第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3817-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.8, August, 2006

非完整力学系统的 Noether-Lie 对称性

方建会 丁 宁 王 鹏

(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,东营 257061)

(2005 年 8 月 15 日收到;2005 年 11 月 18 日收到修改稿)

研究了非完整力学系统的一种新对称性——Noether-Lie 对称性及其守恒量. 给出了非完整力学系统 Noether-Lie 对称性的定义和判据,提出系统的 Noether-Lie 对称性导致 Noether 守恒量和广义 Hojman 守恒量的定理. 举例说明了结果的应用. Hojman 守恒量是所给出的广义 Hojman 守恒量的特例.

关键词:非完整力学系统, Noether-Lie 对称性, Noether 守恒量, 广义 Hojman 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

动力学系统的对称性与守恒量的研究具有重要的数学意义和物理意义,在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位,也是分析力学的一个近代发展方向. 寻求动力学系统守恒量的近代方法主要是 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性[1—4]. 寻找到的守恒量主要有 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量[1,5]. 在以往的研究中通常是由一种对称性寻求一种类型的守恒量. 最近,梅凤翔等[6,7]将三种主要的对称性进行联合,研究了 Lagrange 系统和一般完整系统的统一对称性,由统一对称性可同时得到上述三种守恒量. 吴惠彬[8]研究了 Lagrange 系统 Lie 形式不变性及其导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量. 本文将非完整系统的 Noether 对称性和 Lie 对称性进行联合,研究非完整力学系统的 Noether-Lie 对称性及其导致的 Noether 守恒量和广义 Hojman 守恒量.

2. 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定. 它的运动受到 g 个双面理想 Chetaev 型非完整约束,

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g). \tag{1}$$

约束(1)式加在虚位移 δq_s 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0. \tag{2}$$

系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \tag{3}$$

式中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力, λ_β 为约束乘子.

设系统非奇异,则方程(3)可写为[1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s, \tag{4}$$

式中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{5}$$

为广义非完整约束力. 方程(4)可简写为

$$E_s(L)=Q_s+\Lambda_s. \tag{6}$$

这里 E_s 为 Euler 算子,

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}. \tag{7}$$

展开方程(6),可求出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{8}$$

3. 系统的 Noether-Lie 对称性的定义和判据

定义 如果一个对称性既是非完整系统(1),(6)的 Noether 对称性又是它的 Lie 对称性,则称这个对称性为该系统的 Noether-Lie 对称性.

取时间和广义坐标的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{9}$$

式中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小群变换的生成元.

按照非完整力学系统的 Noether 对称性理论,如果存在规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式

$$L\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{d}}{dt}G_N = 0 \tag{10}$$

和限制条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0, \tag{11}$$

则对称性是非完整力学系统(1),(6)的 Noether 对称性. 这里

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{12}$$

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{13}$$

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{14}$$

按照非完整力学系统的 Lie 对称性理论,如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程

$$X^{(2)}[E_s(L)] = X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s), \tag{15}$$

或者(15)式的等价形式

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0 - 2\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\alpha_s = \frac{\partial\alpha_s}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial\alpha_s}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_k - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right), \tag{16}$$

限制方程

$$X^{(1)}[f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})] = 0, \tag{17}$$

以及附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0, \tag{18}$$

则相应对称性为非完整力学系统(1),(6)的 Lie 对称性. 这里

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \left[\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right) - \ddot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{19}$$

根据定义,利用(10),(11),(15),(17),(18)式,我们可得到以下判据.

判据 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足

$$\left\{L\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{d}}{dt}G_N\right\}^2 + \{X^{(2)}[E_s(L)] - X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)\}^2 = 0, \tag{20}$$

$$\{X^{(1)}[f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]\}^2 + \left\{\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\right\}^2 = 0, \tag{21}$$

则相应的对称性是非完整力学系统(1),(6)的 Noether-Lie 对称性.

4. 系统的 Noether-Lie 对称性导致的守恒量

非完整力学系统(1),(6)的 Noether-Lie 对称性不仅能够导致 Noether 守恒量,而且在一定条件下也可导致广义 Hojman 守恒量.

定理 1 在无限小变换(9)式下,非完整力学系统(1),(6)的 Noether-Lie 对称性导致 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \text{const}. \tag{22}$$

证明 从定义和判据可知,非完整力学系统(1),(6)的 Noether-Lie 对称性一定是 Noether 对称性,存在规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足 Noether 等式(10). 按照 Noether 对称性理论,系统必有 Noether 守恒量(22)式.

定理 2 对非完整力学系统(1),(6),如果在无限小变换(9)式下存在函数 $u = u(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{d}}{dt}\ln u = 0, \tag{23}$$

则系统的 Noether-Lie 对称性导致广义 Hojman 守恒量

$$I_H = \frac{1}{u}\frac{\partial(u\xi_0)}{\partial t} + \frac{1}{u}\frac{\partial(u\xi_s)}{\partial q_s} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left[u\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)\right] - \frac{\bar{d}}{dt}\xi_0 = \text{const}. \tag{24}$$

证明 从定义和判据可知,非完整力学系统(1),(6)的 Noether-Lie 对称性一定是 Lie 对称性,利用(16)和(23)式类似文献[9]的证明便可证得定理 2.

当 $\xi_0 = 0$ 时,(24)式化为

$$I_H = \frac{1}{u}\frac{\partial(u\xi_x)}{\partial q_s} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(u\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s\right) = \text{const}. \tag{25}$$

这正是系统的 Hojman 守恒量[1]．我们称(24)式为广义 Hojman 守恒量．

5. 算　　例

Appell-Hamel 例．系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3, \tag{26}$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_3 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2} = 0. \tag{27}$$

试研究其 Noether-Lie 对称性及其守恒量．

可以求得

$$\lambda = \frac{1}{2}mg,$$

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3},$$

$$\Lambda_2 = -\frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3},$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}mg,$$

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2}g\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3},$$

$$\ddot{q}_2 = -\frac{1}{2}g\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3},$$

$$\ddot{q}_3 = -\frac{1}{2}g.$$

取无限小变换的生成元

$$\xi_0 = \left(\dot{q}_3 + \frac{1}{2}gt\right)^2, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0. \tag{28}$$

容易证明，当取规范函数 $G_N = 0$ 时，对生成元(28)式，方程(20)，(21)满足，因此它是 Noether-Lie 对称性的．

由定理 1 得系统的 Noether-Lie 对称性导致的 Noether 守恒量为

$$I_N = -\left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3\right]\left(\dot{q}_3 + \frac{1}{2}gt\right)^2 = \mathrm{const}. \tag{29}$$

(23)式给出

$$-\frac{g}{\dot{q}_3} + \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \dot{q}_1\frac{\partial u}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial u}{\partial q_2} + \dot{q}_3\frac{\partial u}{\partial q_3} + \alpha_1\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_1} + \alpha_2\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_2} + \alpha_3\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_3}\right) = 0. \tag{30}$$

(30)式有解

$$u = \frac{1}{\dot{q}_3^2}. \tag{31}$$

由定理 2 得系统的 Noether-Lie 对称性导致的广义 Hojman 守恒量为

$$I_H = \left(\dot{q}_3 + \frac{1}{2}gt\right)g = \mathrm{const}. \tag{32}$$

6. 结　　论

本文给出的非完整力学系统的 Noether-Lie 对称性是更高层次上的对称性，它包含了非完整力学系统的 Noether 对称性和 Lie 对称性，具有更普遍的意义．以往关于非完整力学系统对称性与守恒量的研究大都是由一种对称性得到一种类型的守恒量，本文由 Noether-Lie 对称性同时得到了系统的 Noether 守恒量和广义 Hojman 守恒量．非完整力学系统的 Hojman 守恒量是本文给出的广义 Hojman 守恒量在 $\xi_0 = 0$ 时的特例．

[1] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京 北京理工大学出版社)]

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[3] Fang J H 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 349

[4] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[5] Zhang Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2980 (in Chinese) [张　毅 2005 物理学报 **54** 2980]

[6] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 668

[7] Xu X J, Qin M C, Mei F X 2005 *Chin. Phys.* **14** 1287

[8] Wu H B 2005 *Chin. Phys.* **14** 452

[9] Fang J H, Liao Y P, Zhang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4037 (in Chinese) [方建会、廖永潘、张　军 2004 物理学报 **53** 4037]

Noether-Lie symmetry of non-holonomic mechanical system

Fang Jian-Hui Ding Ning Wang Peng
(*College of Physics Science and Technology*, *China University of Petroleum* (*East China*), *Dongying* 257061, *China*)
(Received 15 August 2005; revised manuscript received 18 November 2005)

Abstract

In this paper, a new symmetry, i.e., Noether-Lie symmetry and its conserved quantities of the non-holonomic mechanical system is studied. The definition and the criterion of the Noether-Lie symmetry for the system are given. A theorem asserting that the Noether-Lie symmetry for the system leads to both the Noether conserved quantity and the general Hojman conserved quantity is presented. An example is given to illustrate the application of the result. The Hojman conserved quantity of the system is a special case of the general Hojman conserved quantity obtained in this paper.

Keywords: non-holonomic mechanical system, Noether-Lie symmetry, Noether conserved quantity, general Hojman conserved quantity
PACC: 0320