

调制与解调用于随机共振的微弱周期信号检测^{*}

林 敏[†] 黄咏梅

(中国计量学院计量技术工程学院 杭州 310018)
(2005 年 11 月 24 日收到 2006 年 4 月 26 日收到修改稿)

提出了调制随机共振方法,实现了在大参数条件下从强噪声中检测微弱周期信号.将混于噪声中的较高频率的弱信号经调制变为一差频的低频信号作用于随机共振体系,该低频信号满足绝热近似理论,因而能产生随机共振,再经解调可获得埋于噪声中的原较高频率的弱信号.对埋于噪声中的未知频率,可采用连续改变调制振荡器的频率,以获得一个适当的差频信号输入到随机共振体系,根据输出信号共振谱峰的变化经解调而得待检弱信号的未知频率.该方法应具有较高的应用前景.

关键词:调制与解调,非线性双稳系统,随机共振,微弱信号检测

PACC: 0540, 0590, 0690

1. 引 言

随机共振是 Benzi^[1,2]和 Nicolis^[3]等人在研究古气象冰川问题时提出来的,这是一个周期极大(10 万年)而变化极其缓慢(频率) $f \ll 1$ 的演化过程,是非线性双稳系统在周期信号和噪声作用下表现出来的非线性现象.近年来,随机共振在信号处理和信号传输方面的应用成为研究热点^[4-10].随机共振已有的绝热近似和线性响应理论仅适用于小参数信号(小幅值、小频率、小噪声),而科学研究和工程实际中的信号可能频率较高或噪声强度较大(大参数信号).为了利用随机共振从强噪声中提取振幅调制信号和实现单一较高频率微弱信号检测,人们分别提出了调制信号的随机共振^[11]和二次采样随机共振^[12,13].调制信号的随机共振是将低频信息信号对高频载波进行调制后作为双稳系统的输入,而二次采样随机共振是通过二次采样将较高频率变换为较低频率来产生随机共振.本文采用本征表象中的微扰展开法,分析了非线性双稳系统在噪声和弱周期信号作用下的周期响应特性,通过引入灵敏度描述系统的幅值频率特性,提出了调制随机共振方法,该方法将混于噪声中的较高频率的弱信号经调制变为一差频的低频信号,通过连续调节载波信号的频率以获得

一个适当的差频信号输入到随机共振体系,根据输出信号共振谱峰的变化经解调而得待检弱信号的未知频率.

2. 双稳系统的周期响应

2.1. 单一频率信号作用下的周期响应

非线性双稳系统在单频信号 $S(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ 和高斯白噪声 $N(t)$ 作用下的动力学方程是

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + S(t) + N(t), \quad (1)$$

式中 $\mu > 0$ 是决定系统性质的参数,与(1)式对应的 Fokker-Plank 方程(FPE)为

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(\mu x - x^3 + A \cos(2\pi f_0 t))\rho(x, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t), \quad (2)$$

(2)式中含有非自治项 $-\frac{\partial}{\partial x}[A \cos(2\pi f_0 t)\rho(x, t)]$, 当 $A \ll 1$ 时,可以将周期力 $A \cos(2\pi f_0 t)$ 看作微扰,而非微扰的 FPE

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = L_{FP} \rho(x, t), \quad L_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu x - x^3) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60274008)和浙江省自然科学基金(批准号: Y104338)资助的课题.

[†] E-mail: linn@cjlu.edu.cn

的本征函数 $U_n(x)$ 和本征值 λ_n 满足如下的特征方程：

$$L_{FP} U_n(x) = -\lambda_n U_n(x),$$

$$\bar{U}_n(x) L_{FP} = -\bar{\lambda}_n U_n(x).$$

采用狄拉克表示

$$|n\rangle = U_n(x),$$

$$\langle n| = \bar{U}_n(x).$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时,系统输出随机变量 $x(t)$ 的统计平均^[14,15]为

$$x(t) = A \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle 0|0|x|n\rangle$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 + (2\pi f_0)^2}} \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (4)$$

(4)式成立的条件仅仅为 $A \ll 1$,而对输入信号频率 f_0 和噪声强度 D 没有要求.对于给定的双稳系统,系统的本征值 λ_n 和本征函数 $U_n(x)$ 是由系统参数 μ 和噪声强度 D 所决定的,因而(4)式又可表示为

$$x(t) = A |\chi(\mu, D, f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \theta), \quad (5)$$

式中的 $\chi(\mu, D, f)$ 称为系统的灵敏度,记 $M(\mu, D, f) = |\chi(\mu, D, f)|$.当仅考虑双稳系统的第一个非零本征值 $\lambda = \frac{\sqrt{2}\mu}{\pi} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4D}\right)$ 和单一势阱内的快速波动时,系统灵敏度的模平方^[16,17]为

$$|M(\mu, D, \Omega)|^2 = \frac{(g_1 \lambda)(\alpha^2 + \Omega^2) + (g_2 \alpha)(\lambda^2 + \Omega^2) + 2g_1 g_2 \alpha \lambda (\alpha \lambda + \Omega^2)}{D^2(\lambda^2 + \Omega^2)(\alpha^2 + \Omega^2)}, \quad (6)$$

式中 $\alpha = 2\mu, \Omega = 2\pi f$,而系数 g_1 和 g_2 由自相关函数及其导数确定^[13,14].如图 1 所示是 $|M(\mu, D, f)|^2$ 与 f 的关系曲线,图中系统参数 $\mu = 1$ 、噪声强度 $D = 0.1$,可见输出周期信号的幅值取决于输入周期信号的频率 f_0 ,且有 $f_{01} < f_{02}, M(\mu, D, f_{01}) > M(\mu, D, f_{02})$,即输入信号频率 f_0 越小,系统输出的同频周期信号的幅值则越大,就容易在双稳系统中产生随机共振.从能量关系上来说,低频周期信号从噪声和系统中获取的能量较大,或者说有较多的噪声能量转移到信号上,在功率谱图上有更高的谱峰.

式中 $A c_j \ll 1$ 则相应的 FPE 为

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(\mu x - x^3 + A \sum_{j=1}^J c_j \cos(2\pi f_j t)) \rho(x, t)]$$

$$+ D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t), \quad (8)$$

当仅考虑输出对输入的线性响应时,系统的输出响应为

$$x(t) = A \sum_{j=1}^J c_j M(\mu, D, f_j) \cos(2\pi f_j t + \theta_j), \quad (9)$$

输出响应包含了输入信号的频率成分,但不同频率具有不同的幅值,幅值大小与频率的关系由灵敏度确定.

3. 调制随机共振原理

对于由(1)式确定的双稳随机共振系统,若 $f_0 \gg 1$ 的信号 $S(t)$ 直接作用到双稳系统而观测输出信号的频谱,将得不到随机共振的频谱特征.为了实现较高频率($f_0 \gg 1$)微弱信号的检测和从噪声与系统中获取更多的能量,提出了调制随机共振方法,其构成框图如图 2 所示.振荡器是调制载波源,其输出是频率 f_c 可变的载波信号

$$V_c(t) = \cos(2\pi f_c t), \quad (10)$$

则幅度随被测信号 $S(t)$ 和噪声 $N(t)$ 瞬时值变化的调制信号 $V_{m+n}(t)$ 为

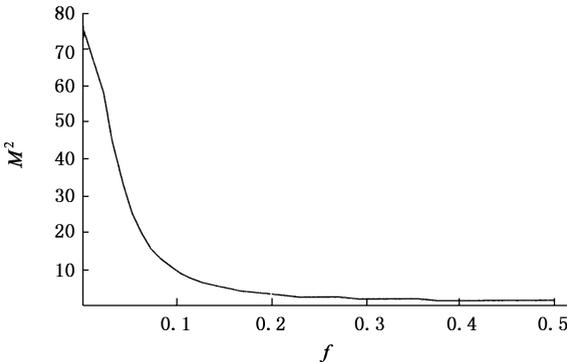


图 1 非线性双稳系统的频率特性($\mu = 1, D = 0.1$)

2.2. 多频率信号作用下的输出响应

若作用到双稳系统的微弱信号具有多种频率成分,即 $S(t)$ 可表示为

$$S(t) = A \sum_{j=1}^J c_j \cos(2\pi f_j t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V_{m+n}(t) &= [S(t) + N(t)] \cdot V_c(t) \\ &= A \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \\ &\quad + N(t) \cdot \cos(2\pi f_c t), \end{aligned} \quad (11)$$

记

$$\begin{aligned} V_m(t) &= A \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_c t), \\ V_n(t) &= N(t) \cdot \cos(2\pi f_c t). \end{aligned} \quad (12)$$

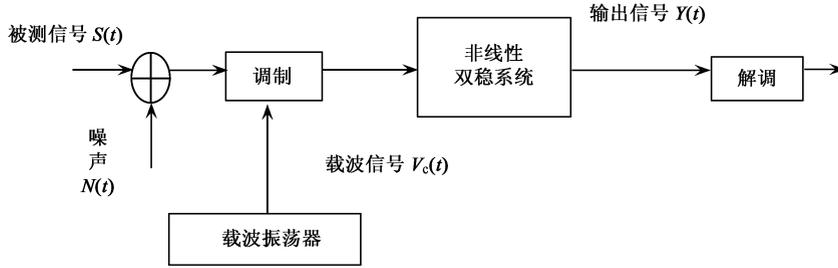


图2 调制随机共振过程

3.1. 调制白噪声的统计特性

(12)式中的 $V_n(t)$ 是随机振幅正弦波,对固定时刻 t , $V_n(t)$ 的概率密度与 $N(t)$ 相同也是高斯分布,且均值 $V_n(t) = 0$,过程 $V_n(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} &V_n(t)V_n(t+\tau) \\ &= N(t)N(t+\tau) [\cos(2\pi f_c \tau) \\ &\quad + \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau)]/2, \end{aligned} \quad (13)$$

显然, $V_n(t)$ 为非平稳过程,其自相关函数的时间均值为 $N(t)N(t+\tau) \cos(2\pi f_c \tau)/2$,由于 $N(t)N(t+\tau) = 2D\delta(\tau)$,而随机过程自相关函数的时间均值与过程功率谱密度之间构成傅里叶变换对,则过程 $V_n(t)$ 的功率谱密度为

$$\begin{aligned} S_{V_n}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2D\delta(\tau) \cdot \cos(2\pi f_c \tau)/2 \\ &\quad \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau = D, \end{aligned} \quad (14)$$

因此,调制白噪声 $V_n(t)$ 仍然是高斯白噪声。

3.2. 调制随机共振

利用三角函数公式 (12)式中的 $V_m(t)$ 可变为

$$\begin{aligned} V_m(t) &= 0.5A \cos[2\pi(f_0 - f_c)t] \\ &\quad + 0.5A \cos[2\pi(f_0 + f_c)t] \\ &= V_{m1}(t) + V_{m2}(t). \end{aligned} \quad (15)$$

记 $\Delta f \ll f_0 - f_c$, $\Sigma f = f_0 + f_c$,调节 f_c 的大小可使 $\Delta f = 1$,从而产生易在双稳系统中形成随机共振的低频信号 $V_{m1}(t)$.在 $A \ll 1$ 时,由(9)式可得 $V_m(t)$ 经双稳系统作用后的输出为 $M_1(\mu, D, \Delta f)V_{m1}(t) + M_2(\mu, D, \Sigma f)V_{m2}(t)$ 根据(6)式及图1,由于 $\Delta f \ll \Sigma f$ ($\Delta f \neq 0$) 则有

$$M_1(\mu, D, \Delta f) \gg M_2(\mu, D, \Sigma f), \quad (16)$$

则随机共振系统的输出信号 $Y(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} Y(t) &\approx M_1(\mu, D, \Delta f)V_{m1}(t) \\ &= 0.5AM_1(\mu, D, \Delta f)\cos(2\pi\Delta f t). \end{aligned} \quad (17)$$

因此,调制随机共振系统输出信号的频谱将在频率 Δf 处出现谱峰,谱峰的大小与 M_1 有关。 M_1 值的大小是由系统参数 μ 、噪声强度 D 以及差频 Δf 所决定的.对于给定的系统和一定的噪声强度, M_1 只是频率 Δf 的函数.根据(6)式,低频信号有更大的 M_1 值.通过调节 f_c 能灵活地改变频率 Δf 的大小,可使其发生在频率 Δf 处的谱峰明显突出。

当载波频率 $f_c = f_0$,即 $\Delta f = 0$ 时,作用到双稳系统的不再存在低频周期信号,随机共振系统输出的共振谱峰将随之消失。

解调过程是根据共振谱峰频率 Δf 和载波频率 f_c 来确定被测信号频率 f_0 的过程.具有如下关系: $f_0 = f_c + \Delta f$,当载波频率 f_c 从小到大连续改变而出现共振谱峰,则 $\Delta f > 0$,反之,当载波频率 f_c 从大到小连续改变而出现共振谱峰时 $\Delta f < 0$ 。

4. 模拟仿真实验

4.1. 不同 f_0 、相同 Δf 产生的调制共振现象

对(1)式中的各参数分别取 $A = 0.1$, $\mu = 0.3$, $D = 45.125$, $f_s = 2000\text{Hz}$,当系统输入周期信号的频率 f_0 分别为 0.05, 0.5, 5, 50, 500 时,通过调节载波信号频率 f_c ,使差频分量的频率 $\Delta f = 0.005$.图3是 $f_0 = 0.05$, $f_c = 0.045$ 时的双稳系统输出的功率谱图,从图3(b)可以看出,由于调制的作用在频率 $\Delta f = 0.005$ 处出现共振谱峰,且信噪比和谱峰明显高于

未调制时的输出功率谱(图3(a)).图4是 $f_0 = 0.5$, $f_c = 0.495$ 时的系统输出功率谱图(b),比较图4(a), (b)两图,可见调制随机共振产生的谱峰远高于未调制时的输出功率谱.图5是 $f_0 = 5$, $f_c = 4.995$ 图6是 $f_0 = 50$, $f_c = 49.995$,图7是 $f_0 = 500$, $f_c = 499.995$ 三个频率较高 ($f_0 \gg 1$) 输入周期信号的仿真结果,可见未加调制时与输入周期信号同频的系统输出周期信号(a)是极其微弱的,而通过调制随机共振产生的输出功率谱在差频 Δf 处的谱峰高大突出,说明输出周期信号从噪声和非线性系统中获得了更多的能量.

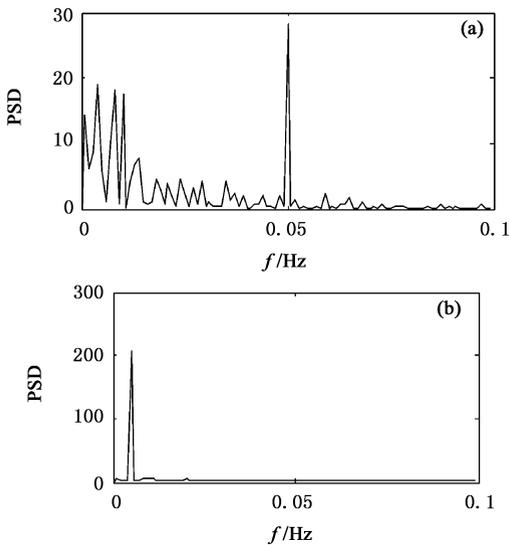


图3 $f_0 = 0.05$, $f_c = 0.045$ 双稳系统输出功率谱 (a)未调制; (b)调制

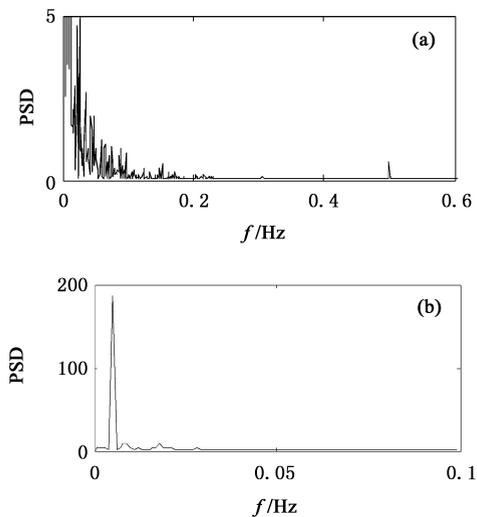


图4 $f_0 = 0.5$, $f_c = 0.495$ 双稳系统输出功率谱 (a)未调制 (b)调制

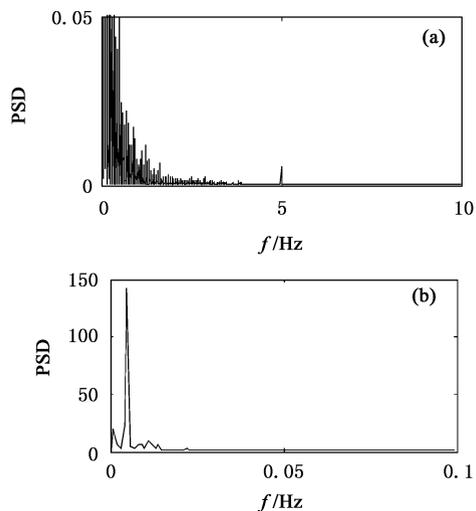


图5 $f_0 = 5$, $f_c = 4.995$ 双稳系统输出功率谱 (a)未调制 (b)调制

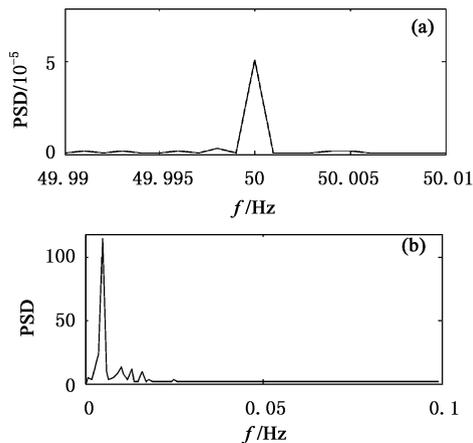


图6 $f_0 = 50$, $f_c = 49.995$ 双稳系统输出功率谱 (a)未调制 (b)调制

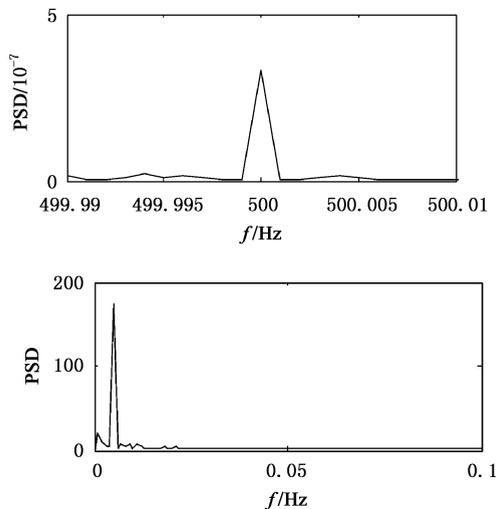


图7 $f_0 = 500$, $f_c = 499.995$ 双稳系统输出功率谱 (a)未调制; (b)调制

4.2. 固定 f_0 f_c 连续变化时输出共振谱峰的变化

噪声中弱信号的频率 f_0 往往是未知的,通过连续地改变 f_c 的大小可使系统产生随机共振,就会在差频 Δf 处出现明显突出的谱峰.对一未知的频率 f_0 ,当 f_c 连续变化时,双稳系统输出的最高谱峰值变化如图 8 所示.不失一般性,假设 $f_0 = 500$,从图 8 可见,当载波频率接近 500 时,谱峰明显变高,当 $f_c = 500$ 时,谱峰又突然消失.这些现象为精确地确定 f_0 提供了可靠的检测依据.

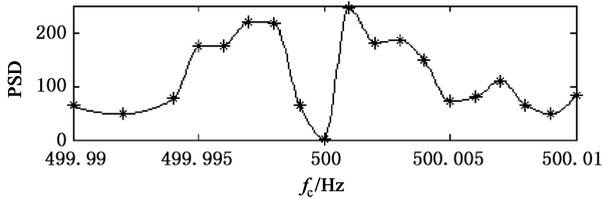


图 8 双稳系统输出功率谱峰值随 f_c 变化($f_0 = 500$)

5. 结 论

1. 非线性双稳系统在噪声和微弱周期信号作用下所产生的输出周期信号的幅值大小与频率有关,低频有更大的幅值,说明低频周期信号能从噪声和系统中获取更多的能量.

2. 提出的调制随机共振方法,利用调制产生的差频分量来形成低频信号,使随机共振发生在非线性双稳系统的低频段,从而能从噪声和系统中获取更多的能量,提高系统输出信号的品质,实现了大参数信号的检测.

3. 理论分析和仿真结果表明,本文所提出的方法灵活、有效,可进一步拓宽随机共振的应用领域,具有较高的应用前景.

- [1] Benzi R , Suter A , Vulpiana A 1981 *Phys. A* **14** 1453
- [2] Benzi R , Parisi G , Suter A , Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 11
- [3] Nicolis C 1982 *Tellus* **34** 1
- [4] Loerincz K , Gingl Z , Kiss L B 1996 *Phys. Lett. A* **2** 63
- [5] Chapeau-Blondeau F , Godivier X 1997 *Phys. Rev. E* **55** 1478
- [6] Vilar J M G , Gomila G , Rubi J M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 14
- [7] Chapeau-Blondeau F , Rojas-Varela J 2000 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10** 1951
- [8] Luo X Q , Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 19
- [9] Wang J , Cao L , Wu D J 2004 *Chin. Phys.* **13** 35
- [10] Kang Y M , Xu J X , Xie Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 1691
- [11] Zhu H J , Li R , Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [12] Leng Y G , Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2431 (in Chinese) [冷永刚、王太勇 2003 物理学报 **52** 2432]
- [13] Leng Y G , Wang T Y , Qin X D *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 717 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、秦旭达等 2004 物理学报 **53** 717]
- [14] Gammaitoni L , Hanggi P 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [15] Hu G 1994 *Stochastic Forces and nonlinear systems* (Shanghai : Shanghai Science & Technology Education Press) p222 (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海 :上海教育出版社) 第 222 页]
- [16] Jung P 1993 *Phys. Rep.* **234** 175
- [17] Dykman M I , Mannella R , McClintock P V *et al* 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 2985

Modulation and demodulation for detecting weak periodic signal of stochastic resonance^{*}

Lin Min[†] Huang Yong-Mei

(*College of Metrology Technology and Engineering , China Jiliang University ,Hangzhou 310018 ,China*)

(Received 24 November 2005 ; revised manuscript received 26 April 2006)

Abstract

Modulated stochastic resonance method which can detect weak periodic signals under strong noise in wide parameter conditions is proposed in this paper. The high frequency weak signal mixed with noise is modulated to a low frequency difference signal. The signal conforms to the adiabatic elimination theory. So when it acts on stochastic resonance system, the stochastic resonance can arise. If the low frequency signal is demodulated, the original high frequency weak signal mixed with noise can be relieved. To deal with the unknown frequency mixed with noise, the frequency of modulate oscillator is changed continuously to achieve a suitable difference frequency signal for inputting to stochastic resonance system. According to the change of resonance spectral peak value, the unknown frequency can be found from the demodulated signal. The method is effective for future application.

Keywords : modulation and demodulation , nonlinear system , stochastic resonance , weak signal detection

PACC : 0540 , 0590 , 0690

^{*} Project supportet by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 60274008),and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y104338).

[†] E-mail : linm@cjlu.edu.cn