_{-2}, \dots$, 这些本征函数向量将成为状态空间的一个完备系. 根据(24)式, 任何横截面上的状态空间的函数 $\mathbf{v}(x, y)$ 皆可以由本征函数向量来展开

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(x, y) &= \sum_{i=1, 2, \dots} (a_i \boldsymbol{\psi}_i + b_i \boldsymbol{\psi}_{-i}), \\
a_i &= -\boldsymbol{\psi}_{-i}, \mathbf{v}, \\
b_i &= -\boldsymbol{\psi}_i, \mathbf{v}. \quad (25)
\end{aligned}$$

对于一般形状的横截面或填充有不均匀介质的电磁波导, 其解析求解是无望的. 对此只能采用数值方法进行求解. 在对横截面进行有限元半解析离散后, Hamilton 算子矩阵转化为 Hamilton 矩阵, 从而(19)式也成为 Hamilton 矩阵的本征问题.

4. 对偶棱边元

因为关心的是波导的传输问题, 设定 z 方向传播常数为 k_z , 即

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(x, y, z) &= \mathbf{q}(x, y) \exp(-jk_z z), \\
\mathbf{p}(x, y, z) &= \mathbf{p}(x, y) \exp(-jk_z z). \quad (26)
\end{aligned}$$

变分原理(12)则相应地可以改写为

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \iint_{\Omega} [k_z \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{q} + (\nabla_t \times \mathbf{q})^* \cdot (\nabla_t \\
&\quad \times \mathbf{q}) (2\omega\mu_z) - \omega \mathbf{q}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{q} / 2 \\
&\quad + (\nabla_t \cdot \mathbf{p})^* (\nabla_t \cdot \mathbf{p}) (2\omega\varepsilon_z) \\
&\quad - \omega \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\mu}'_t \cdot \mathbf{p} / 2] d\Omega, \\
\delta\Pi &= 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

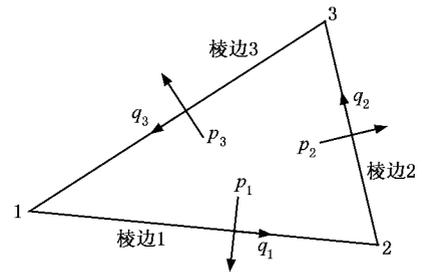


图1 三角形对偶棱边元

如图1所示, 对偶棱边元的思路在于用切向矢量基函数表示 \mathbf{q} 而用法向矢量基函数表示 \mathbf{p} , 即

$$\mathbf{q}^e = \sum_{i=1}^n N_i^e \mathbf{q}_i^e = \{N_i^e\}^T \{\mathbf{q}^e\}, \quad (28)$$

$$\mathbf{p}^e = \sum_{i=1}^n N_i^e \mathbf{p}_i^e = \{N_i^e\}^T \{\mathbf{p}^e\}, \quad (29)$$

其中 n 表示单元的棱边数, N_i^e 与 N_n^e 分别为切向与法向矢量基插值函数^[8].

将(28)(29)式代入(27)式, 可以得到

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^M (\{\mathbf{q}^e\}^T \{\mathbf{K}_{qq}^e / \omega - \omega \mathbf{M}_{qq}^e\} \{\mathbf{q}^e\} \\
&\quad + \{\mathbf{p}^e\}^T \{\mathbf{K}_{pp}^e / \omega - \omega \mathbf{M}_{pp}^e\} \{\mathbf{p}^e\} \\
&\quad + 2k_z \{\mathbf{p}^e\}^T \mathbf{M}_{pq}^e \{\mathbf{q}^e\}), \quad (30)
\end{aligned}$$

式中 M 表示单元数目, H 表示 Hermite 转置, 而各项单元矩阵为

$$\mathbf{K}_{qq}^e = \iint_{\Omega_e} \frac{1}{\mu_z} \{\nabla_t \times N_i^e\} \cdot \{\nabla_t \times N_j^e\}^T d\Omega, \quad (31)$$

$$\mathbf{K}_{pp}^e = \iint_{\Omega_e} \frac{1}{\varepsilon_z} \{\nabla_t \cdot N_i^e\} \cdot \{\nabla_t \cdot N_j^e\}^T d\Omega, \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_{qq}^e = \iint_{\Omega_e} \{N_i^e\} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \{N_j^e\}^T d\Omega, \quad (33)$$

$$\mathbf{M}_{pp}^e = \iint_{\Omega_e} \{N_n^e\} \cdot \boldsymbol{\mu}'_t \cdot \{N_n^e\}^T d\Omega, \quad (34)$$

$$\mathbf{M}_{pq}^e = \iint_{\Omega_e} \{N_n^e\} \cdot \{N_p^e\}^T d\Omega. \quad (35)$$

采用全局标记对(30)式进行求和并利用 Ritz 方法, 即可得到最终的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{qq}/\omega - \omega\mathbf{M}_{qq} & k_z\mathbf{M}_{qp} \\ k_z\mathbf{M}_{pq} & \mathbf{K}_{pp}/\omega - \omega\mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

基于(36)式有两种应用: 求解电磁波导的截止频率, 以及给定工作频率 ω 求解传播常数 k_z , 以下分别做出讨论.

1) 求解电磁波导的截止频率.

该种情况下方程(36)中 $k_z = 0$, 此时可以看到关于方程已解耦为关于 $\{q\}, \{p\}$ 的两个独立的广义本征值方程, 分别对应 TE, TM 两种模式.

$$\text{TE} : \mathbf{K}_{qq} \{q\} = \omega^2 \mathbf{M}_{qq} \{q\}, \quad (37)$$

$$\text{TM} : \mathbf{K}_{pp} \{p\} = \omega^2 \mathbf{M}_{pp} \{p\}, \quad (38)$$

2) 求解电磁波导的传播常数.

对(36)式进行简单的变形可得

$$\mathbf{K}(\omega) \{q\} = k_z^2 \mathbf{M}(\omega) \{q\}, \quad (39)$$

其中

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{K}_{qq}/\omega - \omega\mathbf{M}_{qq},$$

$$\mathbf{M}(\omega) = \mathbf{M}_{pp}(\mathbf{K}_{pp}/\omega - \omega\mathbf{M}_{pp})^{-1} \mathbf{M}_{pq}. \quad (40)$$

5. 数值算例

5.1. 矩形波导的截止模与传播模

考虑一个尺寸为 1.0cm × 0.37cm 的矩形空波导. 采用相同的有限元网格划分(322 个三角形单元) 分别由常规棱边元(在本算例中以电场为未知量) 及对偶棱边元计算出矩形波导的截止频率(自由空间波数 $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$). 分别列出该问题前 5 阶 TE, TM 模截止频率的解析解、两种有限元方法的数值结果及相对误差于表 1、表 2.

表 1 矩形空波导前五阶 TE 模的截止频率(k_0, cm^{-1})

模式	对偶棱边元解	常规棱边元解	对偶棱边元相对误差/%	常规棱边元相对误差/%	解析解
TE10	3.1415	3.1415	0.0032	0.0032	3.1416
TE20	6.2825	6.2825	0.0111	0.0111	6.2832
TE01	8.4937	8.4937	0.0342	0.0342	8.4908
TE11	9.0574	9.0574	0.0453	0.0453	9.0533
TE30	9.4232	9.4232	0.0170	0.0170	9.4248

表 2 矩形空波导前五阶 TM 模的截止频率(k_0, cm^{-1})

模式	对偶棱边元解	常规棱边元解	对偶棱边元相对误差/%	常规棱边元相对误差/%	解析解
TM11	9.0544	9.1195	0.0122	0.7312	9.0533
TM21	10.5657	10.6640	0.0275	0.9581	10.5628
TM31	12.6892	12.8560	0.0300	1.3449	12.6854
TM41	15.1673	15.4532	0.0086	1.8937	15.1660
TM12	17.2773	17.7302	0.0440	2.6665	17.2697

由于采用了矢量插值函数, 对偶棱边元不存在伪解的问题, 而是发现了一些零本征值的存在, 这一点与常规的棱边元一致. 观察表 1、表 2 中的数据可以发现, 在计算 TE 模时, 对偶棱边元得到了与常规棱边元完全一样的结果, 而对于 TM 模, 对偶棱边元的计算精度要好于常规棱边元. 分析(37)(38)式以及文献[8]给出的常规棱边元的列式可以对以上现象做出解释(以电场为未知量的)常规棱边元仅仅对于横向电场采用矢量插值函数离散, 而对于纵向

电场分量则仍然采用结点基单元, 而对偶棱边元则是对横向的电、磁场均采用矢量插值函数离散. 因为棱边元的精度较之结点基单元要高, 所以反映在该算例中则是对偶棱边元在计算 TM 模时精度高于常规棱边元.

对于本算例, 也可以参考(39)式计算出在给定的工作频率下波导的传播模个数以及相应的传播常数. 输入的工作频率越高, 波导的传播模个数越多, 然而由于有限元离散所带来的近似, 高次的传输模

往往难以得到.表 3 和图 2 给出了在相同的网格划分下(128 个三角形单元),分别由对偶棱边元、常规棱边元计算所得的对应于不同工作频率的矩形波导的传播模的个数,并给出相应的解析值作为对比.分析表 3、图 2 可以看到,当输入的工作频率较高时,常规棱边元已不能计算出所有的传播模态,而对偶棱边元的计算结果始终能与解析值符合,可见与常规棱边元相比,基于对偶变分原理的棱边元离散在这一问题上有一定优势.

表 3 特定工作频率下波导的传播模个数

工作频率 k_0/cm^{-1}	传播模的个数		
	理论值	常规棱边元计算结果	对偶棱边元计算结果
7	2	2	2
13	11	10	11
19	22	20	22
25	33	31	33
31	56	50	56

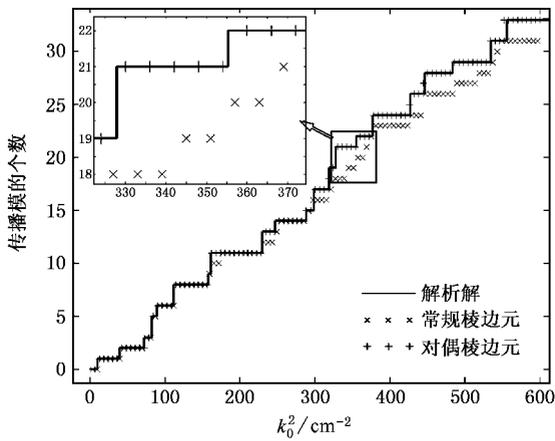


图 2 不同工作频率下波导的传播模个数

5.2. 屏蔽微带线的色散特性

为说明对偶棱边元处理不同材料之间的界面条件以及各向异性介质的有效性,考虑如图 3 所示的屏蔽微带线,其下半部分填充电介质为蓝宝石,其相对介电常数 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 9.4$, $\epsilon_{zz} = 11.6$,而上半部分为空气.图中各部分尺寸关系为 $a = 2b = 2w = 4d$,在有限元计算时认为微带厚度为零.图 4 给出在 128 个四边形对偶棱边元网格划分下计算所得的色散曲线,由于该问题不存在解析解,图中同时给出常规棱边元在 128 和 800 个四边形单元网格划分下的计算结果作为参考.观察图 4 可知,对于不同的模态,以

及在不同的工作频率下,对偶棱边元与常规棱边元的计算精度相当.但正如在算例 1 中所指出:当工作频率逐渐升高时,对偶棱边元能够比常规棱边元计算出更多的高次传输模,因此在某些特定的问题上,前者可以发挥出其独到的优势.

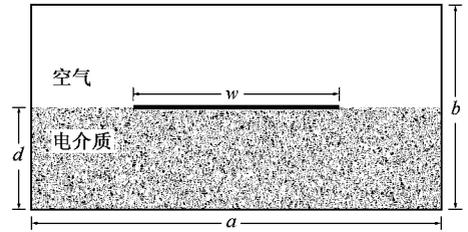


图 3 屏蔽微带线

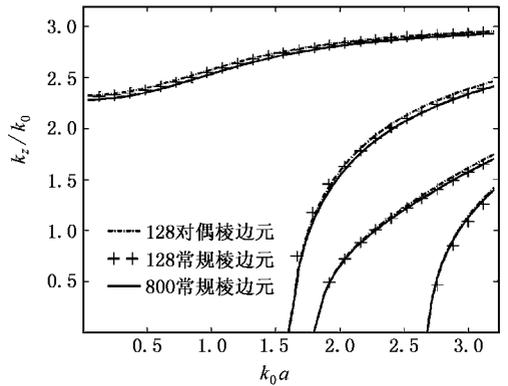


图 4 屏蔽微带线的色散曲线

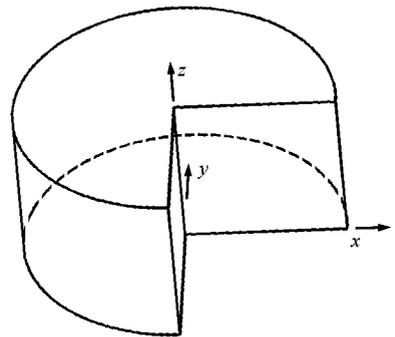


图 5 扇形柱体谐振腔

5.3. 扇形柱体谐振腔的谐振频率

考虑图 5 所示的三维扇形柱体金属空腔,其半径与高均为 1.0cm,内角为 $3\pi/2$.采用相同的网格划分,分别由常规棱边元(以电场为未知量)及对偶棱边元计算出腔体的谐振频率,并列该问题前 10 阶

表 4 扇形柱体金属空腔的前 10 阶谐振频率(f , 10GHz)

模式	对偶棱边元解	常规棱边元解	对偶棱边元相对误差/%	常规棱边元相对误差/%	解析解
TM110	1.6046	1.6297	0.3733	1.1850	1.6106
TE111	1.6401	1.6401	0.0756	0.0756	1.6413
TE211	1.8475	1.8475	0.0853	0.0853	1.8460
TM210	2.0446	2.0605	0.2316	1.0081	2.0399
TE311	2.0938	2.0938	0.1552	0.1552	2.0906
TM111	2.1958	2.2143	0.1995	0.6376	2.2002
TE411	2.3649	2.3649	0.1617	0.1617	2.3611
TE011	2.3664	2.3664	0.0949	0.0949	2.3642
TM310	2.4556	2.4878	0.2103	1.5266	2.4504
TM211	2.5352	2.5480	0.1508	0.6559	2.5314

谐振频率的解析解、两种有限元方法的数值结果及相对误差于表 4.

观察表 4 中的数据可以发现对于某些模式,对偶棱边元的计算精度高于常规棱边元现象,其具体的表现和解释与算例 1 是类似的,此处不再赘述.

由电磁场理论可以知道:在导体或电介质的尖边缘和尖点上,电磁场的某些分量会趋向无穷大,而图 5 中沿 z 轴的棱边即会呈现这种奇异的性质.图 6、图 7 分别是由对偶棱边元计算得到的 TM110 与 TE111 模态在横截面($z = 0.5\text{cm}$)上的磁、电场分布图,可以对奇异性电磁场做出直观的描述.奇异性问题曾有限元方法应用于计算电磁学所遇到的主要困难之一,对偶棱边元由于采用了矢量插值函数,可以方便地表征奇异性电磁场,因而不存在这个问题.

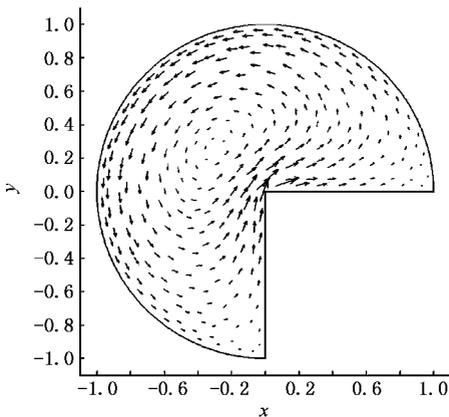


图 6 TM110 的截面磁场分布

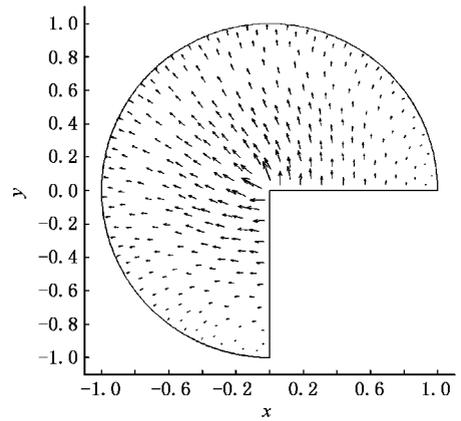


图 7 TE111 的截面电场分布

6. 结 论

本文从对偶变分原理出发,将电磁波导的基本方程导入 Hamilton 体系,并验证了波导的本征值问题就是 Hamilton 算子矩阵的辛本征值问题;同时提出对偶棱边元来数值求解复杂横截面和不均匀填充介质的波导问题,对偶棱边元继承了常规棱边元的优点,可以消除电磁场有限元计算中的非物理伪解,以及有效地模拟导电劈和各向异性材料,同时能够方便地求解电磁波导中的各种课题,文末的算例显示了与常规的棱边元方法相比,本文的算法在某些方面具有独到的优势.

- [1] Rahman B , Davies 1984 *IEEE Trans . Micro . Theo . Tech .* **32** 922 Education Press) p14 (in Chinese) [姚伟岸、钟万勰 2002 辛弹性力学 (北京 : 高等教育出版社) 第 14 页]
- [2] Ferrari R , Naidu R 1990 *IEE Proc . A* **137** 313
- [3] Meixner J 1972 *IEEE Trans . Anten . Prop .* **20** 442 [7] Zhong W 2004 *Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control* (NY : Kluwer Academic) p188
- [4] Nedelec J 1980 *Numer . Meth .* **35** 315
- [5] Zhong W X 2001 *J . Dalian Univ . Tech .* **41** 379 (in Chinese) [钟万勰 2001 大连理工大学学报 **41** 379] [8] Jin J 2002 *The Finite Element Method in Electromagnetics* 2nd ed (NY : J. Wiley & Sons) p273
- [6] Yao W , Zhong W 2002 *Symplectic elasticity* (Beijing : Higher

Symplectic analysis and dual edge element for electromagnetic waveguide^{*}

Chen Jie-Fu^{1)†} Zheng Chang-Liang²⁾ Zhong Wan-Xie¹⁾

1 *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment , Dalian University of Technology , Dalian 116023 , China*)

2 *Electromechanics and Materials Engineering College , Dalian Maritime University , Dalian 116026 , China*)

(Received 28 July 2005 ; revised manuscript received 8 October 2005)

Abstract

The governing equations for the electromagnetic waveguide are derived to Hamiltonian system formulation and symplectic geometric form , and transverse electric and magnetic components are treated as dual vectors to each other. By separation of variables , we arrived at a symplectic eigenvalue problem for Hamiltonian operator matrix , which can be solved by adjoint symplectic orthonormal relationship and the symplectic eigenfunction expansion method. A dual edge element is proposed for electromagnetic waveguide with irregular cross section and inhomogeneous loaded materials. Dual edge element can surmount those difficulties related to node-based finite elements in computational electromagnetics , and our numerical examples show that dual edge element has its own merits when compared with regular edge element .

Keywords : electromagnetic waveguide , Hamiltonian system , dual variables , edge element

PACC : 5235H , 0260

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372019).

[†] E-mail : chenjiefu@student.dlut.edu.cn