第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3852-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55, No.8, August, 2006
©2006 Chin. Phys. Soc.

一类非线性相对转动周期系统的平衡稳定性分析*

赵 武[1)†] 刘 彬[1)] 时培明[1)] 蒋金水[2)]

1)(燕山大学信息工程学院,秦皇岛 066004)

2)(中国第一重型机械集团公司设计研究院,大连 116600)

(2005 年 7 月 1 日收到;2006 年 4 月 25 日收到修改稿)

利用一类周期性变系数线性常微分方程解的基本矩阵的 Jordan 形,分析一类非线性相对转动系统扭转的运动稳定性,从而得到非线性相对转动周期系统的运动稳定准则. 运用 Lyapunov 函数法,对广泛存在的一类机械传动系统的相对转动运动的平衡稳定位置的稳定域进行研究,并给出数学解析表达式. 这为工程中广泛存在的这类机械传动系统稳定工作区间工作参数的选取和相似模拟提供了理论依据及方法,据此可进一步分析和评价大型复杂旋转机械主传动系统的扭振稳定性.

关键词:相对转动, 相似模拟, 运动稳定, 平衡稳定

PACC:0340D, 0313, 0316

1. 引 言

Carmeli[1,2] 创建了转动相对论力学理论. 在此基础上,罗绍凯[3—5] 又提出转动相对论分析力学理论,并构造出转动相对论的 Hamilton 系统的积分变量. 近年来转动相对论在 Birkhoff 系统动力学的基本理论及其几何结构,通用性积分复杂动力学方程问题及其对称性理论、积分的场方法、代数结构、非等时变分特性[6—16] 和非完整系统的对称量与守恒量等研究领域取得了成果[17—21]. 基于相对性原理,得到弹性转轴任意两个横截面间相对转动线性动力学方程[22] 及其积分解[23] 和级数解[24]. 非线性相对转动动力学方程的稳定性和近似解[25,26].

相对转动轴系包含许多非线性因素,分析这类非线性相对转动系统的运动稳定性问题时,会获得非线性周期解在同一频率上的多个收敛解. 于是有必要对所得到的周期解进行稳定性分析研究,以确定真实条件下的响应究竟在哪个解上表现出稳定性.

首先,分析一类非线性相对转动系统平衡位置的稳定性. 在此基础上,把非线性相对转动轴系的运动稳定性研究归结为一类周期性变系数线性常微分方程解的研究;然后通过相似变换把解的基本矩阵变换为 Jordan 形来讨论解的稳定性. 其次,运用 Lyapunov 函数法,对一类广泛存在的机械传动系统的相对转动运动的平衡稳定位置的性质进行分析解析,进而寻求工程中广泛存在的这类机械传动系统稳定工作区间工作参数的选取及其相似模拟的理论依据和技术实现方法.

2. 非线性相对转动周期系统的运动稳定性

非线性相对转动轴系周期系统的稳定性,可归结为如下一类周期性变系数线性常微分方程:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \qquad (x \in R^n), \tag{1}$$

式中 $A(t+T) = A(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵. 设有齐次方程

$$\dot{x} = Ax \qquad (x \in R^n), \tag{2}$$

式中 A 是 $n \times n$ 矩阵. 方程(2)的解是

$$x(t) = x_{(0)} \exp[A(t)]$$

或

$$x(t) = x(t_0)\exp[A(t - t_0)].$$

此处矩阵 A 与时间 t 无关. 令基本矩阵 $\phi(t, t_0) = \exp(A(t - t_0))$,易得性质

$$\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0).$$

方程(2)的非齐次方程形式

* 国家十五重大科技攻关项目(批准号:ZZ02-13B-02-03-1)资助的课题.

† E-mail:zhaowu@88mail.ysu.edu.cn

$$\dot{x} = Ax + b \qquad (x \in R^n,\ b \in R^n), \qquad (3)$$

式中 A 是 $n \times n$ 矩阵，则方程（3）的解由 Duhamel 积分表示为

$$x(t) = \phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \phi(\tau,t_0)b(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (4)$$

若把方程（3）看作变系数常微分方程组，即 $A = A(t)$，则方程（4）仍成立．此时基本矩阵 $\phi(t,t_0)$ 不再等于 $\exp[A(t - t_0)]$，要通过求解以下常微分方程得到：

$$\dot{\phi}(t,t_0) = A\phi(t - t_0),$$
$$\phi(t_0,t_0) = I.$$

对方程（1）计算基本矩阵 $\phi(t,t_0)$ 并求解，应用 Floquet 定理有

$$\phi(t + T,t_0) = \phi(t,t_0)C,$$

式中 C 是一个非奇异的 $n \times n$ 常矩阵．

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t,t_0) &= A(t)\phi(t,t_0), \\ \phi(t_0,t_0) &= I, \\ \phi(t + T,t_0) &= \phi(t,t_0)C \\ &= A(t)\phi(t,t_0)C \\ &= A(t + T)\phi(t + T,t_0). \end{aligned}$$

对基本矩阵的计算可以只限于一个周期，有

$$\begin{aligned} \phi(t,t_0) &= \phi(t^0 + t^* + rT,t_0) \\ &= \phi(t^0 + t^*,t_0)\phi^r(t_0 + T,t_0). \end{aligned}$$

由上述分析可知，$\phi(t_0 + T,\ t_0)$ 是一个非奇异常矩阵，于是，总可通过相似变换把它变为 Jordan 形，即

$$J = T^{-1}\phi(t_0 + T,t_0)T,$$

而任意时刻解的向量为

$$x(t_0 + t^* + rT) = \phi(t_0 + t^*,t_0)T^{-1}J^rTx(t_0).$$

因 T 是非奇异矩阵，解 x 的稳定性显然就取决于 J 的性质，即

$$\lim_{r\to\infty} J^r \to \begin{cases} \text{无限} & (\text{不稳定}), \\ 0 & (\text{渐进稳定}), \\ \text{有限} & (\text{稳定}). \end{cases}$$

设 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是基本矩阵 $\phi(t_0 + T,\ t_0)$ 的特征值，则由矩阵理论可以证明，当 $\max|\lambda_i| < 1$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 时，有 $\lim_{r\to\infty} J^r \to 0$ 当 $\max|\lambda_i| > 1$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 时，有 $\lim_{r\to\infty} J^r \to \infty$ 当 $\max|\lambda_i| = 1$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$\lim_{r\to\infty} J^r \to \begin{cases} \text{有限} & (J\ \text{为对角阵}), \\ \infty & (J\ \text{不是对角阵}). \end{cases}$$

综上所述，非线性相对转动周期系统的运动稳定性准则分为渐进稳定、临界稳定及不稳定三个准则．

若 $\phi(t_0 + T,t_0)$ 的所有特征值的模小于 1，则系统渐进稳定．

若 $\phi(t_0 + T,t_0)$ 的所有特征值的模不大于 1，但有一个几何重数等于代数重数的模为 1 的特征值，则系统临界稳定．

若至少有一个 $\phi(t_0 + T,\ t_0)$ 的特征值的模大于 1 或有一个几何重数小于代数重数的模为 1 的特征值，则系统不稳定．

运用上述准则可讨论非线性相对转动周期系统解的稳定性．

3．非线性相对转动周期系统的稳定域估计

相对转动运动轴系是广泛存在的一类机械传动系统的基本力学抽象．此类转动系统的特点是原始驱动端的转动惯量远大于负载端的转动惯量，因此可把这类系统简化为二自由度质量相对转动系统来分析．由动力学基本原理描述相对转动轴系相对转动的运动微分方程为

$$\begin{aligned} J_1\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} + D_1\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} + K(\theta_1 - \theta_\mathrm{m}) &= T_1, \\ J_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\theta_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t^2} + D_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\theta_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} + K(\theta_\mathrm{m} - \theta_1) &= -T_\mathrm{m}, \end{aligned} \qquad (5)$$

式中，J_m 为驱动电机转动惯量，J_1 为负载端转动惯量，T_m 为驱动电机端转矩，T_1 为负载端转矩，D_m 为驱动电机端阻尼，D_1 为负载端阻尼，θ_1 为负载转角，θ_m 为驱动电机转角，K 为连接轴的刚度系数．这里驱动端电机力矩 T_m 与转速有关．记 $T_\mathrm{m} = E\sin\omega t$，其中 ω 是原始驱动电动机谐波转矩的频率，将 $\omega t = \theta_\mathrm{m}$ 代入方程（5）并整理后得

$$\begin{aligned} J_1\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2} + D_1\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} + K(\theta_1 - \theta_\mathrm{m}) &= T_1, \\ J_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\theta_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t^2} + D_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\theta_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} + K(\theta_\mathrm{m} - \theta_1) &= -E\sin\theta_\mathrm{m}. \end{aligned} \qquad (6)$$

令

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1, \\ \theta_2 &= \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}, \\ \theta_3 &= \theta_\mathrm{m}, \\ \theta_4 &= \frac{\mathrm{d}\theta_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \qquad (7)$$

则方程(6)化为如下等价的一阶方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} &= \theta_2,\\
\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{K}{J_1}\theta_1-\frac{D_1}{J_1}\theta_2+\frac{K}{J_1}\theta_3+\frac{T_1}{J_1},\\
\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} &= \theta_4,\\
\frac{\mathrm{d}\theta_4}{\mathrm{d}t} &= \frac{K}{J_{\mathrm{m}}}\theta_1-\frac{K}{J_{\mathrm{m}}}\theta_3-\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}\theta_4-\frac{E}{J_{\mathrm{m}}}\sin\theta_3,
\end{aligned}\tag{8}$$

式中 $J_1, J_{\mathrm{m}}, D_1, D_{\mathrm{m}}, K, T_1$ 都是正数. 求解方程(8)的平衡点,知其有两类平衡点,且是孤立的,具有 2π 周期. 这两类平衡点是

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left(\arcsin\left(\frac{T_1}{E}\right)+\frac{T_1}{K}+2k\pi, 0, \arcsin\left(\frac{T_1}{E}\right)\right.\\
&\qquad\left.+2k\pi, 0\right)\\
&\cong(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{\mathrm{m}1}, \theta_{\mathrm{m}2}),\\
F_2 &= \left(\pi-\arcsin\left(\frac{T_1}{E}\right)+\frac{T_1}{K}+2k\pi, 0,\right.\\
&\qquad\left.\pi-\arcsin\left(\frac{T_1}{E}\right)+2k\pi, 0\right)\\
&\cong(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{1\mathrm{m}}, \theta_{2\mathrm{m}})\quad(k=0, \pm1, \pm2, \cdots).
\end{aligned}$$

当 $E>T_1$ 时,方程(8)存在两类平衡点 F_1, F_2；当 $E=T_1$ 时,方程(8)的两类平衡点 F_1 和 F_2 合为一类,故方程(8)存在一个鞍结(SN)分岔;当 $E<T_1$ 时,方程(8)不存在平衡点.

下面讨论在 $E>T_1$ 时的情形下考察系统不动点的稳定性. 方程(8)的线性化 Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0\\
-\frac{K}{J_1} & -\frac{D_1}{J_1} & \frac{K}{J_1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\
\frac{K}{J_{\mathrm{m}}} & 0 & -\left(\frac{K}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{E}{J_{\mathrm{m}}}\cos\theta_3\right) & -\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}
\end{bmatrix},$$

其行列式的值为

$$\det J=\frac{K}{J_1}\frac{E}{J_{\mathrm{m}}}\cos\theta_3.$$

因为

$$\begin{aligned}
\det J|_{F_2} &= \frac{K}{J_1}\frac{E}{J_{\mathrm{m}}}\cos\theta_{1\mathrm{m}}\\
&= -\frac{K}{J_1}\frac{E}{J_{\mathrm{m}}}\sqrt{1-\left(\frac{T_1}{E}\right)^2}\\
&= -\frac{K}{J_1}\frac{1}{J_{\mathrm{m}}}\sqrt{E^2-T_1^2}<0,
\end{aligned}$$

可知方程(8)在 F_2 点处的线性化矩阵具有异号的特征值,因此平衡点 F_2 不稳定.

下面考察在 F_1 平衡点的稳定性. 记

$$\frac{E}{J_{\mathrm{m}}}\cos\theta_{\mathrm{m}1}=\rho_1,$$

有

$$J_1=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0\\
-\frac{K}{J_1} & -\frac{D}{J_1} & \frac{K}{J_1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\
\frac{K}{J_{\mathrm{m}}} & 0 & -\left(-\frac{K}{J_{\mathrm{m}}}+\rho_1\right) & -\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}
\end{bmatrix},$$

其特征多项式

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \det(\lambda I-J_1)\\
&= \lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4,
\end{aligned}$$

其中 I 为四阶单位阵,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_1}{J_1},\\
a_2 &= \frac{D_1}{J_1}\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{K}{J_1}+\frac{K}{J_{\mathrm{m}}}+\rho_1,\\
a_3 &= \frac{D_1}{J_1}\frac{K}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_1}\frac{K}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_1}{J_1}\rho_1,\\
a_4 &= \frac{K}{J_1}\rho_1.
\end{aligned}$$

应用 Routh-Hurwitz 准则判定 F_1 点的稳定性,则有

$$\begin{aligned}
H_1 &= a_1\\
&= \frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_1}{J_1},\\
H_2 &= \det\begin{bmatrix} a_1 & 1\\ a_3 & a_2\end{bmatrix}\\
&= \frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}^2}K+\frac{D_1}{J_1^2}K+\frac{D_1D_{\mathrm{m}}}{J_1J_{\mathrm{m}}}\left(\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_1}{J_1}\right)+\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}\rho_1,\\
H_3 &= \det\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ 0 & a_4 & a_3\end{bmatrix}\\
&= \left(\frac{D_1K}{J_1J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_{\mathrm{m}}K}{J_{\mathrm{m}}J_1}\right)\\
&\quad\times\left[\left(\frac{D_1}{J_1}+\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}\right)\frac{D_1D_{\mathrm{m}}}{J_1J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_1K}{J_1^2}+\frac{D_{\mathrm{m}}K}{J_{\mathrm{m}}^2}\right]\\
&\quad+\frac{D_1D_{\mathrm{m}}}{J_1J_{\mathrm{m}}}\left\{\frac{D_1}{J_1}\left(\frac{D_1}{J_1}+\frac{D_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}}}\right)+2\left(\frac{K}{J_{\mathrm{m}}}-\frac{K}{J_1}\right)\right\}\rho_1\\
&\quad+\frac{D_1D_{\mathrm{m}}}{J_1J_{\mathrm{m}}}\rho_1^2
\end{aligned}$$

$$H_4 = \det\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}.$$

显然,在 J_1,J_m,D_1,D_m,K 和 ρ_1 均为正数的条件下,$H_1>0$,$H_2>0$,且 H_3 与 H_4 具有相同的符号.

下面判断 H_3 的符号. H_3 可以看作关于 ρ_1($\rho_1>0$)的二次多项式,其二次项系数为正,其图像是开口向上的抛物线,判别式

$$\Delta = [D_1D_m(D_1J_m + D_mJ_1)^2(D_mD_1^3 - 4D_mD_1KJ_1 - 4K^2J_1^2)]/J_m^4J_1^6.$$

记

$$f = (D_mD_1^3 - 4D_mD_1KJ_1 - 4K^2J_1^2),$$

显然 Δ 与 f 的符号相同. f 的两个根为

$$K_{1,2} = \frac{-D_mD_1 \pm D_1\sqrt{D_m}\sqrt{D_m+D_1}}{2J_1}.$$

下面分两种情形进行讨论.

情形 1　当

$$K > \frac{-D_mD_1 + D_1\sqrt{D_m}\sqrt{D_m+D_1}}{2J_1}$$

时,有 $f<0$,即 $\Delta<0$,此时 H_3 恒大于零.

情形 2　当

$$0 < K < \frac{-D_mD_1 + D_1\sqrt{D_m}\sqrt{D_m+D_1}}{2J_1}$$

时,有 $f\geqslant 0$,即 $\Delta\geqslant 0$,此时 H_3 有两个根 ρ_1^* 和 ρ_1^{**}(设 $\rho_1^*<\rho_1^{**}$),则有

$$\rho_1^* = \frac{-f_1 - f_2}{2D_1D_mJ_1^2J_m^2},$$

$$\rho_1^{**} = \frac{f_1 - f_2}{2D_1D_mJ_1^2J_m^2},$$

式中

$$f_1 = J_m\sqrt{D_1D_m}(D_1J_m + D_mJ_1) \times\sqrt{D_mD_1^3 - 4D_mD_1KJ_1 - 4K^2J_1^2},$$

$$f_2 = D_mD_1J_1(D_1^2J_m + D_mD_1J_1 - 2KJ_mJ_1 + 2KJ_1^2).$$

当 $J_m\leqslant J_1$ 时,显然 $f_2>0$;当 $J_m>J_1$ 时,若 $f_1>0$,则有

$$K > \frac{-D_mD_1 + D_1\sqrt{D_m}\sqrt{D_m+D_1}}{2J_1}.$$

在情形 2 下,计算 $f_1^2-f_2^2$,此时

$$\begin{aligned} f_2 &\geqslant D_mD_1J_1[D_1^2J_m + D_mD_1J_1 \\ &\quad - D_1(-D_m + \sqrt{D_m(D_m+D_1)})(J_m - J_1)] \\ &= D_mD_1J_1[D_1J_m(D_1+D_m) \\ &\quad - D_1\sqrt{D_m(D_m+D_1)}(J_m - J_1)] > 0, \end{aligned}$$

则

$$f_1^2 - f_2^2 = -4D_mD_1(D_1+D_m)KJ_m^2J_1^2(D_mD_1^2J_m + D_1^2KJ_m^2D_m^2J_1 + D_mKJ_1^2) < 0.$$

因此,就有 $0<f_1<f_2$ 的关系存在,即 $\rho_1^{**}<0$. 当满足 $\rho_1^*<0$,且 $\rho_1<\rho_1^*$ 或 $\rho_1>\rho_1^{**}$ 时,有 $H_3>0$ 的关系存在.

总结以上推导过程中产生的约束条件,一个必须满足的基本条件是 $T_1>E$,对于一切的正数 J_1,J_m,D_1,D_m,K 和 T_1,ρ_1 均为正数的条件下,总有 $H_i>0$($i=1,2,\cdots$)的关系存在.

定理 1　对一切常数,J_1,J_m,D_1,D_m,K 和 T_1,若 $E<T_1$,方程(8)不存在平衡点;若 $E>T_1$,方程(8)存在两类平衡点 F_1 和 F_2,其中 F_1 是稳定的,F_2 是不稳定的;若 $E=T_1$,方程(8)的两类平衡点重合为一类平衡点,产生 SN 分岔.

下面是对相对转动轴系旋转扭振运动问题平衡位置的稳定域估计.

令

$$\widehat{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_{l1},$$

$$\widehat{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_{l2},$$

$$\widehat{\theta}_3 = \theta_3 - \theta_{m1},$$

$$\widehat{\theta}_4 = \theta_4 - \theta_{m2},$$

则方程(8)转化后的 Jacobi 形式为

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\theta}_1}{dt} &= \widehat{\theta}_2, \\ \frac{d\widehat{\theta}_2}{dt} &= -\frac{K}{J_1}\widehat{\theta}_1 - \frac{D_1}{J_1}\widehat{\theta}_2 + \frac{K}{J_1}\widehat{\theta}_3 \\ \frac{d\widehat{\theta}_3}{dt} &= \widehat{\theta}_4, \\ \frac{d\widehat{\theta}_4}{dt} &= \frac{K}{J_m}\widehat{\theta}_1 - \left(\frac{K}{J_m} + \rho\cos\theta_{m1}\right)\widehat{\theta}_3 - \frac{D_m}{J_m}\widehat{\theta}_4 \\ &\quad - \rho[\sin(\widehat{\theta}_3 + \theta_{m1}) - \sin\theta_{m1} - \widehat{\theta}_3\cos\theta_{m1}]. \end{aligned} \tag{9}$$

改写方程(9)为矩阵向量形式

$$\dot{x} = Wx + g,$$

$$x = (\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \widehat{\theta}_3, \widehat{\theta}_4)^{\mathrm{T}},$$

$$g = (0,0,0,f)^{\mathrm{T}},$$

$$f = -\rho[\sin(\widehat{\theta}_3 + \theta_{\mathrm{m1}}) - \sin\theta_{\mathrm{m1}} - \widehat{\theta}_3\cos\theta_{\mathrm{m1}}], \tag{10}$$

当 $E > T_1$ 时,由定理 1 知,方程(9)的线性化部分系数矩阵的特征值具有负实部,其 Lyapunov 矩阵方程表述为

$$PW + W^{\mathrm{T}}P = -I.$$

式中存在正定的实对称解矩阵 P,其中 $P = (P_{ij})_{4\times4}$ 为正定的实对称矩阵.

构造 Lyapunov 函数

$$V = x^{\mathrm{T}}Px, \tag{11}$$

计算 V 沿方程(10)的轨线对时间的导数有

$$\dot{V}|_{(10)} = x^{\mathrm{T}}(PW + W^{\mathrm{T}}P)x + g^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}Pg$$
$$= x^{\mathrm{T}}(-I)x + 2(x,Pg) \leqslant -\|x\|\,\|Pg\|.$$

当 $E > T_1$ 时,P 为正定实对称阵,于是

$$\|Pg\| \leqslant L\|g\| = L\|f\| = \frac{1}{2}L\rho\,|\sin\xi|,$$

$$\|\widehat{\theta}_3\|^2 \leqslant \frac{1}{2}L\rho|\sin\xi|\,|\,\|\widehat{\theta}_3\|\,\|x\|\,|, \tag{12}$$

式中,ξ 是介于 θ_{m1} 和 $\theta_{\mathrm{m1}} + \widehat{\theta}_3$ 之间的常数;L 是正定对称阵 P 的最大特征值,故 $L > 0$.

一方面,由 $|\sin\xi| \leqslant 1$,有

$$\|Pg\| \leqslant \frac{1}{2}L\rho|\widehat{\theta}_3|\,\|x\|.$$

于是,

$$\dot{V}|_{(10)} \leqslant -\|x\|^2(1 - L\rho|\widehat{\theta}_3|).$$

因此,当

$$|\widehat{\theta}_3| < \frac{1}{L\rho}$$

时,有

$$\dot{V}|_{(10)} < 0. \tag{13}$$

另一方面,由 $|\sin\xi| \leqslant |\xi| \leqslant |\theta_{\mathrm{m1}}| + |\widehat{\theta}_3|$,有

$$\|Pg\| \leqslant \frac{1}{2}L\rho(|\theta_{\mathrm{m1}}| + |\widehat{\theta}_3|)|\widehat{\theta}_3|\,\|x\|,$$

于是,

$$\dot{V}_{(10)} \leqslant -\|x\|^2[1 - L\rho(|\theta_{\mathrm{m1}}| + |\widehat{\theta}_3|)|\widehat{\theta}_3|].$$

因此当

$$|\widehat{\theta}_3| < \frac{-|\theta_{\mathrm{m1}}| + \sqrt{|\theta_{\mathrm{m1}}|^2 + \frac{4}{L\rho}}}{2}$$

时,有

$$\dot{V}|_{(10)} < 0. \tag{14}$$

选取

$$R = \max\left(\frac{1}{L\rho}, \frac{-|\theta_{\mathrm{m1}}| + \sqrt{|\theta_{\mathrm{m1}}|^2 + \frac{4}{L\rho}}}{2}\right),$$

则当 $|\widehat{\theta}_3| < R$ 时,可以保证方程(12),(13)中至少有一个成立,保证了 $\dot{V}|_{(10)} < 0$,即得到吸引域 $|\widehat{\theta}_3| < R$. 在定理 2 中给出平衡位置的吸引域估计.

定理 2 设 $J_1, J_{\mathrm{m}}, D_1, D_{\mathrm{m}}, K$ 和 T_1 都是正数且 $E > T_1$,则平衡点 F_1 的吸引域为 $|\widehat{\theta}_3| < R$,其中 $R = \max(R_1, R_2)$,

$$R_1 = \frac{1}{L\rho},$$

$$R_2 = \frac{-|\theta_{\mathrm{m1}}| + \sqrt{|\theta_{\mathrm{m1}}|^2 + \frac{4}{L\rho}}}{2}.$$

此条件是估计稳定域的充分条件.

4. 结 论

通过对一类非线性相对转动系统平衡位置稳定性的初步探讨,把非线性相对转动系统扭振问题的运动稳定性分析转化为一类周期性变系数线性常微分方程解的稳定性. 通过相似变换把这类周期性变系数线性常微分方程解的基本矩阵变换为 Jordan 形,得到非线性相对转动周期系统的运动稳定性准则,即渐进稳定准则、临界稳定准则、不稳定准则. 运用 Lyapunov 函数法,得到一类广泛存在的机械传动系统的相对转动扭转运动的稳定平衡位置稳定域的数学解析表达式. 这不但为工程中广泛存在的这类机械传动系统稳定工作区间工作参数的选取和相似模拟提供了理论依据和技术实现方法,也为进一步分析和评价大型复杂旋转机械主传动系统的扭振稳定性及其合理确定机器设备主传动系统的设计参数和合理制定相应的工艺规程提供了依据.

[1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
[2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89
[3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]

[4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
[5] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683
[6] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
[7] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
[8] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
[9] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese)[罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
[10] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271
[11] Luo S K, Guo Y X, Chen X W *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜等 2001 物理学报 **50** 2049]
[12] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese)[方建会 2000 物理学报 **49** 1028]
[13] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese)[方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]
[14] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
[15] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429
[16] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
[17] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese)[罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
[18] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1271 (in Chinese)[罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 1271]
[19] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2413 (in Chinese)[罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2413]
[20] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese)[罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]
[21] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese)[罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
[22] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese)[董全林、刘　彬 2002 物理学报 **51** 2191]
[23] Dong Q L, Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese)[董全林、刘　彬 2004 物理学报 **53** 337]
[24] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese)[赵武、刘　彬 2005 物理学报 **54** 4543]
[25] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese)[王　坤 2005 物理学报 **54** 3987]
[26] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese)[王　坤 2005 物理学报 **54** 5530]

Analysis of stability of the equilibrium state of periodic motion in a nonlinear relative-rotation system*

Zhao Wu[1)†]　Liu Bin[1)]　Shi Pei-Ming[1)]　Jiang Jin-Shui[2)]

1)(*Institute of Information Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)

2)(*Design and Research Institute of China First Heavy Industries, Dalian* 116600, *China*)

(Received 1 July 2005; revised manuscript received 25 April 2006)

Abstract

For solving stability of motion in a nonlinear relative rotation shafting, a sort of periodic variable coefficient linear ordinary differential equations was studied. Movement stabilization criterion of nonlinear relative rotation system was obtained by transferring the fundamental matrix of the solution of the ordinary differential equation to Jordan canonical. Using the Lyapunov function method, the stabile balance position of relative rotation motion of driving system in a variety of mechanical equipments was studied, and the analytic expression of the stable region was obtained. The method supplies theoretical laws, similarity analog criterion and technique means of selecting working parameter of stable working interval of a type of mechanical driving systems. The result of the research can be used for analysis and evaluation of the torsional vibration stability of the main driving system of heavy and complex rotary machines.

Keywords: relatively rotation, similarity analog, stability of motion state, stability of equilibrium state

PACC: 0340D, 0313, 0316

* Project supported by the National Significant Tackle Key Program for 10th 5-year Plan of China (Grant No. ZZ02-13B-02-03-1).

† E-mail: zhaowu@88mail.ysu.edu.cn