原子间纠缠和光场模间纠缠的对应关系*

熊恒 m^{1} 郭 红^{1)2)3)^{*}} 江 健¹⁾ 陈 俊¹⁾ 唐丽艳¹⁾

1 《华中师范大学物理科学与技术学院,武汉 430079)
 2 《中国科学院武汉物理与数学研究所,波谱与原子分子物理国家重点实验室,武汉 430071)
 3 《中国科学院冷原子物理中心,武汉 430071)

(2005年6月6日收到 2005年11月12日收到修改稿)

本文应用 negativity 和 concurrence 两种纠缠度量标准,考察了双原子与双模光场相互作用系统中,原子间纠缠 和光场模间纠缠随时间的演化规律,发现它们在时间演化过程中可以相互转换,在一定条件下两者具有很好的对 应关系,对于两量子位系统, negativity 和 concurrence 的取值范围一样,在判断纠缠存在与否的标准上也完全相同,但 当系统处于混态时二者的大小不能始终保持一致.

关键词:量子纠缠, negetivity, concurrence, 双原子, 双模光场 PACC: 4250

1.引 言

量子纠缠由于其奇妙特性在量子通讯和量子计 算领域中发挥着重要作用.人们在理论和实验上对 单原子和单模光场相互作用系统的纠缠^[4-7]以及双原子 和单模光场相互作用系统的纠缠^[4-7]以及双原子 和单模光场相互作用系统的纠缠^[8-12]进行了大量研 究.文献 13 提出了两相距遥远的量子位通过与双 模压缩光场的共振相互作用,可以有效地实现光场 模间纠缠和两量子位纠缠的转移;文献 14]证明了 两个运动的二能级原子分别与两个腔场发生依赖强 度的相互作用时,原子的最大纠缠态和腔场的最大 纠缠态之间可以相互交换.但是,关于两个原子间纠 缠和光场模间纠缠的时间演化规律及其对应关系的 研究至今未见相关报道.

人们相继提出了形成纠缠度、提纯纠缠度和相 对熵纠缠度等纠缠度量标准^{15]},但是这些度量标准 往往计算起来比较困难.近来,两种简单易解的两体 纠缠度——negativity^{16,17]}和 concurrence^[18—20]已经被 广泛的应用.文献 21]中阐明对于处于纯态的两量 子位系统其 negetivity和 concurrence 完全相同,但是 对于处于混态的两量子位系统二者并非完全相同.

本文研究了两个二能级原子分别与双模光场的

一个模相互作用的系统中原子间纠缠和光场模间纠 缠随时间的演化规律,结果表明它们在演化过程中 可以相互转换,在一定条件下两者存在很好的对应 关系,对于处于混态的两量子位系统,negativity和 concurrence在纠缠存在与否的判断标准上完全相 同,但二者的取值仅在某些特殊条件下相等.

2. 理论模型

描述两个不同的二能级原子分别与双模光场的 一个模相互作用的哈密顿量在旋波近似下可写为 (假设₁=1)

$$H = H_0 + V , \qquad (1)$$

其中

$$H_0 = \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_1 s_1^z + \omega_2 a_2^+ a_2 + \omega_2 s_2^z , \quad (2)$$

 $V = g_1(a_1s_1^+ + a_1^+s_1^-) + g_2(a_2s_2^+ + a_2^+s_2^-)(3)$ 式中 , a_i^+ 和 $a_i(i = 1, 2)$ 分别表示频率为 ω_i 的光场 的产生和湮没算符 , s_i^{\pm} 和 s_i^{\pm} 为原子的赝自旋算符 , g_i 为第 *i* 个原子与光场第 *i* 个模的耦合常数.

在相互作用绘景中 系统的态矢为

$$\Psi(t) = \sum_{m=-1}^{\infty} \sum_{n=-1}^{\infty} [C_{nn}^{ee}(t)] ee ,mn + C_{m+1,n+1}^{ee}(t) |gg,m+1,n+1]$$

^{*}国家自然科学基金(批准号 160478049,10474027)资助的课题.

[†] 通讯联系人.E-mail:guohong@phy.ccnu.edu.cn

$$+ C_{m,n+1}^{eg}(t) | eg, m, n+1 \\
+ C_{m+1,n}^{ge}(t) | ge, m+1, n], \quad (4)$$
)式对应的系数为
$$C_{mn}^{ee}(t) = (1/2 \mathbf{I} \kappa_{+}C(t) + \kappa_{-}C(t)) \\
- i\eta_{+} S(t) + i\eta_{-}S(t)], \quad (5a)$$

$$C_{m,n+1}^{eg}(t) = (1/2 \mathbf{I} \eta_{+}C(t) + \eta_{-}C(t)) \\
- i\kappa_{+}S(t) + i\kappa_{-}S(t)], \quad (5b)$$

$$C_{m+1,n}^{ge}(t) = (1/2 \mathbf{I} \eta_{+}C(t) - \eta_{-}C(t))$$

$$- i\kappa_{+}S(t) - i\kappa_{-}S(t)], \quad (5c)$$

$$C_{m+1,n+1}^{gg}(t) = (1/2 \mathbf{I} \kappa_{+}C(t) - \kappa_{-}C(t))$$

$$- i\eta_{+}S(t) - i\eta_{-}S(t)], \quad (5d)$$

其中

$$\kappa_{\pm} = \begin{bmatrix} C_{mn}^{ee}(0) \pm C_{m+1,n+1}^{gg}(0) \end{bmatrix}, \quad (6a)$$

$$\eta_{\pm} = \begin{bmatrix} C_{m,n+1}^{eg}(0) \pm C_{m+1,n}^{ge}(0) \end{bmatrix}, \quad (6b)$$

$$C_{\pm}(t) = \cos\{(\alpha_{m} \pm \beta_{n})t\}, \quad (6c)$$

$$S_{\pm}(t) = \sin\{(\alpha_{m} \pm \beta_{n})t\}, \quad (6d)$$

(6) $\exists : \mathbf{r} = g_1 \sqrt{m+1} \ _{\beta_n} = g_2 \sqrt{n+1}.$

通过计算可以发现,在我们所研究的两种初态 条件下原子和光场的密度矩阵均具有如下形式:

$$\rho = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & E \\ 0 & B & F & 0 \\ 0 & F^* & C & 0 \\ E^* & 0 & 0 & D \end{bmatrix}.$$
 (7)

不难证明,当 $\sqrt{AD} \leq |F|$ 时, ρ 对应的 negativity为

$$N(\rho) = \sqrt{(A + D)^{2} - 4AD + 4|F|^{2}} - (A + D),$$
(8)

而 concurrence 为

$$\mathcal{O}(\rho) = \mathcal{A}[|F| - \sqrt{AD}]. \tag{9}$$

显然 $\sqrt{AD} = |F|$ 时, $N(\rho) = C(\rho) = 0$;当 $\sqrt{AD} < |F|$ 时, $C(\rho) \ge N(\rho) > 0$ (等号仅在A = D时成立).

当
$$\sqrt{BC} \le |E|$$
时 ρ 对应的 negativity为
N(ρ) = $\sqrt{(B + C)^2 - 4BC + 4|E|^2} - (B + C)$,
(10)

而 concurrence 为

$$\mathcal{A}(\rho) = \mathcal{A} \mid E \mid -\sqrt{BC}). \tag{11}$$

不难看出 $\sqrt{BC} = |E|$ 时, $N(\rho) = C(\rho) = 0$;当 \sqrt{BC} < |E|时, $C(\rho) \ge N(\rho) > 0$ (等号仅在 B = C 时成 立).

- 3. 讨论与分析
- **3.1.** 初始时刻两原子处于状态相同的相干叠加态, 光场为真空态

系统的初始状态为

 Ψ(0) = cosθ |gg µ0 + e^{iθ}sinθ |ee µ0 (0 ≤ θ ≤ π/2, - π < φ < π). (12)
 显然, C^{ee}₀(0) = e^{iθ}sinθ, C^{ee}₀(0) = cosθ, 其他的初态系
 数均为 0.因此, 由(4)→(6)式很容易得到系统在 t
 时刻的状态为

$$|\Psi(t) = C_{00}^{gg}(t)|gg|00 + C_{00}^{ee}(t)|ee|00$$

+ $C_{01}^{eg}(t)|eg|01$
+ $C_{10}^{ge}(t)|ge|10$
+ $C_{11}^{ge}(t)|gg|11$, (13)

其中

$$C_{00}^{gg}(t) = \cos\theta , \qquad (14a)$$

$$C_{00}^{ee}(t) = e^{i\phi} \sin\theta \cos(g_1 t) \cos(g_2 t), \quad (14b)$$
$$C_{01}^{ee}(t) = -ie^{i\phi} \sin\theta \cos(g_1 t) \sin(g_2 t), \quad (14c)$$

$$U_{10}^{ge}(t) = -ie^{ir}\sin\theta\sin(g_1 t)\cos(g_2 t)$$
, (14d)

$$C_{11}^{gg}(t) = -e^{i\theta}\sin\theta\sin(g_1t)\sin(g_2t). \quad (14e)$$

此时两原子对应的密度矩阵 ho_a 中的参数为

$$A_{\rm a} = |C_{00}^{\rm gg}(t)|^2 + |C_{11}^{\rm gg}(t)|^2$$
, (15a)

$$B_{a} = |C_{10}^{ge}(t)|^{2} , \qquad (15b)$$

$$C_{\rm a} = |C_{\rm 01}^{\rm eg}(t)|^2$$
, (15c)

$$D_{\rm a} = |C_{00}^{ee}(t)|^2 , \qquad (15d)$$

$$E_{a} = C_{00}^{gg}(t)C_{00}^{ge}(t), \qquad (15e)$$

$$F_{a} = 0.$$
 (15f)

双模光场对应的密度矩阵 $ho_{
m f}$ 中的参数为

$$A_{\rm f} = |C_{00}^{\rm gg}(t)|^2 + |C_{00}^{\rm ee}(t)|^2$$
, (16a)

$$B_{\rm f} = |C_{0\rm I}^{eg}(t)|^2$$
, (16b)

$$C_{\rm f} = |C_{10}^{\rm ge}(t)|^2$$
, (16c)

$$D_{\rm f} = |C_{11}^{\rm gg}(t)|^2$$
, (16d)

$$E_{\rm f} = C_{11}^{\rm gg}(t) C_{00}^{\rm gg}(t), \qquad (16e)$$

$$F_{\rm f} = 0. \tag{16f}$$

显然,这种情况下原子(光场)的 negativity 和 concurrence 只可能分别具有(10)式和(11)式的表达形式.

(4

$$N(\rho_{a}) = O(\rho_{a}) = \max\{0 \ 2\sin\theta\cos^{2}(gt) \\ \times [\cos\theta - \sin\theta\sin^{2}(gt)]\}, \quad (17)$$
$$N(\rho_{f}) = O(\rho_{f}) = \max\{0 \ 2\sin\theta\sin^{2}(gt)\}$$

2722

 $\times [\cos\theta - \sin\theta \cos^2(gt)] \}.$ (18)

比较这两式不难发现,原子和光场的 negativity (concurrence)的周期均为 π/g ,最大值都是 sin(2θ), 说明原子间纠缠和光场模间纠缠所能达到的最大纠 缠度均依赖于系统的初始状态;原子间纠缠和光场 模间纠缠具有相同的时间演化规律,只是后者滞后 前者半个周期,如图 1 所示.图中给出了原子间纠缠 $N(\rho_a)$ 和光场模间纠缠 $N(\rho_f)$ 在不同初态下的时间 演化曲线.当 $0 < \theta \le \pi/4$ 时,除 gt = (k + 1/2) (k = 0, 1, ...)时刻为非纠缠态, 而光场也只在 $gt = k\pi(k = 0, 1, ...)$ 时刻为非纠缠态.当 $\pi/4 < \theta < \pi/2$ 时,光场处于纠缠态的时间区域为

 $\pi/2 - \cos^{-1}(1 - 2\cot\theta)/2 + k\pi < gt < \pi/2$ + $\cos^{-1}(1 - 2\cot\theta)/2 + k\pi(k = 0, 1, ...), (19)$ 而原子也只有在

 $0 < gt < \cos^{-1}(1 - 2\cot\theta)/2$ (20) $\pi - \cos^{-1}(1 - 2\cot\theta)/2 + k\pi < gt$

 $< \cos^{-1}(1 - 2\cot\theta)/2 + k\pi(k = 1, 2, ...)(21)$ 时才处于纠缠态.这说明,原子间纠缠和光场模间纠 缠的演化规律不仅取决于原子与光场的耦合强度, 而且依赖于原子的初态.当 $gt_i = (k + 1/2)\pi(k = 0, 1, ...)$ 时刻光场塌缩至状态

 $|\Psi(t_{f})_{f} = \cos\theta |00 - e^{i\phi}\sin\theta |11 , (22)$ 而两原子退纠缠成为分离态

$$\Psi(t_f)_{a} = |gg|. \qquad (23)$$

此后又经过半个周期后,系统的状态又恢复为初始 时刻的状态,即两原子处于状态相同的相干叠加态, 而光场的两个模则处于分离的真空态.这表明在原 子和光场耦合强度 g1 和 g2 相同的条件下,原子间 纠缠和光场模间纠缠可以相互转换,并具有很好的 对应关系.

在 $g_1 \neq g_2$ 情况下,原子和光场的 negativity (concurrence)仍然是时间的周期函数,且周期的大小 依赖于原子-光场的耦合强度 g_1 和 g_2 ,值得注意的 是原子间纠缠度的最大值只与原子的初始状态有 关 但光场模间纠缠度的最大值不仅与系统的初始 状态有关,而且取决于原子和光场的耦合强度 g_1 和 g_2 ,因此光场模间纠缠度的最大值小于原子间纠缠 度的最大值.图 2 给出了在 $g_2/g_1 = 1.5$, $\theta = \pi/4$ 情 况下原子间纠缠和光场模间纠缠的时间演化曲线, 显然它们的周期均为 $2\pi/g(g = g_1)$,在时间演化过 程中都出现了次极大值,由于 $g_1 \neq g_2$ 时两原子的 Rabi 频率不同导致原子间纠缠和光场模间纠缠的 相互转换能力下降.从图 $\chi(a)$ 和图 $\chi(b)$ 可以发现, 在时间演化过程中原子(光场)的 negativity 和 concurrence 不再时时相等,只在零点处二者始终保 持一致.



图 1 $g_2/g_1 = 1$ 时 $N(\rho_i)$ *i* = a, *f*)随时间的演化 (a) $\theta = \pi/8$; (b) $\theta = \pi/4$; (c) $\theta = 3\pi/8$

3.2. 初始时刻两原子处于状态相反的相干叠加态, 光场为真空态

初始时刻(*t*=0)双原子和双模光场相互作用系统的状态为

 $|\Psi(0) = \cos\theta |eg| 00 + e^{i\phi} \sin\theta |ge| 00$

 $(0 \le \theta \le \pi/2, -\pi \le \phi < \pi)(24)$ 其对应于(4)式的初态系数为: $C_{00}^{\text{se}}(0) = e^{i\phi} \sin\theta$, $C_{00}^{\text{se}}(0) = \cos\theta$,余下的均为0.t时刻系统的状态为

$$|\Psi(t) = C_{00}^{eg}(t)|eg \ D0 + C_{00}^{ge}(t)|ge \ D0$$

+
$$C_{10}^{gg}(t) | gg$$
 ,10 + $C_{01}^{gg}(t) | gg$,01 ,

兵中
$$C_{00}^{ee}(t) = \cos\theta\cos(g_1 t)$$
, (26a)
 $C_{00}^{ee}(t) = e^{i\phi}\sin\theta\cos(g_2 t)$, (26b)



图 2 $g_2/g_1 = 1.5$, $\theta = \pi/4$ 时 $N(\rho_i)$ 和 $Q(\rho_i)$ i = a, f) 随时间的演化

$$C_{10}^{gg}(t) = -i\cos\theta \sin(g_1 t)$$
, (26c)

$$C_{01}^{gg}(t) = -ie^{i\phi}\sin\theta\sin(g_2 t).$$
 (26d)

此情况下 ρ_a 和 ρ_f 对应的参数为

$$A_{\rm a} = |C_{01}^{\rm gg}(t)|^2 + |C_{10}^{\rm gg}(t)|^2 , \quad (27a)$$

$$B_{\rm a} = |C_{00}^{\rm ge}(t)|^2$$
, (27b)

$$C_{a} = |C_{00}^{eg}(t)|^{2}$$
, (27c)

$$D = E = 0$$
 (27d)

$$F_{a} = C_{00}^{eg^{*}}(t) C_{00}^{ge}(t); \qquad (27e)$$

$$A_{\rm f} = |C_{00}^{eg}(t)|^2 + |C_{00}^{ge}(t)|^2 , \qquad (28a)$$

$$B_{\rm f} = |C_{01}^{\rm gg}(t)|^2 , \qquad (28b)$$

$$C_{\rm f} = |C_{10}^{\rm gg}(t)|^2$$
, (28c)

$$D_{\rm f} = E_{\rm f} = 0$$
 , (28d)

$$F_{\rm f} = C_{10}^{\rm gg}$$
 (t) $C_{01}^{\rm gg}$ (t). (28e)

因此 原子(光场)的 negativity 和 concurrence 只可能 分别具有(8) 式和(9) 式的表达形式.

在 $g_1 = g_2 = g$ 情况下 ,原子(光场)的 negativity 和 concurrence 的具体表达式为

$$N(\rho_{a}) = \sqrt{\sin^{4}(gt) + \sin^{2}(2\theta)\cos^{4}(gt)} - \sin^{2}(gt), \qquad (29)$$

$$O(\rho_a) = \sin(2\theta)\cos^2(gt)$$
, (30)

$$N(\rho_{\rm f}) = \sqrt{\cos^4(gt) + \sin^2(2\theta)\sin^4(gt)}$$

$$-\cos^2(gt)$$
, (31)

$$\Omega(\rho_{\rm f}) = \sin(2\theta) \sin^2(gt). \qquad (32)$$

显然,原子和光场的 negativity(concurrence)亦具 有相同的周期 π/g ,相同的最大值 sin(2θ),即原子 间纠缠和光场模间纠缠的最大纠缠度都依赖于系统 的初态;但是当 $gt \neq k\pi/2(k=0,1,...)$ 时原子(光 场)的 concurrence 大于 negativity.同时可以发现,此 情况下原子和光场的 negativity(concurrence)的时间 演化规律也只相差了半个周期.如图 3 *A* 所示.由 (29)—(32)式可以看出原子和光场的 negativity (concurrence)对时间的依赖关系都关于 $\theta = \pi/4$ 对 称,因此在图 3 图 4 中我们只考察了 $\theta \leq \pi/4$ 情况下



图 3 $g_2/g_1 = 1$, $\theta = \pi/8$ 时 $N(\rho_i)$ 和 $\Omega(\rho_i)$ i = a, f) 随时间的演化

原子间纠缠和光场模间纠缠随时间的演化规律.可 以明显看出,在原子和光场相互作用过程中,二者可 以相互转换.

当 $g_1 \neq g_2$ 时,两原子的演化周期不再相等,因

此我们看到原子间纠缠(光场模间纠缠)的时间演化 规律比 $g_1 = g_2$ 情况下复杂得多,如图 5 所示.图中 给出了 $g_2/g_1 = 1.5$, $\theta = \pi/4$ 情况下 $N(\rho_i)$ 和 $C(\rho_i)$ (i = a,f)时间演化.显然,原子间纠缠和光场模间纠



图 4 $g_2/g_1 = 1$ $\theta = \pi/4$ 时 $N(\rho_i)$ 和 $Q(\rho_i)$ i = a f 随时间的演化



图 5 $g_2/g_1 = 1.5$, $\theta = \pi/4$ 时 $N(\rho_i)$ 和 $Q(\rho_i)$ i = a, f 随时间的演化

缠的相互转换能力有所下降.

4. 结 论

双原子与双模光场相互作用系统中原子间纠缠 和光场模间纠缠的时间演化规律表明,在原子和光 场相互作用过程中,原子间纠缠和光场模间纠缠可 以相互转换,在一定条件下,两者存在很好的对应关系,这将在量子信息网络的建立、纠缠纯化等方面有 重要的实际应用价值;处于混态的两量子位系统 negativity和 concurrence 在判断纠缠存在与否的标准 上是完全一致的,但在判断纠缠程度大小的标准上 存在差别,令人惊讶的是二者在某些特定条件下亦可相同.

- [1] Silberfarb A , Deutsch I H 2004 Phys. Rev. A 69 042308
- [2] Rendell R W, Rajagopal A K 2003 Phys. Rev. A 67 062110
- [3] Zhou Q C, Zhu S N 2005 Acta. Phys. Sin. 54 2043 (in Chinese) [周青春、祝世宁 2005 物理学报 54 2043]
- [4] Ikram M , Saif F 2002 Phys. Rev. A 66 014304
- [5] Abdalla M S , Abdel-Aty M , Obada A -S F 2003 Physica A 326 203
- [6] Liu X J , Fang M F 2003 Chin . Phys . 12 971
- [7] Gao Y F , Feng J , Wang J S 2005 Chin . Phys . 14 980
- [8] Tessier T E , Deutsch I H , Delgada A 2003 Phys. Rev. A 68 062316
- [9] Clark S G , Parkins A S 2003 Phys. Rev. Lett. 90 047905
- [10] Wang C Z, Fang M F 2002 Acta. Phys. Sin. 51 1989 (in Chinese) [王成志、方卯发 2002 物理学报 51 1989]
- [11] Liu T K , Wang J S , Feng J , Zhan M S 2005 Chin . Phys . 14 536
- [12] Zuo Z C, Xia Y J 2003 Acta. Phys. Sin. 52 2687 (in Chinese) [左战春、夏云杰 2003 物理学报 52 2687]
- [13] Paternostro M , Son W , Kim M S , Falci G Palma G M Phys. Rev.

A 70 022320

- [14] Lai Z J, Yang Z Y, Bai J T, Sun Z Y 2004 Acta. Phys. Sin. 53 3733 (in Chinese)[赖振讲、杨志勇、白晋涛、孙中禹 2004 物理 学报 53 3733]
- [15] Zhang Y D, Wu S J, Hou G, Huang M X 2002 Quantum Information (Wuhan: Central China Normal University Press) p165—p181 (in Chinese)[张永德、吴盛俊、侯 广、黄民信 2002 量子信息论(武汉:华中师范大学出版社)第165—181 页]
- [16] Vidal G , Werner R F 2004 Phys. Rev. A 65 032314
- [17] Sanpera A , Tarrach R , Vidal G 1998 Phys. Rev. A 58 826
- [18] Wei T C , Nemoto K 2003 Phys. Rev. A 67 022110
- [19] Verstraete F, Audenaert K, Moor B D 2001 Phys. Rev. A 64 012316
- [20] William K , Wootters 1998 Phys. Rev. Lett. 80 2245
- [21] Miranowicz A , Grudka A 2004 Phys. Rev. A 70 032326

The relation between the entanglement of two atoms and the entanglement of two-mode fields *

Xiong Heng-Na¹) Guo Hong¹⁽²⁾³[†] Jiang Jian¹) Chen Jun¹) Tang Li-Yan¹

1)(College of Physical Science and Technology, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

2)(State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics , Wuhan Institute of

Physics and Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

3) (Center for Cold Atom Physics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

(Received 6 June 2005; revised manuscript received 12 November 2005)

Abstract

By means of negativity and concurrence, we investigate the time evolution of the entanglement of the two atoms and the entanglement between the two modes in the system of two atoms interacting with two-mode fields. We find the two entanglements can swap with each other, and they have a very good coincidence relation under certain conditions. In two -qubit system, negativity and concurrence in the same range can keep identical with each other on the standard of the existence of entanglement, but they may not always keep pace with each other for mixed states of the system.

Keywords : quantum entanglement , negativity , concurrence , two atoms , two-mode fields PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60478049 ,10474027).

[†] Corresponding author. E-mail ;guohong@phy.ccnu.edu.cn