第 55 卷 第 7 期 2006 年 7 月
1000-3290/2006/55(07)/3336-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.7,July,2006

元胞自动机交通流模型的相变特性研究*

郭四玲[1)] 韦艳芳[1)3)] 薛 郁[1)2)]

1)(广西大学物理科学与工程技术学院,南宁 530004)

2)(上海大学上海市应用数学与力学研究所,上海 200072)

3)(广西玉林师范学院物理与信息科学系,玉林 537000)

(2005 年 9 月 1 日收到;2005 年 11 月 8 日收到修改稿)

系统地研究 VDR 模型和 T^2 模型在不同车流密度时车辆位置的相关性. 通过 VDR 模型、BJH 模型和 T^2 模型的序参量计算,确定在这三个模型中车流从自由流动到阻塞的相变特性,结果发现引入慢启动规则后,在不同的延迟概率和最大速度情况下,将引起交通相变特性的改变.

关键词:交通流,元胞自动机,相关函数,序参量

PACC:0550

1. 引 言

元胞自动机理论作为模拟非线性复杂系统的一种有效工具,在交通流的研究中得到了广泛的应用[1],得到许多典型的元胞自动机交通流模型,其中基本的元胞自动机交通流模型为 NaSch 模型[2]和 BML 模型[3]. 这些模型简单,易于并行计算,而且数值模拟能呈现出交通流从自由流动到阻塞的相变行为. 因此,近年来,元胞自动机交通流模型引起了国内外人们的极大地关注[1,4—8].

一维元胞自动机交通流模型均是假设 N 辆车随机地分布在长度为 L 的一维离散的格点链上,每一格点最多仅能由一辆车占据,每辆车的状态由它的速度 $v_n(t)$ 所确定($n=1,2,\cdots,N$),$v_n(t)$ 在 $\{0,1,2,\cdots,v_{\max}\}$ 的 $v_{\max}+1$ 个取值范围内取其中一个整数值,$v_{\max}$ 表示最大速度. 用 $x_n(t)$ 表示 t 时刻第 n 辆车的位置,车间距 $d_n(t)=x_{n+1}(t)-x_n(t)$ 表示第 n 辆车在 t 时刻与前方最紧邻车辆之间的间隔. 在每个时步 $t\to t+1$,车辆状态按照模型演化规则并行地进行演化. Nagel 和 Schreckenberg 于 1992 年提出的一维元胞自动机随机交通流模型[2],简称 NaSch 模型. 它的基本演化过程分为加速过程、减速过程、随机减速过程和位置更新. 对 NaSch 模型的基本演化规则,人们作了进一步的改进,引入慢启动规则分别得到了 VDR 模型[9]、BJH 模型[10]和 T^2 模型[11]. VDR 模型通过引进与速度相关的随机减速概率 $p=p(v(t))$,考虑了静止车辆的延迟启动行为. 如果速度 $v=0$,$p(v)=p_0$ 如果 $v>0$,$p(v)=p$. 当 $p_0=p$ 时,VDR 模型就变为 NaSch 模型;当 $p_0>p$ 时,慢启动延迟发挥作用,静止车辆缓慢启动[1,9]. BJH 模型考虑了与驾驶员记忆驾驶减速有关的过程,如果车辆速度为零,那么在下一时刻的减速过程中该车以概率 p_s 保持速度为零的状态延缓加速,其余的车确定减速,它考虑的是每一辆车前一时刻 $t-1$ 的减速刹车状态对下一时刻状态的影响[1,10]. T^2 模型是对 NaSch 模型的加速过程进行了改进:如果车辆是静止的且其前面有一个空格,此车就以一定的概率($1-p_t$)加速,其他的车按确定加速过程加速[1,11],这些引入慢启动规则的模型都能够描述交通阻塞和阻塞过程中出现的亚稳态、交通滞后等复杂现象[1].

交通流阻塞机理的研究一直是人们高度关注的热点,在统计物理中,相关性和序参量是研究相变的重要手段[12],通过对车辆之间的相关性和交通相变的序参量研究,结果发现有噪声作用的 NaSch 模型没有临界性,而是呈现自由流动到阻塞的跨接现象[13—15](crossover phenomena),即从自由流动车流连续变化到交通阻塞,车辆之间的最大相关长度与延迟概率 p 成幂律关系,在无噪声情况下,最大相关长度趋于无穷,呈现出连续二级相变[13—15]. 然而

* 国家自然科学基金(批准号:10362001,10532060)和广西自然科学基金(批准号:0342012)资助的课题.

Kerner 实测得到的自由流动$\Leftrightarrow$同步流$\Leftrightarrow$阻塞或自由流动$\Leftrightarrow$阻塞的相变是局域一级相变[16],理论与实际相差较大. 最近,人们在研究 ITS(智能交通系统)过程中考虑了车辆全局耦合的跟驰模型,结果发现车辆之间的全局耦合效应能增强车流的稳定性[17,18];而采取适当权重因子来截断耦合,也可以使车流的稳定性提高[19],然而在相变点附近车辆之间具有很强的关联性,相关长度满足幂指数关系,在相变点附近趋于很大的值,因此在相变点附近考虑权重因子线性叠加进行耦合截断的方法是比较困难的.

文献[13—15]研究了 NaSch 模型的相关性和相变特性,然而对 VDR 模型、BJH 模型、T^2 模型的交通相关性和相变特性的研究尚未见报道. 虽然 VDR 模型、BJH 模型和 T^2 模型与 NaSch 模型的演化步骤相同,都是加速、减速、随机减速和位置更新 4 个步骤,但由于引入了慢启动(“slow-to-start”)的机理,它们所描述的交通相变特性就有所不同. 因此,本文试图从研究车辆的相关性和序参量,系统地对引入慢启动规则的这些交通流模型所描述的交通相变特性进行研究,并与 NaSch 模型进行比较分析.

2. 位置相关函数分析

车辆位置相关函数的定义如下[14]:

$$cc(i,t)=\langle\eta(i',t')\eta(i'+i,t'+t)\rangle_{i',t'}-\rho^2, \quad (1)$$

其中 ρ 表示车流密度,即

$$\rho=\frac{N}{L}, \quad (2)$$

其中 N 为车辆总数,L 为道路长度. 在 t' 时步、第 i' 格点有车,$\eta(i',t')=1$,其他情况则 $\eta(i',t')=0$,$\langle\cdots\rangle_{i',t'}$ 描述的是对所有格点所有时步的平均,i 是在 i' 格点附近的格点数,t 是 t' 时步之后的延迟时间. $cc(i,t=0)$ 反映车道上车辆行驶的初始情况,而 $cc(i,t>0)$ 包含了车辆行驶随时间变化的动态信息. 计算机数值模拟的道路长度用 $L=10^4$ 个格点来表示,车辆速度 $v_n(t)$ 在 0—$v_{\max}$ 之间,车辆随机地分布在一维离散的格点链上,考虑周期边界条件,N 是分布在 L 上的车辆总数,车流密度 $\rho=N/L$,选取 NaSch 模型的随机延迟概率 $p=0.50$;VDR 模型的慢启动延迟概率 $p_0=0.50$,随机延迟概率 $p=0.05$;T^2 模型的慢启动延迟概率 $p_t=0.50$,随机延迟概率 $p=0.05$. 通过计算交通阻塞前、阻塞时和阻塞后车辆位置的相关函数,来了解这三种模型的特性. 从这三种模型基本图[1]上取对应于这三个状态的典型车流密度分别为 0.08,0.10,0.15.

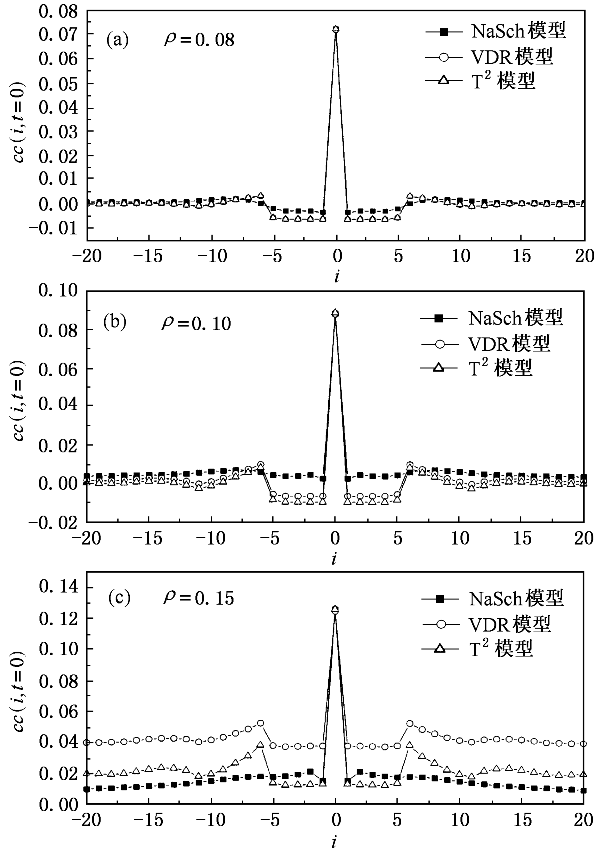

图 1 $t=0$ 时三种模型在不同车流密度时的位置相关函数

当 $t=0$ 时,三种模型的位置相关函数 $cc(i,t=0)$是关于格点 $i=0$ 对称的且在格点 $i=0$ 有相同的尖峰,表明位置正相关性最大,车辆之间相互作用最强,而且峰值随车流密度的增大而增大,如图 1(a)—(c)所示. 当 $t=1,2$ 时,三种模型的位置相关函数曲线的对称性消失,尖峰、极大值和极小值右移且 NaSch 模型的峰值小于 VDR 模型和 T^2 模型的峰值,如图 2(a)—(c),图 3(a)—(c). 当车流密度较小时,各模型除了自身的位置相关函数很大,但在其余格点处的位置相关函数很小;随车流密度的增大,三种模型的位置相关函数在格点 $|i|=1$—5 处是负向增大的,即负相关;负相关位置上的车辆其行为与正相关车辆的行为相反,表明它们之间存在间隔. 在 $|i|\geqslant6$ 处是正向增大,在密度 $\rho>0.10$ 的某一车流密度时,负相关性消失,这意味着发生了由自由流动到交通阻塞的相变. 远离相关曲线最大值之处的位置相关函数呈指数衰减.

从图 1,2 和图 3 可以看出,在延迟时间 t 取不

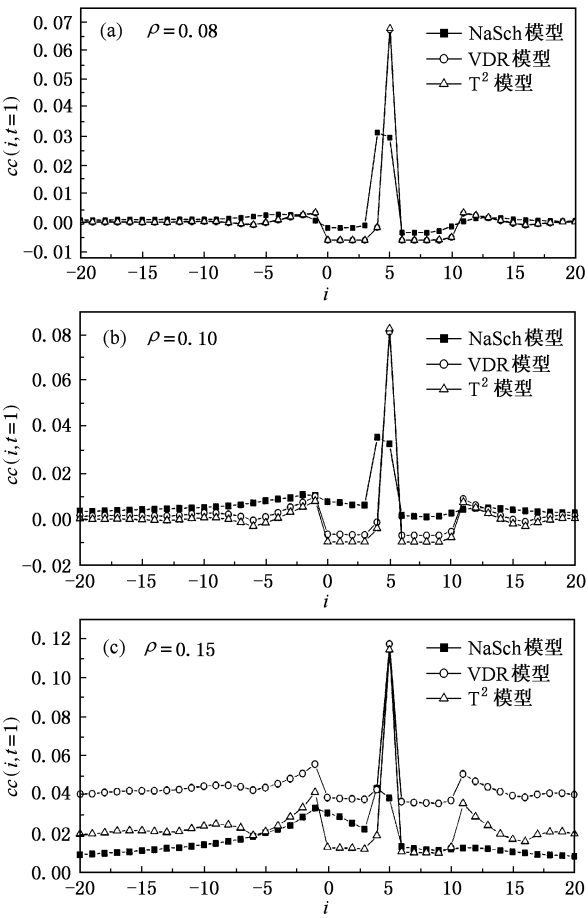

图 2 $t=1$ 时三种模型在不同车流密度时的位置相关函数

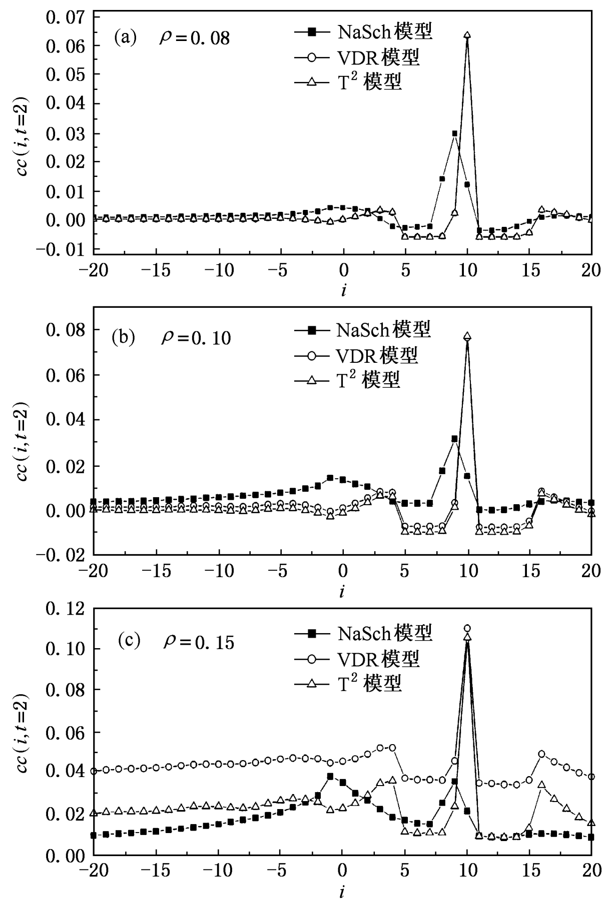

图 3 $t=2$ 时三种模型在不同车流密度时的位置相关函数

同值,车流密度 ρ 相同时,三种模型的位置相关函数具有相同的变化趋势,在 $\rho=0.08$ 时,VDR 模型和 T^2 模型的位置相关函数相等;在 $\rho=0.10$ 时,VDR 模型的位置相关函数稍大于 T^2 模型的位置相关函数;在 $\rho=0.15$ 时,VDR 模型在各个格点的位置相关函数最大.当延迟时间 t 和车流密度增大时,位置相关函数的尖峰以及极大值、极小值向右移,而且数值在增大.使用相关性来确定相变密度的大小就不太精确,特别是在出现多个极大值、极小值的情况下,确定相变密度的大小就比较困难.

3.序参量及相变特性分析

为了研究交通自由流动到阻塞的相变行为,同时试图深入了解 NaSch 模型的改进是否会影响交通相变的特性.通过引入了一个序参量以定性地描述在两相之间的不同行为.序参量的定义为[15]

$$m(\rho)=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}n_i'n_{i+1}', \tag{3}$$

其中,如果第 i 个格点没有车辆占据,则 $n_i'=0$;如果第 i 个格点有车辆占据,则 $n_i'=1$.利用序参量的定义(3)就可以得到 $m(\rho)$ 与 ρ 的关系,从而可以确定有关的交通相变特性.对 BJH 模型、VDR 模型和 T^2 模型这三种模型的序参量进行计算时,采用周期边界条件,车辆初始速度设为 0 并随机分布在道路上.将这三种模型的慢启动延迟概率表示为 p_1,随机延迟概率为 p_2.例如对于 VDR 模型,慢启动延迟概率 $p_1=p_0$,随机延迟概率 $p_2=p$,当 $p_1=p_2$ 时,VDR 模型就转化为 NaSch 模型;对于 BJH 模型或 T^2 模型,慢启动延迟概率 $p_1=p_s$ 或 $p_1=p_t$,随机延迟概率 $p_2=p$.当 $p_s=0$ 或 $p_t=0$ 时,就转化为 NaSch 模型.对于确定 NaSch 模型 $p=0$,Vilar 等人[20] 和 Eisenblötter 等人[15] 对序参量进行了研究,结果发现在相变密度 $\rho_c=\dfrac{1}{v_{\max}+1}$ 之下,由于每辆车的前面有 $v_{\max}$ 的空格,车流平均以 $v_{\max}$ 的速度向前传播,因此,序参量为 0;在相变密度之上,序参量不为 0,呈现出不连续变化,其最大相关长度趋于无穷,呈现出连续

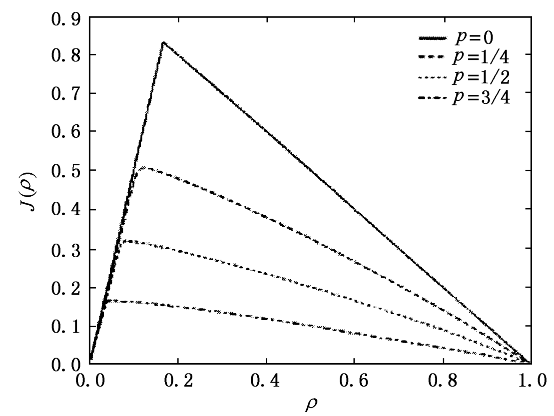

图 4　最大速度 $v_{\max}=5$，在不同随机延迟概率情况下的 NaSch 模型的基本图

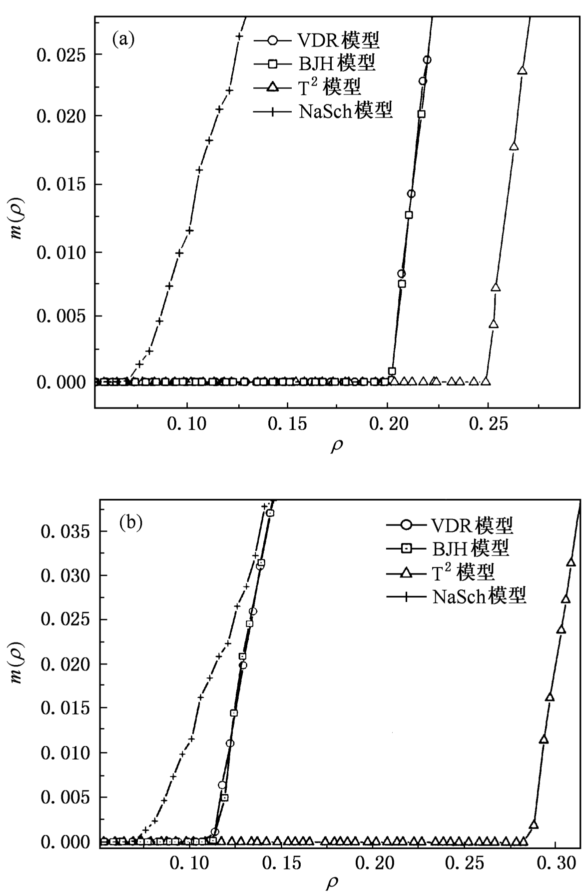

图 5　最大速度 $v_{\max}=2$ 的三种模型和 NaSch 模型在延迟概率为 0 时序参量的变化　(a) $p_1=0.5$，$p_2=0$；(b) $p_1=0.75$，$p_2=0$（可见，慢启动并没有改变交通相变的性态，确定减速对交通相变的性态起主要作用）

二级相变；而在随机延迟概率 $p_2\neq 0$ 的情况下，NaSch 模型的序参量是连续变化，呈现自由流动到堵塞相的跨接现象[13—15]．也可以定性地从 NaSch 模型的基本图[15]（图 4）上得出这样的结论，在确定 $p=0$ 情况下，车流随其密度的变化是不连续的，而在有噪声 $p\neq 0$ 情况下，车流随其密度的变化是连续的．图 5，6 和 7 分别显示了当 $v_{\max}=2$ 时，三种模型的序参量在相变点附近的变化．可以看出，当随机延迟概率 $p_2=0$ 时，在相变密度之下，车辆不存在随机减速作用，车流在稳态后平均以 $v_{\max}$ 速度向前运动，序参量等于 0；在相变密度之上，车辆只作确定减速，其序参量与确定性 NaSch 模型的序参量一样不等于 0．而从 VDR 模型基本图（图 8）上，可以看到在这种情形下，当 $p_1=0.5$，$p_2=0$ 时，从两个不同初始条件[1]出发得到的基本图与确定性 NaSch 模型的基本图（图 4）相同，呈现出连续的二级相变；当 $p_1=0.75$，$p_2=0$ 时，基本图上存在亚稳态，呈现出一级相变；而当 $p_1=0.5$ 或 $p_1=0.75$，$p_2=0.05$（$p_2\neq 0$）时，车辆在随机减速作用下，引起慢启动效应，使得这三种模型的序参量的变化与噪声作用下的 NaSch 模型连续变化的序参量相同，基本图的不连续性被

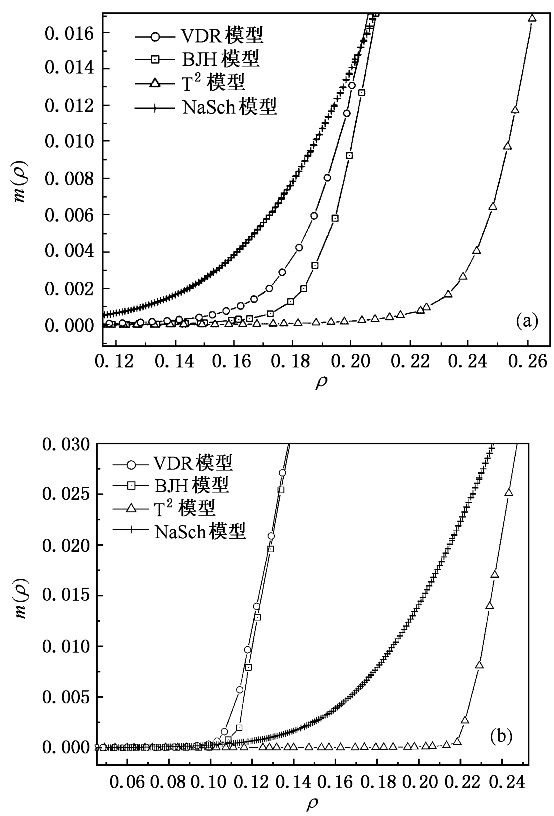

图 6　最大速度 $v_{\max}=2$ 的三种模型和 NaSch 模型（$p=1/128$）在延迟概率 $p_2\neq 0$ 时序参量的变化　(a) $p_1=0.5$，$p_2=0.05$；(b) $p_1=0.75$，$p_2=1/64$（在较小延迟概率作用下，三种模型的序参量呈现连续的变化）

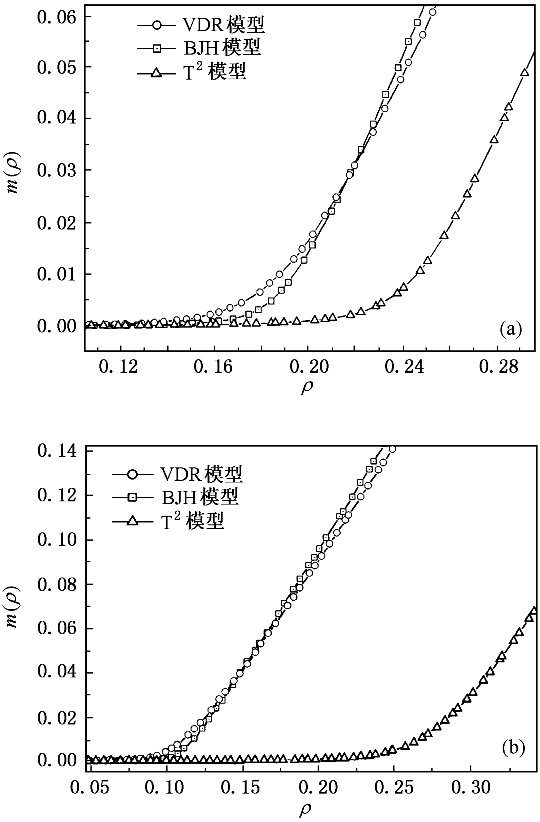

图 7 最大速度 $v_{\max}=2$ 的三种模型在延迟概率 $p\neq0$ 时序参量的变化 (a) $p_1=0.5$，$p_2=0.1$；(b) $p_1=0.75$，$p_2=0.1$（在较大延迟概率作用下，三种模型的序参量连续的变化，随机延迟明显地对交通相变的性态起主要作用）

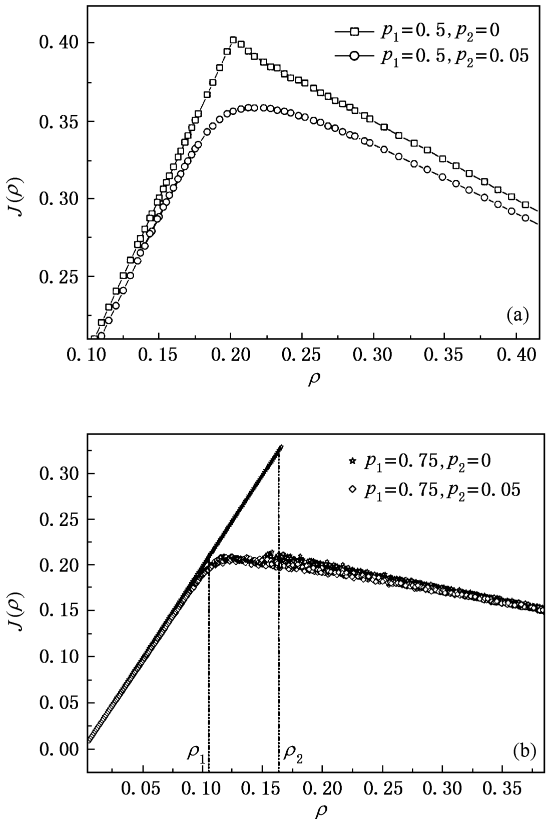

图 8 从两个不同初始条件出发得到的最大速度 $v_{\max}=2$ 的 VDR 模型的基本图 (a) 车流随其密度的变化是不连续的；(b) 当 $p_1=0.75$，$p_2=0$ 时，在 $\rho_1<\rho<\rho_2$ 之间存在亚稳态

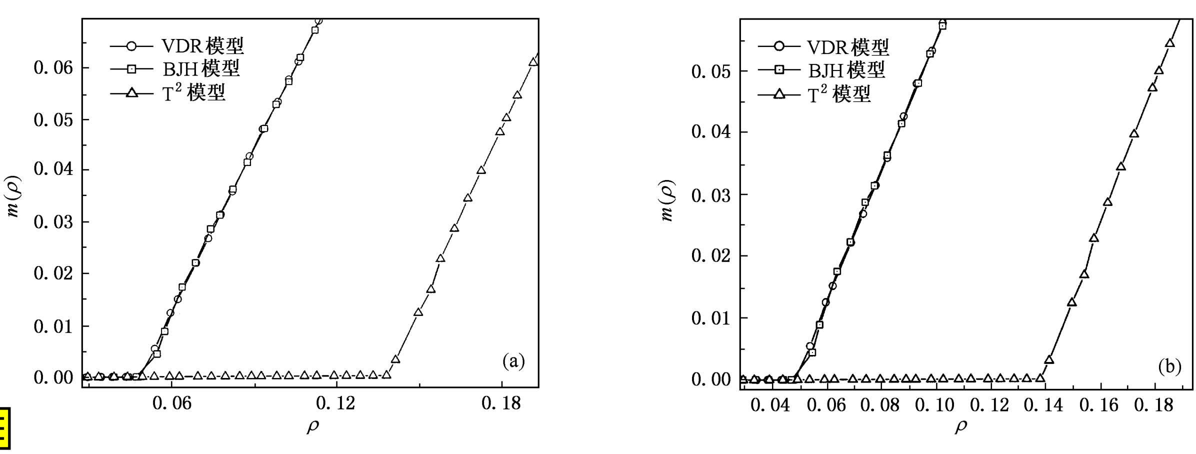

图 9 最大速度 $v_{\max}=5$ 的三种模型在延迟概率 $p_2=0$ 时序参量的变化 (a) $p_1=0.5$，$p_2=0$．；(b) $p_1=0.75$，$p_2=0$（对比图 5 三种模型的序参量类似确定性的 NaSch 模型是不连续变化的）

随机减速抹成光滑连续，呈现自由流动到阻塞的跨接现象．当 $v_{\max}=5$ 时，由图 9 和 10，我们发现 VDR 模型、T^2 模型和 BJH 模型的序参量与 NaSch 模型的序参量变化不同，不论随机延迟概率的大小，序参量总是不连续变化，而且在基本图（图 11）上存在亚稳态，因此呈现自由流动到阻塞的相变具有一级相变的特征，这表明慢启动作用引起自由流动到阻塞相变特性的改变，这样的一级相变的特征与 Kerner 实

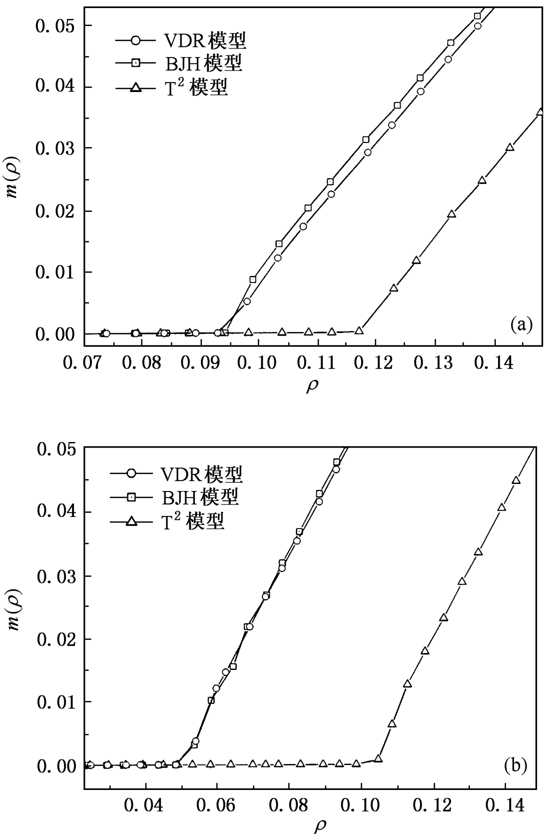

图 10 三种模型的最大速度 $v_{\max}=5$,在延迟概率 $p\neq 0$ 时序参量的变化 (a) $p_1=0.5$,$p_2=0.05$;(b) $p_1=0.75$,$p_2=0.05$(在延迟概率作用下,三种模型的序参量是不连续变化的,慢启动对改变交通相变的性态起了重要作用)

测的结论相符合[16].

总之,由于这三种模型的慢启动规则不同,引起车辆的不同动力学行为,从位置相关函数的分析可以了解到,在车流密度较小时,出现正、负相关.随着车流密度增大,负相关消失时,就发生了由自由流动到阻塞的交通相变.当前还缺乏对非平衡相变进行完全的分类[21],本文试图通过研究序参量变化,细致地了解交通从自由流动到阻塞的相变特性.针对引入慢启动规则的模型进行了大量的序参量计算,我们发现,在引入慢启动规则后,相变的特性会显著改变.当车辆具有较小的最大速度时,在不存在随机减速过程中,当慢启动作用不显著时,形成的自由流动到阻塞的相变是连续的二级相变,否则,当慢启动的延迟起作用时,自由流动到阻塞的相变是一级相变.在随机减速过程中,交通相变与噪声的 NaSch 模型相同,随机延迟抹平了临界性,呈现跨接现象.而当车辆具有较大的最大速度时,从自由流动到阻塞所发生的相变是不连续的一级相变,出现亚稳态和交通滞后现象.交通自由流动到阻塞的相变与随机减速、车辆的最大速度有关,目前尚未见有这方面的文献报道.

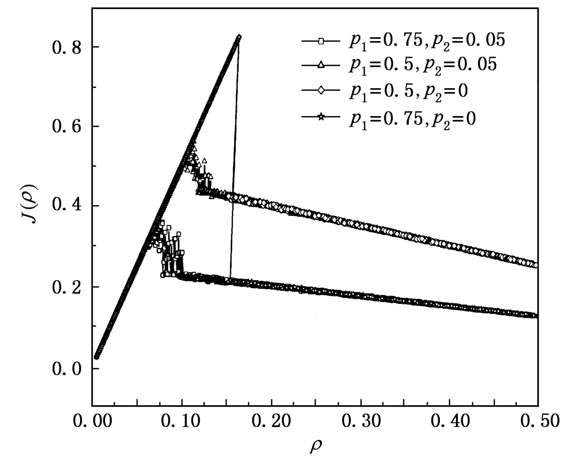

图 11 从两个不同初始条件出发得到的最大速度 $v_{\max}=5$ 的 VDR 模型的基本图(图中存在亚稳态和交通滞后现象)

[1] Chowdhury D, Santen L, Schreckenberg A 2000 *Phys. Rept.* **329** 199

[2] Nagel K, Schrekenberg M 1992 *J. Phys. I* (France) **2** 2221

[3] Biham O, Middleton A, Levine D 1992 *Phys. Rev.* A **46** R6124

[4] Wang B H, Woo Y F, Hui P M 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 906 (in Chinese) [汪秉宏、邝乐琪、许伯铭 1998 物理学报 **47** 906]

[5] Lü X Y, Kong L J, Liu M R 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1255 (in Chinese) [吕晓阳、孔令江、刘慕仁 2001 物理学报 **50** 1255]

[6] Xue Y, Dong L Y, Dai S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 445 (in Chinese) [薛 郁、董力耘、戴世强 2001 物理学报 **50** 445]

[7] Lei L, Xue Y, Dai S Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2121 (in Chinese) [雷 丽、薛 郁、戴世强 2003 物理学报 **52** 2121]

[8] Kuang H, Kong L J, Liu M R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2894 (in Chinese) [邝 华、孔令江、刘慕仁 2004 物理学报 **53** 2894]

[9] Barlovic R, Santen L, Schadschneider A *et al* 1998 *Eur. Phys. J.* B **5** 793

[10] Benjamin S C, Johnson N F, Hui P M 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 3119

[11] Takayasu M, Takayasu H 1993 *Fractals* **1** 860

[12] Yu L, Hao B L, Chen X S 2005 *Phase transition and critical phenomena* (Beijing: Science Press) 72 [于 渌、郝柏林、陈晓松著 2005 相变和临界现象(北京 科学出版社) 72]

[13] Csányi G, Kertész J, 1995 *J. Phys.* A **28** L427

[14] Cheybani S, Kertész J, Schreckenberg M 1998 *J. Phys*. A **31** 9787

[15] Eisenblätter B, Santen L, Schadschneider A *et al* 1998 *Phys. Rev*. E **57** 1309

[16] Kerner B S 2001 *Net. and Spatial Econ*. **1** 35

[17] Hasebe K, Nakayama A, Sugiyama Y 2004 *Phys. Rev*. E **69** 017103

[18] Ge H X, Dai S Q, Dong L Y, Xue Y 2004 *Phys. Rev*. E **70** 066134

[19] Ge H X, Dai S Q, Xue Y, Dong L Y 2005 *Phys. Rev*. E **71** 066119

[20] Vilar L C Q, de Souza A M C 1994 *Physica* A **211** 84

[21] Lübeck S 2004 *International Journal of Modern Physics* B **31&32** 3977

On the characteristics of phase transition in CA traffic models*

Guo Si-Ling[1)] Wei Yan-Fang[1)3)] Xue Yu[1)2)]

1) (*Institute of Physics Science and Engineering, Guangxi University, Nanning* 530004, *China*)

2) (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

3) (*Department of Physics and Information Science, Guangxi Yulin Normal University, Yulin* 537000, *China*)

(Received 1 September 2005; revised manuscript received 8 November 2005)

Abstract

In this paper, the correlation functions in the CA (cellular automaton) traffic models incorporating the ' slow-to-start ' rule, such as VDR model, BJH model and T^2 model, are systematically studied at different traffic densities. The results show that there are anti-correlations and correlations between cars at low density. When anti-correlation disappears with the increases of density, it means the transition from free flow to jamming. In order to study the characteristics of phase transition, we study the order parameters of these models with the delay probability and slow-to-start probability. We found that the CA traffic model with ' slow-to-start ' rule will change the characteristics of phase transition. Independently of the delay probability and in the case of less than maximal velocity, the transition from free flow to jamming in the CA model with slow-to-start probability not exceeding 0.5 is the second phase transition, which has an analogy to one in the deterministic NaSch model. Otherwise, the first phase transition will appear. Under conditions of stochastic delay, the crossover phenomena will occur. When the limiting velocity has larger values, it will show the first phase transition in spite of the delay probability.

Keywords: traffic flow, cellular automaton, correlation functions, order parameters

PACC: 0550

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10362001 and 10532060), and the Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region, China (Grant No. 0342012).