第 55 卷 第 5 期 2006 年 5 月
1000-3290/2006/55(05)/2422-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.5, May, 2006

带电粒子同超晶格的相互作用与系统的混沌行为*

邓成良† 邵明珠 罗诗裕

(东莞理工学院电子工程系，东莞 523106)

(2005 年 3 月 15 日收到；2005 年 10 月 11 日收到修改稿)

把超晶格'折沟道'对粒子的作用等效为形状相似的弱周期调制. 利用正弦平方势把粒子运动方程化为具有外周期弱调制的非线性微分方程，并利用 Melnikov 方法分析了系统出现 Smale 马蹄的临界条件. 预言了带电粒子同超晶格相互作用过程中，系统可能出现的混沌行为，为半导体超晶格材料的制备和半导体超晶格光磁电效应的研究提供了基本的理论分析.

关键词：超晶格，非线性，微分方程，混沌
PACC：6180M，7550R，0547

1. 引　　言

由于超晶格材料的特殊几何结构，可望得到均匀半导体材料所不具有的光电特征. 从而引起了人们对它的极大兴趣. 所谓超晶格就是将两种晶格常数不同的材料交替生长而成的多层薄膜结构. 比如，选择 GaP 作基片，沿[100]方向生长等厚的 GaP 和 $GaAs_1P_{1-x}$ 薄层，由于在生长方向上晶格失配，沿生长方向的各层将交替产生伸长和压缩形变，导致(110)平面沟道扭折，使直沟道变成了锯齿状的'折沟道". 这种沟道的特点是在界面处沟道平面连续，一阶导数不存在. 由于超晶格具有特殊的层状结构，可望用它把沟道辐射改造为 X 激光或 γ 激光，从而开辟超晶格材料应用的新领域；又由于超晶格材料的组分和层厚等均可以人为控制，可望得到均匀半导体材料所不具有的光电特征. 注意到粒子在(110)面沟道中运动时，由于不断受到'折沟道'对它的作用，它的横向动量在界面处发生突变. 效果等效于在直沟道中运动的粒子受到如'折沟道'相似的相互作用势的调制. 调制的强弱与晶格畸变有关. 当然与平面连续势相比，它只是一个小量. 正是在这一基本假设下，从一般运动方程出发，把'折沟道"的退道效应等效为面沟道粒子受到弱的周期调制，利用我们曾经提出的正弦平方势[1]，把粒子运动方程化为具有外周期弱调制的非线性微分方程，并利用 Melnikov 方法分析了系统出现 Smale 马蹄的临界条件. 预言了带电粒子同超晶格相互作用过程中，系统可能出现的混沌行为，为半导体超晶格材料的制备和半导体超晶格光磁电效应的研究提供了基本的理论分析.

事实上，在研究超晶格光磁电效应时，可能会遇到由于混沌引起的噪声问题. 如果这个问题存在，只需适当调整参数(比如超晶格的层厚或组分等)，便可以使这种噪声得以消减.

2. 运动方程

我们以超晶格面沟道效应为例来说明沟道粒子的共振行为. 假设带正电的粒子运动在(x, z)平面内，其中 z 是沿沟道中心线方向，x 是粒子在沟道平面内离开 z 轴的距离. 注意到超晶格的沟道不再是直沟道，而是轴线呈锯齿状的折沟道，于是，粒子与晶面的相互作用势就不再是平面的，而是受到折沟道调制的非平面连续势；再注意到任何假设都是近似的，没有近似就没有认识. 不妨假设[1]

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x)W(z),$$

其中 $V_0(x)$是直沟道中的平面连续势，$V_1(x)W(z)$是沟道偏折引起的扰动项. $W(z)$是以层厚 l_0 为周

* 国家自然科学基金(批准号：20375008)资助的课题.

† E-mail：dengcl@dgut.edu.cn

期的锯齿形函数，且有 $\int_0^l W(z)\mathrm{d}z = 0$；$V_1(x)$ 与沟道的具体畸变状态有关．仅当沟道势的振幅被调制时，$V_1(x) \approx V_0(x)$；仅当沟道轴形变时，$V_1(x) \approx \frac{\mathrm{d}V_0(x)}{\mathrm{d}x}$．通常两种情况都存在，于是扰动算符可表示为

$$V_1(x)W(z) = \left[a_1 V_0(x) + a_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_0(x)\right]W(z), \tag{1}$$

其中 a_1，a_2 是比例常数．

利用我们曾经提出的正弦平方势，可将平面连续势 $V_0(x)$ 表示为[1]

$$V_0(x) = K\beta_1 \sin^2 \frac{\pi}{d_p}x, \tag{2}$$

其中 $K\beta_1$ 是势阱深度，β_1 是势参数，且

$$K = \pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2,$$

而 d_p 是平面间距，Z_1 和 Z_2 是入射粒子和晶体的原子序数，e 是电子电荷，N 是靶原子密度，将(2)式代入(1)式，可得

$$V_1(x) = a_3[(1 - \cos(\pi X)] + a_4 \sin(\pi X), \tag{3}$$

其中

$$a_3 = a_1 K\beta_1/2, \quad a_4 = \pi a_2 K\beta_1/d_p, \quad X = 2x/d_p. \tag{4}$$

在偶极近似下，粒子运动规律可用经典方法描述，且运动方程可表示为

$$m\gamma \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\mu_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \nabla V(x) = 0, \tag{5}$$

其中 m 是粒子静止质量，γ 是相对论因子，x 和 X 之间的关系由(4)式给出．考虑到沟道粒子同晶体内部的电子云相互作用而损失能量，单位长度上的能损为 $2\mu_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，其中 μ_0 由文献[2—4]给出，且可表示为

$$\mu_0 = \frac{2\pi L r_e r_p j Z_2^2}{e\gamma^2 A\beta}\left(\frac{c}{v^*}\right)^3, \tag{6}$$

A 是靶原子量，且

$$r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2, \quad r_p = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_p c^2,$$
$$j = Z_1 e n_e \beta c, \quad L \cong \ln\left(\frac{\lambda_D (v^*/c)^2}{2Z_2 r_e}\right), \tag{7}$$

r_e 和 r_p 分别是经典的电子和质子半径，n_e 是晶体的电子云密度，j 是粒子束流密度，v^* 是粒子和电子之间的相对热速度，λ_D是 Debye 屏蔽距离，β 是无量纲的粒子速度，c 是光速．

将(2)和(3)式展开，并略去高阶项，则力函数 $\nabla V(x)$ 可表示为

$$\begin{aligned}\nabla V(x) &= \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\\ &= U_0(x - a_0 x^3) + U_0 c_0 (1 + c_1 x\\ &\quad - c_2 x^2 - c_3 x^3) W(z),\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}&U_0 = 8\pi^2 K\beta_1/d_p, \quad a_0 = 32\pi^3 U_0/3d_p^3,\\ &c_0 = d_p a_4/2\pi\beta_1\\ &c_1 = 4\pi a_3/d_p a_4, \quad c_2 = 8\pi^2/d_p^2,\\ &c_3 = 32\pi a_3/3d_p^2 a_4.\end{aligned} \tag{9}$$

令

$$\tau = (U_0/m\gamma)^{1/2} t, \tag{10}$$

将(8)式代入(5)式，引进小参数 ε，可将无量纲的粒子运动方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}\tau^2} + X + 2\mu\varepsilon \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} - aX^3$$
$$+ \varepsilon(p_1 + p_2 X - \varepsilon p_3 X^2 - \varepsilon^2 p_4 X^3) W(z) = 0, \tag{11}$$

其中 $z = vt$，v 是粒子速度，t 和 τ 的关系由(10)式给出；而小参数 ε 仅在形式上表示各项的大小．且

$$\begin{aligned}&\varepsilon\mu = \mu_0/(m\gamma U_0)^{1/2}, \quad a = a_0 x_m^2, x_m = d_p/2,\\ &\varepsilon p_1 = c_0/x_m,\\ &\varepsilon p_2 = c_0 c_1, \quad \varepsilon^2 p_3 = 3c_0 c_2 x_m,\\ &\varepsilon^3 p_4 = c_0 c_3 x_m^2,\end{aligned} \tag{12}$$

x_m 是粒子偏离沟道中心平面的最大距离．考虑到 $W(z)$是 z 的周期函数，则 $W(z)$可展开为

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega z, \tag{13}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{-1/2}^{1/2} W(\tau)\cos\frac{2\pi nz}{l}\mathrm{d}z, \tag{14}$$

$$\omega = \frac{2\pi v}{l}\sqrt{\frac{m\gamma}{U_0}}. \tag{15}$$

注意到，对于薄层等厚的超晶格，沟道轴的方向与 z 轴的关系呈锯齿状，假设调制函数 $W(z)$也具有相似形状，且可用阶跃函数表示为

$$W(z) = \begin{cases}\varphi\left(\frac{l}{2} + z\right) & -l \leqslant z \leqslant 0,\\ \varphi\left(\frac{l}{2} - z\right) & 0 \leqslant z \leqslant l,\end{cases} \tag{16}$$

其中 φ 是斜率．将(16)式代入(14)式，可得

$$b_n = \begin{cases}\frac{4\varphi l}{(n\pi)^2} & n \text{ 为奇数},\\ 0 & n \text{ 为偶数}.\end{cases} \tag{17}$$

将方程(13)代入方程(11),并注意到(17)式,就可进一步讨论系统(11)的 Smale 马蹄与混沌行为.

3. 系统的 Smale 马蹄与混沌行为

令

$$\psi = \sqrt{a}X, \quad \delta_1 = \sqrt{a}p_1, \quad \delta_2 = p_2,$$
$$\delta_3 = \varepsilon p_3/\sqrt{a}, \quad \delta_4 = \varepsilon^2 p_4/a, \tag{18}$$

则方程(11)可化为

$$\ddot{\psi} + \psi - \psi^3 = \varepsilon\{-2\mu\dot{\psi} - (\delta_1 + \delta_2\psi - \delta_3\psi^2 - \delta_4\psi^3)\}W(\tau), \tag{19}$$

其中 τ 由(10)式给出. 我们关心的是系统(19)的 Smale 马蹄与混沌行为. 为此,首先找出系统的分界线和它内部的周期解,然后构造相应的 Melnikov 函数,再根据 Melnikov 函数的特征,讨论系统稳定和不稳定流形的横向交截条件,然后判断系统是否存在 Smale 马蹄与 Smale 马蹄意义上的混沌行为.

令方程(19)中的 $\varepsilon = 0$,可得无扰动系统

$$\ddot{\psi} + \psi - \psi^3 = 0. \tag{20}$$

引入积分常数 h,并分两种情况讨论.

1) $h = 1/4$

方程(20)的解可表示为[5]

$$\psi = \pm\tanh(\tau/\sqrt{2}),$$
$$\frac{d\psi}{d\tau} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sech}^2(\tau/\sqrt{2}). \tag{21}$$

(21)式对应于系统(20)的分界线,粒子运动周期为无穷. 与分界线(21)对应的 Melnikov 函数可表示为

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi}{d\tau}\Big[-2\mu\frac{d\psi}{d\tau} - (\delta_1 + \delta_2\psi - \delta_3\psi^2 - \delta_4\psi^3)W(\tau - \tau_0)\Big]d\tau. \tag{22}$$

将(13)和(21)式代入方程(22),并令 $n = 1$,完成积分,可得

$$\begin{aligned} M(\tau_0) = {} & \frac{4\sqrt{2}}{3}\mu \pm \sqrt{2}\pi\omega b_1\delta_1\mathrm{cosech}\left(\frac{\omega\tau_0}{\sqrt{2}}\right)\cos(\omega\tau_0) \\ & + \Big\{2\sqrt{2}\delta_2 b_1\omega\sin(\omega\tau_0) \\ & \pm \frac{2}{3}\delta_3 b_1(\omega^2 - 2)\cos(\omega\tau_0) \\ & + \frac{2}{3}\delta_4 b_1(\omega^4 - 4)\sin(\omega\tau_0)\Big\} \\ & \times B\left(1 + \frac{i\omega}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $B\left(1+\frac{i\omega}{\sqrt{2}}, 1-\frac{i\omega}{\sqrt{2}}\right)$ 是 β 函数[6], b_1 是 $W(z)$ 的傅里叶展开一次项系数(见(13—15)式). 由(23)式可得稳定和不稳定流形横向交截的必要条件是

$$\left|\frac{b_1}{\mu}\right| \geqslant \left|\frac{b_{1c}}{\mu}\right|, \tag{24}$$

其中 b_{1c} 是 b_1 的临界值,且

$$\frac{b_{1c}}{\mu} = \frac{4\sinh(\pi\omega/\sqrt{2})}{\pi\omega[3\delta_1 + 3\sqrt{2}\delta_2\omega + \delta_3(\omega^2 - 2) + \delta_4(\omega^2 - 4)]}. \tag{25}$$

由(23)式可知

$$\frac{dM(\tau_0)}{d\tau_0} \neq 0. \tag{26}$$

于是系统有简单零点. 方程(26)是系统稳定和不稳定流形横向交截的充分条件. 只要条件(24)满足,系统将出现 Smale 马蹄意义上的混沌.

2) $0 \leqslant h < 1/4$

方程(20)的解称为旋转周期解,且可表示为

$$\psi = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\mathrm{sn}(u),$$
$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\sqrt{2}\kappa}{1+\kappa^2}\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u), \tag{27}$$

其中

$$u = \tau/\sqrt{1+\kappa^2}, \quad h = \frac{\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2}, \tag{28}$$

$\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(u)$ 和 $\mathrm{dn}(u)$ 是 Jacobian 椭圆函数,粒子运动周期

$$T = 4\sqrt{1+\kappa^2}K(\kappa), \tag{29}$$

其中 $K(\kappa)$ 是第一类全椭圆积分,相关的 Melnikov 函数可表示为(对于 $n = 1$,周期 $T = 2\pi m/\omega$ 的次谐波)[6]

$$\begin{aligned} M^{m/1}(\tau_0) & = \int_0^T \frac{d\psi}{d\tau}\Big[-2\mu\frac{d\psi}{d\tau}(\delta_1 + \delta_2\psi - \delta_3\psi^2 - \delta_4\psi^3)W(\tau - \tau_0)\Big]d\tau \\ & = -\mu J_1(m,1) - [\delta_1 b_1 J_2(m,1) + \delta_2 b_1 J_3(m,1)]\cos(\omega\tau_0), \end{aligned} \tag{30}$$

$$J_1(m,1) = \frac{16}{3(1+\kappa^2)^{3/2}}[(\kappa^2 - 1)K(\kappa) + (\kappa^2 + 1)E(\kappa)], \tag{31}$$

$$J_2(m,1) = \begin{cases} 4\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{cosech}\left(\dfrac{m\pi K'}{K}\right) & p = 1, m \text{ 为奇数}, \\ 0 & p \neq 1, m \text{ 为偶数}, \end{cases} \tag{32}$$

$$J_3(m,1)=\begin{cases}\pi\omega(1-\omega^2)\dfrac{(1+\kappa^2)^{1/2}}{\kappa}\operatorname{cosech}\dfrac{m\pi K'}{K} & p=1, m \text{ 为奇数,}\\ 0 & p\neq 1, m \text{ 为偶数,}\end{cases} \tag{33}$$

其中 $E(\kappa)$是第二类全椭圆积分，而

$$K' = K(\kappa'),\quad \kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}. \tag{34}$$

利用类似方法可求得系统稳定和不稳定流形横向交截的必要条件

$$\frac{b_1}{\mu} \geqslant \left|\frac{b_{1c}}{\mu}\right|, \tag{35}$$

其中

$$\frac{b_{1c}}{\mu} = \frac{J_1(m,1)}{\delta_2 J_2(m,1) + \delta_1 J_2(m,1)}, \tag{36}$$

而 Smale 马蹄存在的充分条件可直接从

$$\frac{\mathrm{d}M^{m/1}(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0} \neq 0 \tag{37}$$

看出[7—9].

4. 结果和讨论

我们把超晶格‘折沟道’对粒子的作用等效为形状相似的弱周期调制. 利用作者之一曾经提出的正弦平方势把粒子运动方程化为具有外周期弱调制的非线性微分方程，并利用 Melnikov 方法分析了系统出现 Smale 马蹄的临界条件和 Smale 马蹄意义上的混沌行为. 预言了带电粒子同超晶格相互作用过程中，系统可能出现的混沌行为，为研究超晶格光磁电效应提供了基本的理论分析.

[1] Luo S Y, Shao M Z 1984 *Chin Phys*. (USA) **4** 670

[2] Korol A, Solovyov A V, Greiner W 1998 *J Phys*. G**24** L 145

[3] Korol A, Solovyov A V, Greiner W 1999 *Int J Mod Phys*. E **8** 49

[4] Robin N, Heiland W, Jensen J *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. A **64** 052901, 1

[5] Luo S Y, Shao M Z, Zhou X F 2003 *Chin*. *J*. *Semiconductors* **24** 513 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠、周小方 2003 半导体学报 **24** 513]

[6] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals, Series and Products* (New York: Academic Press) p948

[7] Luo S Y, Shao M Z, Hu X D 2004 *HEP & NP* **28** 96 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠、胡西多 2004 高能物理与核物理 **28** 96]

[8] Luo S Y, Shao M Z 2004 *HEP & NP* **28** 96 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2004 高能物理与核物理 **28** 96]

[9] Luo S Y, Tan Y M, Shao M Z *et al* 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1157 (in Chinese) [罗诗裕、谭永明、邵明珠等 2004 物理学报 **53** 1157]

Interaction between charged particle and strained superlattice and chaotic behaviours of the system*

Deng Cheng-Liang† Shao Ming-Zhu Luo Shi-Yu

(*Department of Electrical Engineering*, *Dongguan University of Technology*, *Dongguan* 523106, *China*)

(Received 15 March 2005; revised manuscript received 11 October 2005)

Abstract

The effect on a particle motion of a deflecting channel is equated to modulation by a weak-periodic potential of similar shape as the channel. The motion equation of a particle is reduced to the nonlinear differential equation with a weak-periodic modulation by sine-squared potential. The critical conditions for the revelation of Smale horseshoe are analyzed using the Melnikov method. It is predicted that the chaotic behaviours may exit in the interaction of a particles between a crystal. Theory is provided to describe PME effects for the semicoductor superlattice.

Keywords: strained superlattice, nonlinearity, differential equation, chaos

PACC: 6180M, 7550R, 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 20375008).

† E-mail: dengcl@dgut.edu.cn