第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3845-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55, No.8, August, 2006

Kirchhoff 弹性杆动力学建模的分析力学方法*

薛 纭[1] 刘延柱[2] 陈立群[3]

1)(上海应用技术学院机械与自动化工程学院,上海 200235)

2)(上海交通大学工程力学系,上海 200030)

3)(上海大学力学系,上海 200436)

(2005 年 12 月 27 日收到;2006 年 1 月 19 日收到修改稿)

以杆的横截面为研究对象,讨论了其自由度,给出了截面虚位移定义,并定义变分和偏微分运算对独立坐标服从交换关系. 给出了曲面约束的基本假设,讨论了约束对截面自由度的影响以及加在虚位移上的限制方程. 从 D'Alembert原理出发结合虚功原理,建立了弹性杆动力学的 D'Alembert-Lagrange 原理,当杆的材料服从线性本构关系时,化作 Euler-Lagrange 形式、Nielsen 形式和 Appell 形式. 由此导出了 Kirchhoff 方程以及 Lagrange 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程,得到了用截面弹性应变势能和转动动能表示的能量关系式. 对于受曲面约束情形,导出了带乘子的 Lagrange 方程. 建立了弹性杆动力学的积分变分原理的数学表达式,在线性本构关系下化作 Hamilton 原理的数学表达式. 用正则变量描述截面的状态,定义了 Hamilton 函数,导出了 Hamilton 正则方程. 构筑了弹性杆动力学建模的分析方法——双自变量分析力学的理论框架.

关键词:超细长弹性杆, 分析力学方法, Kirchhoff 动力学比拟, 变分原理

PACC:0320, 0340D

1. 引 言

自 20 世纪 70 年代以来,以 DNA 等生物大分子链为背景的超细长弹性杆非线性力学再次受到关注,出现了一个力学与分子生物学交叉的研究领域[1—12]. 基于 Kirchhoff 动力学比拟,分析力学方法在静力学建模以及平衡和稳定性问题的研究中显出优越性,尤其是对受约束的弹性杆[3]. 鉴于文献中是直接应用 Hamilton 原理和 Lagrange 方程研究弹性杆静力学,缺乏一些必要的基础概念而未能形成弹性杆平衡问题的分析力学理论[13—15]. 作者从分析力学的基本概念出发,定义了点和截面的虚位移,建立了弹性杆平衡问题的 D'Alembert-Lagrange 原理等分析力学的各种微分和积分变分原理,导出了 Lagrange 方程等各种形式的平衡微分方程,试图形成弹性杆平衡问题的分析力学理论框架[16]. 当前,依据 Kirchhoff 理论对弹性杆力学的研究已从静力学转向动力学,用矢量形式的动力方程建模[7,17—19],而分析力学方法尚未见报道. 本文试图将文献[16]的结果推广到弹性杆动力学,以期形成弹性杆动力学的分析力学理论框架.

弹性杆静力学的变分原理和平衡微分方程与刚体定点转动动力学相当. 将此方法推广到弹性杆动力学,必定要加入时间. 因此,弹性杆的分析动力学具有弧坐标和时间双自变量,并且可以退化为弹性杆分析静力学或刚性杆分析动力学.

本文仍以截面为对象,在弧坐标与时间双自变量下讨论其自由度问题,给出虚位移的定义,将 D'Alembert原理与虚功原理结合,建立 D'Alembert-Lagrange 原理和 Hamilton 原理,导出弹性杆动力学的 Lagrange 方程、Nielsen 方程、Appell 方程以及 Hamilton 正则方程,得到了用截面弹性应变势能和转动动能表示的能量关系式. 初步构成弹性杆动力学的分析力学理论框架.

2. 杆横截面的运动学

基于 Kirchhoff 假定,以杆的横截面为对象,建立惯性坐标系 O-$\xi\eta\zeta$ 和与截面固结的形心主轴坐标系 p-xyz,沿坐标轴的单位基矢量列阵分别为

$$\underline{e}^{\mathrm{I}} = (\boldsymbol{e}_\xi \quad \boldsymbol{e}_\eta \quad \boldsymbol{e}_\zeta)^{\mathrm{T}},$$

* 国家自然科学基金(批准号:10472067)资助的课题.

$$\underline{e}^p = (e_1,(s,t)\quad e_2(s,t)\quad e_3(s,t))^{\mathrm{T}},$$

其中 s 为中心线的弧坐标，t 为时间，e_3 为切向基矢量，指向弧坐标增加方向. 外法矢与 e_3 一致的截面记为 s^+，否则记为 s^-. 两组基有关系 $\underline{e}^p = P\underline{e}^{\mathrm{I}}$，$P$ 为单位正交阵. p-xyz 的位置用截面形心相对惯性系的矢径 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{Op}$ 的坐标阵

$$\underline{r} = (\xi(s,t)\quad \eta(s,t)\quad \zeta(s,t))^{\mathrm{T}}$$

和 Euler 角列阵

$$\underline{q} = (\psi(s,t)\quad \vartheta(s,t)\quad \varphi(s,t))^{\mathrm{T}}$$

描述. 截面的运动方程为

$$\begin{aligned}\underline{r} &= \underline{r}(s,t),\\ \underline{q} &= \underline{q}(s,t).\end{aligned}\tag{1}$$

设这 6 个位形坐标关于 s，t 为二阶连续可微. 截面随 s 和 t 的变化都称为运动. 对于除端部外不受约束的自由弹性杆，这 6 个广义坐标为独立变量，按 Kirchhoff 假定，其偏导数需满足方程

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{e}_3,\tag{2}$$

式中撇号表示对 s 的偏导数. 投影式为

$$\begin{aligned}\xi' &= \sin\psi\sin\vartheta,\\ \eta' &= -\cos\psi\sin\vartheta,\\ \zeta' &= \cos\vartheta.\end{aligned}\tag{3}$$

方程(3)是不可积的，构成对截面状态的非完整约束. 因此截面关于时间的自由度为 6，而关于弧坐标的自由度仅为 3. 从而表明自由 Kirchhoff 杆为非完整系统. 只要变形前后的挠性线满足光滑条件，约束(3)式就能自动实现. 这一约束的特殊性在于无需约束力.

截面的弯扭度 $\boldsymbol{\omega}(s,t)$ 和角速度 $\boldsymbol{\Omega}(s,t)$ 可以表示成 Euler 角偏导数的线性组合

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\Xi}_i q_i',\\ \boldsymbol{\Omega} &= \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\Xi}_i \dot{q}_i,\end{aligned}\tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{\Xi}_i$ 为 Euler 角的矢值函数，q_i 依次为 3 个 Euler 角，其中变量顶部的点号表示对 t 的偏导数. (4)式在主轴坐标系中的矩阵式为

$$\begin{aligned}\underline{\omega} &= \Theta \underline{q}',\\ \underline{\Omega} &= \Theta\dot{\underline{q}},\end{aligned}\tag{5}$$

式中，

$$\underline{\omega} = (\omega_1\quad \omega_2\quad \omega_3)^{\mathrm{T}},$$

$$\underline{\Omega} = (\Omega_1\quad \Omega_2\quad \Omega_3)^{\mathrm{T}},$$

$$\omega_i = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e}_i,$$

$$\Omega_i = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{e}_i,$$

矩阵 Θ 的定义为[3,20—22]

$$\Theta = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \cos\vartheta & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

截面的弯扭度和角速度存在下列关系：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega} &= 0,\\ \frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{\Omega}}{\partial s} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega} &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

式中符号顶部的波浪号表示相对主轴坐标系 p-xyz 的偏导数. (4)式使得(6)式成为恒等式. 截面角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 与挠性线上点 p 的速度 $\boldsymbol{v} = \partial\boldsymbol{r}/\partial t$ 存在如下关系：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial s} &= \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_3,\\ \frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{v}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}\tag{7}$$

3. 杆横截面的虚位移

在 Kirchhoff 假定下，同一截面上不同点的虚位移形成截面的虚位移.

定义(截面虚位移)　约束所允许的、与弧坐标和时间变化无关的、假想的截面无限小位移定义为截面的虚位移，它可分解为随形心的虚平移和相对形心的虚角位移，分别记为 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{\Phi}$.

截面的虚位移导致杆的虚位形，它也是杆的可能运动状态，因此可以计算截面的虚位移对弧坐标或时间的偏导数. 定义偏微分和变分运算对独立坐标服从下列交换关系：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\delta(\quad) &= \delta\frac{\partial}{\partial s}(\quad),\\ \frac{\partial}{\partial t}\delta(\quad) &= \delta\frac{\partial}{\partial t}(\quad).\end{aligned}\tag{8}$$

截面虚角位移的矢量式和矩阵式分别为

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\Phi} &= \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\Xi}_i\delta q_i,\\ \delta\underline{\Phi} &= \Theta\delta\underline{q}.\end{aligned}\tag{9}$$

可以导出如下关系：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}(\delta\boldsymbol{\Phi}) &= \tilde{\delta}\ \boldsymbol{\omega},\\ \frac{\tilde{\partial}}{\partial s}(\delta\boldsymbol{\Phi}) &= \delta\boldsymbol{\omega};\end{aligned}\tag{10a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\boldsymbol{\Phi}) = \tilde{\delta}\ \boldsymbol{\Omega},$$

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial t}(\delta \boldsymbol{\Phi}) = \delta \boldsymbol{\Omega}, \tag{10b}$$

式中符号顶部的波浪号表示运算是相对主轴坐标系 $p\text{-}xyz$ 的，此关系也可以用 Euler 角验证．

因无需约束力，(3)式是伪非完整约束，它仅限制截面关于弧坐标的自由度而不构成对虚位移的限制．

4．约束、约束方程和约束力

设杆处在曲面上，惯性空间中的曲面约束由方程

$$g^{*}(\xi_{c}, \eta_{c}, \zeta_{c}) = 0 \tag{11a}$$

或方程

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u_1, u_2) \tag{11b}$$

描述．这里，

$$\xi_{c} = \xi_{c}(u_1, u_2,),$$
$$\eta_{c} = \eta_{c}(u_1, u_2,),$$
$$\zeta_{c} = \zeta_{c}(u_1, u_2,),$$

其中 u_1, u_2 为参数．对约束作如下假设：(1)约束曲面为小曲率、连续、光滑和有向；(2)曲面约束为双面的和刚性的；(3)不计约束力对杆截面形状的影响，横截面的边界上有且只有一点与约束曲面接触．根据这一假设，截面与约束之间存在如下关系：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{b}, \tag{12}$$

式中，$\boldsymbol{R}$ 为约束曲面上的点；$\boldsymbol{b}(s, w)$ 为 s 截面的边界相对形心的矢径，w 为参数．设 $\boldsymbol{b}$ 关于 s, w 具有二阶连续偏导数，且 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$，在 $p\text{-}xy$ 平面中围成的区域是凸的．对于给定的 s 和 t，存在唯一的一点 $w = w(s, t)$ 满足(12)式．由此得

$$\begin{aligned} \xi_{c} &= \xi + b_{\xi}, \\ \eta_{c} &= \eta + b_{\eta}, \\ \zeta_{c} &= \zeta + b_{\zeta}, \end{aligned} \tag{13}$$

式中 $b_{\xi}, b_{\eta}, b_{\zeta}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 依次在轴 ξ, η, ζ 上的投影．导出对杆截面位形的约束方程

$$\begin{aligned} & g(\xi, \eta, \zeta, \psi, \vartheta, \varphi, s, w) \\ & = g^{*}(\xi + b_{\xi}, \eta + b_{\eta}, \zeta + b_{\zeta}) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

将 $\boldsymbol{b}$ 固定在截面上，计算 g 对 s, t 的偏导数，可化为

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}) = 0, \tag{15a}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}) = 0, \tag{15b}$$

其中 $\tilde{\partial} \boldsymbol{b}/\partial s = 0$，$\boldsymbol{n}$ 为约束曲面在接触点的法向量．(14)式的变分可化为

$$\delta g = \boldsymbol{n} \cdot \delta \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}) \cdot \delta \boldsymbol{\Phi} = 0. \tag{15c}$$

设截面的运动受到不滑动约束，即要求接触点的速度为零

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{b} = 0, \tag{16}$$

其中仍将 b 看作截面上的固定矢量．显然，(16)式是不可积的，因而是非完整约束．对虚位移的限制方程为

$$\delta \boldsymbol{R} = \delta \boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{b} = 0. \tag{17}$$

此时(15c)式自然满足．(14)式使截面的广义坐标数减少 1，(15)式使关于弧坐标和时间的自由度分别减为 2 和 5．不滑动约束(16)式使关于时间的自由度再减少 2．(15c)和(17)式可统一写作

$$\sum_{j=1}^{6} A_{ij} \delta q_j = 0 \qquad (i = 1 \text{ 或 } i = 1,2,3), \tag{18}$$

式中 $q_4 = \xi, q_5 = \eta, q_6 = \zeta$，$A_{ij}$ 为(15c)或(17)式的系数矩阵．对虚位移的限制方程(18)等价于理想约束条件

$$\boldsymbol{F}_{c} \cdot \delta \boldsymbol{R} = 0,$$

式中 $\boldsymbol{F}_{c}$ 为曲面对杆截面的约束力．

5．弹性杆动力学的微分变分原理

下面建立截面动力学的微分变分原理．以 s^{-} 和 $(s + \Delta s)^{+}$ 为端面的微段杆为对象，内力主矢和主矩在截面 s^{-} 上分别为 $-\boldsymbol{F}(s, t)$ 和 $-\boldsymbol{M}(s, t)$，在 $(s + \Delta s)^{+}$ 上分别为

$$\boldsymbol{F}(s + \Delta s, t) = \boldsymbol{F} + \Delta \boldsymbol{F},$$
$$\boldsymbol{M}(s + \Delta s, t) = \boldsymbol{M} + \Delta \boldsymbol{M}.$$

此微段杆的惯性力的主矢和主矩分别为

$$\Delta \boldsymbol{F}_{Q} = -\rho \ddot{\boldsymbol{r}} \Delta r,$$

$$\Delta \boldsymbol{M}_{Q} = -\Delta s \frac{\partial (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{\partial t}.$$

这里，ρ 为杆沿中心线的线密度，$\boldsymbol{J}$ 为截面的惯量并矢，其主轴坐标系下的坐标阵为 $J = \mathrm{diag}(J_1 \quad J_2 \quad J_3)$，$J_i = \rho I_i / A$，其中，$A$ 为截面积，I_1, I_2 为截面对主轴 x, y 的惯性矩，I_3 为对 z 轴的极惯性矩，且有 $I_3 = I_1 + I_2$．设杆上作用有沿中心线的连续分布力 $\boldsymbol{f}(s, t)$ 和分布力偶 $\boldsymbol{m}(s, t)$．所有这些力在截面虚位移上所作的虚功之和为

$$\begin{aligned} \delta W_{\Delta s} = {} & (\Delta \boldsymbol{F} + \Delta \boldsymbol{F}_{Q} + \boldsymbol{f} \Delta s) \cdot \delta \boldsymbol{r} + (\Delta \boldsymbol{M} + \Delta \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\ & + \Delta \boldsymbol{M}_{Q} + \boldsymbol{m} \Delta s) \cdot \delta \boldsymbol{\Phi}, \end{aligned} \tag{19}$$

式中用到了理想约束条件,并略去了二阶微量.将(19)式等号两端均除以 Δs,并令 $\Delta s \to 0$,导出

$$\delta W = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}, \tag{20}$$

其中偏导数包括对隐含的 s 或 t,称为全偏导数.于是 D'Alembert-Lagrange 原理[20—22]在 Kirchhoff 杆动力学中的表述为:受有理想双面约束的 Kirchhoff 弹性杆在任意时刻的真实运动不同于运动学上的可能运动仅在于真实运动对于任意的虚位移有

$$\delta W = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\Phi} = 0. \tag{21}$$

(21)式也可以直接从动力学方程导出.设杆服从线性本构关系,用主轴分量表示为

$$M_i = B_i(\omega_i - \omega_i^0) \qquad (i = 1,2,3), \tag{22}$$

式中,$\omega_i^0 = \omega_i^0(s)$为原始弯扭度分量,$B_1$,$B_2$ 为关于主轴 x,y 的抗弯刚度,B_3 为关于主轴 z 的抗扭刚度.可以证明如下关系[3,15,16]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_i'} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial S^{\mathrm{r}}}{\partial q_i'} - \frac{\partial S^{\mathrm{r}}}{\partial q_i} \quad (i = 1,2,3), \tag{23a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T^{\mathrm{r}}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^{\mathrm{r}}}{\partial q_i} \qquad (i = 1,2,3), \tag{23b}$$

式中,

$$S^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} B_i(\omega_i - \omega_i^0)^2,$$

$$T^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} J_i\Omega_i^2$$

分别为 s 截面的弹性应变势能和转动动能.注意到 $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial q_i' = \partial\boldsymbol{\Omega}/\partial\dot{q}_i = \boldsymbol{\Xi}_i$ 和 $\partial S^{\mathrm{r}}/\partial\dot{q}_i = \partial T^{\mathrm{r}}/\partial q_i' = 0$ 及(23)式,(21)式化作 Euler-Lagrange 形式

$$\delta W = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i} + m_i^F + m_i\right]\cdot\delta q_i = 0, \tag{24}$$

式中,

$$\Lambda^{\mathrm{r}} = S^{\mathrm{r}} - T^{\mathrm{r}},$$

$$m_i^F = (\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\Xi}_i,$$

$$m_i = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\Xi}_i.$$

(21)式也可化作 Nielsen 形式

$$\delta W = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial q_i'}\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial t} - 3\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i} + m_i^F + m_i\right)\cdot\delta q_i = 0. \tag{25}$$

注意到 $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial q_i' = \partial\boldsymbol{\omega}'\partial q_i'' = \partial\boldsymbol{\Omega}/\partial\dot{q}_i = \partial\dot{\boldsymbol{\Omega}}/\partial\ddot{q}_i = \boldsymbol{\Xi}_i$,存在如下关系:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} + \boldsymbol{m}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial q_i''} = \frac{\partial \Pi_s^{\mathrm{r}}}{\partial q_i''}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial \Pi_t^{\mathrm{r}}}{\partial \ddot{q}_i}, \tag{27}$$

式中[16],

$$\Pi_s^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\sum_j B_j(\omega_j' - \omega_j^{0\prime})^2 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{M} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} + \boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{\omega}', \tag{28}$$

$$\Pi_t^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\sum_j J_j\dot{\Omega}_j^2 + [\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})]\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}. \tag{29}$$

于是,(21)式化作 Appell 形式

$$\delta W = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} + \sum_i\left(\frac{\partial \Pi_s^{\mathrm{r}}}{\partial q_i''} - \frac{\partial \Pi_t^{\mathrm{r}}}{\partial \ddot{q}_i}\right)\cdot\delta q_i = 0. \tag{30}$$

值得注意的是,弹性杆动力学的 D'Alembert-Lagrange 原理以及后面由此导出的动力学方程、积分变分原理、Hamilton 正则方程都分别以弹性杆静力学(此时 $\boldsymbol{\Omega} = 0$,从而 $T^{\mathrm{r}} = 0$)和刚性杆动力学(此时 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0$,从而 $S^{\mathrm{r}} = 0$)作为其特例[16].

6.弹性杆动力学的分析力学方程

对于自由弹性杆,截面虚位移的各分量均独立,从(21)式导出弹性杆动力学的 Kirchhoff 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f} = 0, \tag{31a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m} = 0. \tag{31b}$$

由(24),(25)和(30)式分别得方程(31b)在本构关系(22)式下的 Lagrange 形式、Nielsen 形式和 Appell 形式

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i} + m_i^F + m_i = 0 \quad (i = 1,2,3), \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i'}\left(\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial t}\right) - 3\frac{\partial \Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i}$$

$$+ m_i^F + m_i = 0 \qquad (i = 1,2,3), \tag{33}$$

$$\frac{\partial \Pi_s^r}{\partial q_i''} - \frac{\partial \Pi_t^r}{\partial \ddot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3). \tag{34}$$

在曲面约束(11)式下,截面的虚位移受到(15c)式的限制. 如果杆的运动还受到不滑动约束((16)式),则截面的虚位移受到(17)式的限制,于是可以用通常的不定乘子方法建立动力学方程

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} + f_i + \sum_k \lambda_k A_{ki+3} = 0, \tag{35a}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i} + m_i^F + m_i + \sum_k \lambda_k A_{ki} = 0 \qquad (i = 1,2,3), \tag{35b}$$

式中,求和指标 $k = 1$ 或 $k = 1,2,3$, $F_i = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_i$, $r_i = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_i$, $f_i = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}_i$, $m_i = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_i$, λ_k 为不定乘子.

对函数 Λ^r 计算全偏导数并考虑到(32)式,导出能量关系

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\Lambda^r - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i'}q_i'\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Lambda^r}{\partial \dot{q}_i}q_i'\right) + \frac{\partial \Lambda^r}{\partial s} + (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^3 m_i q_i', \tag{36a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda^r - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Lambda^r}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i'}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial \Lambda^r}{\partial t} + (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\Omega} + \sum_{i=1}^3 m_i \dot{q}_i. \tag{36b}$$

设 $m_i = 0$,对于自由弹性杆,函数 Λ^r 不显含 s, t,分别是 q_i' 和 q_i' 的二次齐次式,根据 Euler 齐函数定理,(36a),(36b)式分别化作

$$-\frac{\partial}{\partial s}(S^r + T^r) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial T^r}{\partial \dot{q}_i}q_i'\right) + (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{37a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S^r + T^r) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial S^r}{\partial q_i'}\dot{q}_i\right) + (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\Omega}. \tag{37b}$$

由此可以看到,能量式关于时间和弧坐标有着对称的形式.

7. 弹性杆动力学的积分变分原理的数学表达式和正则方程

将(21)式乘以 $\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}t$ 后对 s 和 t 积分,化作积分变分原理的数学表达式

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_0^l \delta W \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l (-\boldsymbol{M}\cdot\tilde{\delta}\boldsymbol{\omega} + \delta T + \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{m}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})\Big|_{s=0}^{s=l}\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^l \Big[\rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}\Big]_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}s = 0,
\end{aligned} \tag{38}$$

式中

$$T = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{\Omega}$$

为杆的动能密度. 当杆服从线性本构关系(22)式,且不计主动力 $\boldsymbol{f}(s,t)$ 和 $\boldsymbol{m}(s,t)$ 时,取时间和弧坐标的端点变分为

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\Phi}|_{s=0} = \delta\boldsymbol{\Phi}|_{s=L} = 0, \\
\delta\boldsymbol{\Phi}|_{t=t_0} = \delta\boldsymbol{\Phi}|_{t=t_1} = 0,
\end{aligned} \tag{39}$$

(38)式化为

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left\{\delta\Lambda - \frac{\partial}{\partial s}(\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r})\right\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0, \tag{40}$$

其中 $\Lambda = S^r - T$. (40)式就是超细长弹性杆动力学的 Hamilton 原理的数学表达式. 直接计算变分,从(40)式可以导出方程(32)或(33).

定义正则变量 q_i, $p_{si} = \partial\Lambda^r/\partial q_i'$, $p_{ti} = \partial\Lambda^r/\partial\dot{q}_i$ $(i = 1,2,3)$,从此解出

$$\begin{aligned}
q_i' &= q_i'(q, p_s), \\
\dot{q}_i &= \dot{q}_i(q, p_t).
\end{aligned}$$

定义 Hamilton 函数

$$H(q, p_s, p_t) = \left[\sum_{i=1}^3\left(q_i'\frac{\partial\Lambda^r}{\partial q_i'} + \dot{q}_i\frac{\partial\Lambda^r}{\partial\dot{q}_i}\right) - \Lambda^r\right]_{\substack{q_i' = q_i'(q,p_s)\\ \dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p_t)}}, \tag{41}$$

直接计算偏导数,并注意到(32)式,导出弹性杆动力学 Hamilton 正则方程

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_i}{\partial s} &= \frac{\partial H}{\partial p_{si}}, \\
\frac{\partial q_i}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p_{ti}}, \\
\frac{\partial p_{si}}{\partial s} + \frac{\partial p_{ti}}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - m_i^F \qquad (i = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{42}$$

与弹性杆静力学 Hamilton 正则方程相比,弹性杆动力学 Hamilton 正则方程保持了相似的正则方程形

式,但正则变量和方程的数目都增加了.

8. 结 论

1)在超细长弹性杆动力学问题中,横截面的位形需形心和姿态共 6 个坐标描述;其关于弧坐标和时间的导数各有 6 个分量,由于非完整约束(3)式使关于弧坐标的自由度减为 3,因此共有 9 个自由度.

2)截面的虚位移是运动学意义上的,与弧坐标和时间无关,此虚位移对应的变分和偏微分服从交换关系. 虚位移空间的维数为 6.

3)在双面的曲面约束下,截面的位形坐标数、关于弧坐标和时间的自由度各减少 1,不滑动约束使截面关于时间的自由度再减少 2.

4)建立的 Kirchhoff 弹性杆动力学的 D 'Alembert-Lagrange 原理,在线性本构关系下化作 Euler-Lagrange 形式、Nielsen 形式和 Appell 形式.

5)从 D 'Alembert-Lagrange 原理导出弹性杆动力学 Kirchhoff 方程,在线性本构关系下化作 Lagrange 方程、Nielsen 方程以及 Appell 方程. 在曲面和不滑动约束下,导出了带乘子的 Lagrange 方程.

6)用截面弹性应变势能和转动动能表示的能量关系式,形式上关于时间与弧坐标是对称的.

7)从微分变分原理出发建立的弹性杆动力学的积分变分原理的数学表达式,在线性本构关系下化作 Hamilton 原理的数学表达式.

8)定义的正则变量和建立的 Hamilton 正则方程,各有 3×3 个.

9)文中的变分原理和动力学方程都以弹性杆静力学和刚性杆动力学作为其特例. 从数学的观点看,可以进一步研究方程的广义坐标数为 n 的更一般情况.

10)本文方法表明了可以建立 Kirchhoff 弹性杆动力学的 Jourdain 原理和 Gauss 原理.

[1] Fuller F B 1971 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **68** 815

[2] Fuller F B 1978 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **75** 3557

[3] Liu Y Z 2006 *Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod: Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA* (Bejing: Tsinghua University Press and Springer) (in Chinese) [刘延柱 2006 弹性细杆的非线性力学:DNA 力学模型的理论基础(北京:清华大学-斯普林格出版社)]

[4] Liu Y Z 2003 *Mech. Eng.* **25** 1 (in Chinese) [刘延柱 2003 力学与实践 **25** 1]

[5] Zhou H, Zhang Y, Ouyang Z C 2002 *Physica* A **306** 359

[6] Traverst A A, Thompson J M T 2004 *Phil. Trans. R. Soc.* A **362** 1265

[7] Liu Y Z, Xue Y, Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭、陈立群 2004 物理学报 **53** 2424]

[8] Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 794

[9] Xue Y, Chen L Q, Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2040 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 2040

[10] Xue Y, Chen L Q, Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4029 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 4029

[11] Liu Y Z 2002 *J. Shanghai Jiaotong Univ.* **36** 1587 (in Chinese) [刘延柱 2002 上海交通大学学报 **36** 1587]

[12] Huang L, Bao G W, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2457 (in Chinese) [黄 磊、包光伟、刘延柱 2005 物理学报 **54** 2457]

[13] Langer J, Singer D A 1996 *SIAM Rev.* **38** 605

[14] Pozo Coronado L M 2000 *Physica* D **141** 248

[15] Westcott T P, Tobias I, Olson W K 1995 *J. Phys. Chem.* **99** 17926

[16] Xue Y, Chen L Q, Liu Y Z 2005 *Acta Mech. Sin.* **37** 385 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2005 力学学报 **37** 385]

[17] Goriely A, Tabor M 1997 *Physica* D **105** 20

[18] Goriely A, Tabor M 2000 *Nonlinear Dynam.* **21** 101

[19] Goriely A, Tabor M 1997 *Physica* D **105** 45

[20] Chen B 1987 *Analytical Dynamics* (Bejing: Peking University Press) p346 (in Chinese) [陈 滨 1987 分析动力学(北京:北京大学出版社)第 346 页]

[21] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Dynamics* (Bejing: Bejing Institute of Technology Press) p52 (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)第 52 页]

[22] Liu Y Z 2001 *Advanced Dynamics* (Bejing: Higher Education Press) p14 (in Chinese) [刘延柱 2001 高等动力学(北京:高等教育出版社)第 14 页]

Methods of analytical mechanics for dynamics of the Kirchhoff elastic rod *

Xue Yun[1)] Liu Yan-Zhu[2)] Chen Li-Qun[3)]

1)(School of Mechanical and Automation Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

2)(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

3)(Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200436, China)

(Received 27 December 2005; revised manuscript received 19 January 2006)

Abstract

A cross section of the rod is taken as object of investigation. The freedom of the section in free or constraint case is analyzed and the definition of virtual displacement of the section is given, which can be expressed by a variational operation. Assuming the variational and partial differential operations has commutativity, based on the hypothesis about surface constraint subjected to the rod, the freedom of the section on constraint surface is discussed and the equations satisfied by virtual displacements of the section are given. Combining D'Alembert principle and the principle of virtual work, D'Alembert-Lagrange principle is established. When constitutive equation of material of the rod is linear, the principle can be transformed to Euler-Lagrange form. From the principle, a dynamical equation in various forms such as Kirchhoff, Lagrange, Nielsen and Appell equation can be derived. For the case when a rod is subjected to a surface or a nonholonomic constraint, Lagrange equation with undetermined multipliers is obtained. Integral variational principle of dynamics of a super-thin elastic rod is also established, from which Hamilton principle formulation is obtained when the material of the rod is linear. Finally, canonical variables to describe the state of the section and Hamilton function are defined, and Hamilton canonical equation is derived. The analytical methods of dynamical modeling of a super-thin elastic rod have been constructed, which can serve as a theoretical framework of analytical dynamics of a super-thin elastic rod with two independent variables.

Keywords: super-thin elastic rod, analytical dynamics, Kirchhoff's kinetic analogy, variational priciple

PACC: 0320, 0340D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472067).