第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3858-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.8,August,2006

一般变换下双 Jacobi 椭圆函数展开法及应用*

吴国将 韩家骅 史良马 张 苗

(安徽大学物理与材料科学学院,合肥 230039)

(2005 年 11 月 11 日收到;2006 年 4 月 25 日收到修改稿)

将行波变换下修正的双 Jacobi 椭圆函数展开法推广到范围广泛的一般函数变换下进行.利用这一方法求得了一类非线性方程更多新的周期解,这些解包括了在行波变换下所求得的周期解.

关键词:Jacobi 椭圆函数展开法,非线性发展方程,函数变换,周期解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

求解非线性发展方程的精确解在非线性问题的研究中占有非常重要的地位.近几年,研究人员对求解非线性发展方程的精确解提出了许多方法,如齐次平衡法[1—4]、双曲函数法[5,6]、sine-cosine 方法[7]等.但这些方法只能求得非线性方程的冲击波解和孤波解,不能求得非线性方程广义上的周期解.为解决这个问题,刘式适等[8—11]提出了 Jacobi 椭圆函数展开法,该方法可借助计算机代数系统得以实现,故得到了广泛的推广和应用[12—15].然而,这些方法主要是在行波变换下进行的,本文利用文献[16,17]的思想,首先将行波变换 $\xi = k(x - ct)$ 下修正的双 Jacobi 椭圆函数展开法推广到范围更广泛的一般变换 $\xi = h(x,t)$ 下进行,并引进椭圆方程组[18](一阶常微分方程组),将双椭圆函数展开法中不同的 Jacobi 椭圆函数对统一表示为椭圆方程组的解,从而利用椭圆方程组的解构造出一类非线性方程丰富的准确周期解.这些解包括行波变换下所求得的周期解.当模 $m\to 1$ 时,有些解退化为相应的孤波解和奇异的行波解.

2. 方法简述

非线性发展方程的一般形式可以写为

$$N(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xt},u_{xx},\cdots) = 0, \tag{1}$$

式中的 N 为关于变元 $u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xt},u_{xx}\cdots$ 的多项式.

引入变换

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(\xi),\\ \xi &= h(x,t). \end{aligned} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,得到关于 $u(\xi)$ 的常微分方程

$$F(u,u',u'',\cdots,h_t,h_x,h_{tt},h_{xt},h_{xx},\cdots) = 0. \tag{3}$$

设 $u(\xi)$ 可表示为 $f(\xi)$ 与 $g(\xi)$ 的二元有限幂级数

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i(\xi) + \sum_{i=1}^{n} b_i f^{i-1}(\xi) g(\xi) + a_0, \tag{4}$$

式中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 为待定常数.$f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 满足椭圆方程方程组

$$\begin{aligned} f'^2 &= p_1 f^4 + q_1 f^2 + r_1,\\ g'^2 &= p_2 g^4 + q_2 g^2 + r_2. \end{aligned} \tag{5}$$

这里,p_1,q_1,r_1,p_2,q_2,r_2 为待选常数,适当选取这些常数的值,可使方程组(5)的解 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 为 Jacobi 椭圆函数,且满足 Jacobi 椭圆函数之间的平方和导数关系,正整数 n 可由非线性项与最高阶导数项的齐次平衡确定.

将(4)式代入方程(3),利用(5)式可将方程(3)的左端变成关于 $f(\xi)$,$g(\xi)$ 的二元多项式,令 $f^i(\xi)g^j(\xi)$($i=0,1,2,\cdots$;$j=0,1$)的各次幂项的系数为零,可得 $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 和 ξ 的代数方程组.解这个方程组,$a_0,a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 和 ξ

* 安徽省自然科学基金(批准号:01041188)和安徽省省级精品课程基金资助的课题.

可由 p_1,q_1,r_1,p_2,q_2,r_2 来表示，或直接由方程(1)的系数表示. 将这些结果代入(4)式可得方程(1)的周期波解. 在极限情况下，可以得到相应的孤波解、三角函数解和奇异的行波解.

3. 方法的应用

3.1. Klein-Gordon 方程

考虑如下形式的非线性 Klein-Gordon 方程：

$$u_{tt}-c_0^2u_{xx}+\alpha u-\beta u^3=0, \tag{6}$$

将(2)式代入(6)式，可得

$$(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)u''+(\xi_{tt}-c_0^2\xi_{xx})u'+\alpha u-\beta u^3=0. \tag{7}$$

考虑方程(7)中最高阶导数项 u'' 与具支配地位非线性项 u^3 齐次平衡，可确定(4)式中 $n=1$，于是方程(7)的解具有下列形式：

$$u(\xi)=a_0+a_1f(\xi)+b_1g(\xi), \tag{8}$$

式中 a_0,a_1,b_1 为待定常数.

将(8)式代入方程(7)，利用(5)式可将方程(7)的左端变为关于 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的多项式，$g(\xi)$ 的幂次最大为 1，令 $f^i(\xi)g^j(\xi)$ $(i=0,1,2,\cdots;j=0,1)$ 的各次幂项的系数为零，得到关于 a_0,a_1,b_1 和 ξ 的代数方程组，将其解出后代入(8)式可得方程(7)的精确解. 下面分四种情形分别进行讨论.

情形 1　当取

$$\begin{aligned}p_1&=m^2,\\ q_1&=-(1+m^2),\\ r_1&=1;\\ p_2&=-m^2,\\ q_2&=2m^2-1,\\ r_2&=m'^2\equiv 1-m^2\end{aligned}$$

时，椭圆方程组(5)有特解

$$\begin{aligned}f&=\mathrm{sn}\xi,\\ g&=\mathrm{cn}\xi.\end{aligned} \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式，得方程(7)如下形式解：

$$u(\xi)=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi+b_1\mathrm{cn}\xi. \tag{10}$$

把(10)式代入(7)式，并令各 Jacobi 椭圆函数的线性无关项为零，得到下列代数方程组：

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta a_0^2-3\beta b_1^2)a_0=0,\\ &[\alpha-3\beta a_0^2-3\beta b_1^2-(1+m^2)(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)]a_1=0,\\ &[\alpha-3\beta a_0^2-3\beta b_1^2-(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)]b_1=0,\\ &6\beta a_0a_1b_1=0,\\ &(\xi_{tt}-c_0^2\xi_{xx})b_1=0,\\ &(\xi_{tt}-c_0^2\xi_{xx})a_1=0,\\ &3\beta(a_1^2-b_1^2)a_0=0,\\ &[-3\beta a_1^2+\beta b_1^2+2m^2(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)]b_1=0,\\ &[-\beta a_1^2+3\beta b_1^2+2m^2(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)]a_1=0.\end{aligned} \tag{11}$$

解此代数方程组，可得

$$\begin{aligned}a_0&=b_1=0,\\ a_1&=\pm\sqrt{\frac{2\alpha m^2}{\beta(1+m^2)}},\end{aligned} \tag{12}$$

且 ξ 满足

$$\xi_{tt}-c_0^2\xi_{xx}=0, \tag{13}$$

$$\alpha-(1+m^2)(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)=0. \tag{14}$$

注意到(13)式为一波动方程，其通解为

$$\xi=\Psi_1(x+c_0t)+\Psi_2(x-c_0t), \tag{15}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数. 将(15)式代入(14)式得 Ψ_1,Ψ_2 所满足的限制条件为

$$\Psi_1'\Psi_2'=-\frac{\alpha}{4c_0^2(1+m^2)}. \tag{16}$$

将(12)和(15)式代入(10)式，得方程(7)的精确周期解

$$\begin{aligned}u_1=\pm\sqrt{\frac{2m^2\alpha}{\beta(m^2+1)}}\mathrm{sn}[&\Psi_1(x+c_0t)\\ &+\Psi_2(x-c_0t)].\end{aligned} \tag{17}$$

实际上，(10)，(12)—(14)式给出了非线性 Klein-Gordon 方程的一个 Bäcklund 变换，因此还可以利用(13)式的边值问题的解研究方程(6)的初边值问题.

同理，由(11)式还可解得

$$\begin{aligned}a_0&=a_1=0,\\ b_1&=\pm\sqrt{\frac{2\alpha m^2}{\beta(2m^2-1)}},\\ \xi_{tt}&-c_0^2\xi_{xx}=0,\\ \alpha&-(2m^2-1)(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)=0\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}a_0&=0,\\ b_1&=\pm ia_1,\\ a_1&=\pm\sqrt{\frac{\alpha m^2}{\beta(2-m^2)}},\\ \xi_{tt}&-c_0^2\xi_{xx}=0,\\ 2\alpha&+(2-m^2)(\xi_t^2-c_0^2\xi_x^2)=0.\end{aligned}$$

从而我们可以得到方程(7)的周期解

$$u_2 = \pm\sqrt{\frac{2m^2\alpha}{\beta(2m^2-1)}}\,\mathrm{cn}[\Psi_1(x+c_0t) + \Psi_2(x-c_0t)]. \tag{18}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数,满足如下限制条件:

$$\Psi_1'\Psi_2' = -\frac{\alpha}{4c_0^2(2m^2-1)}. \tag{19}$$

还可得到

$$u_3 = \pm\sqrt{\frac{-m^2\alpha}{\beta(2-m^2)}}\{\mathrm{sn}[\Psi_1(x+c_0t)+\Psi_2(x-c_0t)] \pm i\,\mathrm{cn}[\Psi_1(x+c_0t)+\Psi_2(x-c_0t)]\}, \tag{20}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数,满足如下限制条件:

$$\Psi_1'\Psi_2' = -\frac{\alpha}{2c_0^2(m^2-2)}. \tag{21}$$

下面情形 2、情形 3 和情形 4 采用类似情形 1 的方法.

情形 2 当取

$$p_1 = m^2,\quad q_1 = -(1+m^2),\quad r_1 = 1;$$
$$p_2 = -1,\quad q_2 = 2-m^2,\quad r_2 = -m'^2$$

时,椭圆方程组(5),(6)有特解

$$f = \mathrm{sn}\xi,\quad g = \mathrm{dn}\xi. \tag{22}$$

从而得到方程(7)的精确周期解

$$u_4 = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta(2-m^2)}}\,\mathrm{dn}[\Psi_1(x+c_0t) + \Psi_2(x-c_0t)], \tag{23}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数,满足如下限制条件:

$$\Psi_1'\Psi_2' = -\frac{\alpha}{4c_0^2(m^2-2)}. \tag{24}$$

还可得到

$$u_5 = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta(2m^2-1)}}\{m\,\mathrm{sn}[\Psi_1(x+c_0t) + \Psi_2(x-c_0t)] \pm i\,\mathrm{dn}[\Psi_1(x+c_0t) + \Psi_2(x-c_0t)]\}, \tag{25}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数,满足如下限制条件:

$$\Psi_1'\Psi_2' = -\frac{\alpha}{2c_0^2(2m^2-1)}. \tag{26}$$

情形 3 当取

$$p_1 = -m^2,\quad q_1 = 2m^2-1,\quad r_1 = m'^2 = 1-m^2;$$
$$p_2 = -1,\quad q_2 = 2-m^2,\quad r_2 = -m'^2 = -(1-m^2)$$

时,椭圆方程组(5)有特解

$$f = \mathrm{cn}\xi,\quad g = \mathrm{dn}\xi. \tag{27}$$

从而得到方程(7)的精确解

$$u_6 = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta(m^2+1)}}\{m\,\mathrm{cn}[\Psi_1(x+c_0t) + \Psi_2(x-c_0t)] \pm \mathrm{dn}[\Psi_1(x+c_0t) + \Psi_2(x-c_0t)]\}, \tag{28}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数,满足如下限制条件:

$$\Psi_1'\Psi_2' = -\frac{\alpha}{2c_0^2(m^2+1)}. \tag{29}$$

情形 4 当取

$$p_1 = 1,\quad q_1 = -(1+m^2),\quad r_1 = m^2;$$
$$p_2 = 1,\quad q_2 = 2-m^2,\quad r_2 = 1-m^2 = m'^2$$

时,椭圆方程组(5),(6)有特解

$$f = \mathrm{ns}\xi,\quad g = \mathrm{cs}\xi. \tag{30}$$

这里,

$$\mathrm{ns}\xi = \frac{1}{\mathrm{sn}\xi},\quad \mathrm{cs}\xi = \frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi}.$$

从而得到方程(7)的精确解

$$u_7 = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{(1+m^2)\beta}}\,\mathrm{ns}[\Psi_1(x+c_0t) + \Psi_2(x-c_0t)], \tag{31}$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数,满足限制条件(16)式.

还可得到

$$u_8=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{(m^2-2)\beta}}\mathrm{cs}[\Psi_1(x+c_0t)+\Psi_2(x-c_0t)],\quad(32)$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数，满足限制条件(24)式.

$$u_9=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{(2m^2-1)\beta}}\{\mathrm{ns}[\Psi_1(x+c_0t)+\Psi_2(x-c_0t)]\pm\mathrm{cs}[\Psi_1(x+c_0t)+\Psi_2(x-c_0t)]\},\quad(33)$$

式中 Ψ_1,Ψ_2 为任意二阶可微函数，满足限制条件(26)式.

这里的 u_5,u_6,u_8,u_9 是本文得到的新的精确周期解，其中多为双函数形式的精确解，u_1,u_2,u_3,u_4,u_7 与文献[19]中的结果一致.

3.2. Korteweg-de Vries(KdV)方程

考虑 KdV 方程[17]

$$u_t+uu_x+\beta u_{xxx}=0,\quad(34)$$

将(2)式代入后得到

$$(\xi_t+\beta\xi_{xxx})u'+3\beta\xi_x\xi_{xx}u''+\xi_xuu'+\beta\xi_x^3u'''=0.\quad(35)$$

按齐次平衡原则 $n=2$，显然方程(34)具有如下形式解：

$$u(\xi)=a_0+a_1f(\xi)+b_1g(\xi)+a_2f^2(\xi)+b_2f(\xi)g(\xi).\quad(36)$$

将(36)式代入(35)式，应用上述方法可得到方程(34)以下六类周期解.

$$u_1=a_0+a_2\mathrm{sn}^2\left\{\pm\sqrt{\frac{-a_2}{12m^2\beta}}\left[x-\left(a_0+\frac{(1+m^2)a_2}{3m^2}\right)\right]t+C\right\}$$
$$=a_0+a_2-a_2\mathrm{cn}^2\left\{\pm\sqrt{\frac{-a_2}{12m^2\beta}}\left[x-\left(a_0+\frac{(1+m^2)a_2}{3m^2}\right)\right]t+C\right\},\quad(37)$$

其中，$a_0,a_2(\neq0),C$ 为任意常数，这是椭圆余弦波解. 当 $m\to1$，此解可化为 KdV 方程的钟型孤立波解.

$$u_2=a_0+a_2\mathrm{sn}^2\xi\pm a_2i\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi,\quad(38)$$

式中 ξ 满足

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{-a_2}{6m^2\beta}}\left[x-\left(a_0+\frac{(4+m^2)a_2}{6m^2}\right)\right]t+C,$$

其中 $a_0,a_2(\neq0),C$ 为任意常数，此为复标量场中的一组解.

$$u_3=a_0+a_2\mathrm{cn}^2\xi\pm a_2\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,\quad(39)$$

式中 ξ 满足

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{a_2}{6m^2\beta}}\left[x-\left(a_0+\frac{(5m^2-1)a_2}{6m^2}\right)\right]t+C,$$

其中 $a_0,a_2(\neq0),C$ 为任意常数.

$$u_4=a_0+a_2\mathrm{sn}^2\xi\pm a_2i\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi,\quad(40)$$

式中 ξ 满足

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{-a_2}{6m^2\beta}}\left[x-\left(a_0-\frac{(4m^2+1)a_2}{6m^2}\right)\right]t+C,$$

其中 $a_0,a_2(\neq0),C$ 为任意常数，这是复标量场中的一组解.

$$u_5=a_0+a_2\mathrm{ns}^2\left\{\pm\sqrt{\frac{-a^2}{6\beta}}\left[x-\left(a_0+\frac{2(1+m^2)a_2}{3}\right)\right]t+C\right\},\quad(41)$$

其中 $a_0,a_2(\neq0),C$ 为任意常数.

$$u_6=a_0+a_2\mathrm{ns}^2\xi\pm a_2\mathrm{ns}\xi\mathrm{cs}\xi,\quad(42)$$

式中 ξ 满足

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{-a_2}{6\beta}}\left[x-\left(a_0-\frac{(4m^2+1)a_2}{6}\right)\right]t+C,$$

其中 $a_0,a_2(\neq0),C$ 为任意常数.

上述 u_2,u_3,u_4,u_5,u_6 均为新求得的解，u_1 与文献[17]中的解一致.

3.3. 改进的 KdV(mKdV)方程

考虑如下形式的 mKdV 方程[17]：

$$u_t+\alpha u^2u_x+\beta u_{xxx}=0,\quad(43)$$

将(2)式代入后得

$$(\xi_t+\beta\xi_{xxx})u'+3\beta\xi_x\xi_{xx}u''+\alpha\xi_xu^2u'+\beta\xi_x^3u'''=0.\quad(44)$$

按齐次平衡原则 $n=1$，方程(43)具有如下形式解：

$$u(\xi)=a_0+a_1f(\xi)+b_1g(\xi).\quad(45)$$

将(45)式代入(44)式，可得到方程(43)以下九类周期解.

$$u_1=a_1\mathrm{sn}\left[\pm\sqrt{\frac{-a_1^2\alpha}{6m^2\beta}}\left(x-\frac{(1+m^2)a_1^2\alpha}{6m^2}t\right)+C\right],\quad(46)$$

其中 $a_1(\neq0),C$ 为任意常数.

$$u_2=b_1\mathrm{cn}\left[\pm\sqrt{\frac{b_1^2\alpha}{6m^2\beta}}\left(x-\frac{(2m^2-1)b_1^2\alpha}{6m^2}t\right)+C\right],\quad(47)$$

其中 $b_1(\neq 0)$，C 为任意常数. 当 $m\to 1$ 时可化为 mKdV 方程的钟型孤立子解.

$$u_3 = a_1 \mathrm{sn}\left[\pm\sqrt{\frac{-2a_1^2\alpha}{3m^2\beta}}\left(x-\frac{(2-m^2)a_1^2\alpha}{3m^2}t\right)+C\right] \pm a_1 i\,\mathrm{cn}\left[\pm\sqrt{\frac{-2a_1^2\alpha}{3m^2\beta}}\left(x-\frac{(2-m^2)a_1^2\alpha}{3m^2}t\right)+C\right], \tag{48}$$

其中 $a_1(\neq 0)$，C 为任意常数，这是复标量场中的一组解.

$$u_4 = b_1 \mathrm{dn}\left[\pm\sqrt{\frac{b_1^2\alpha}{6\beta}}\left(x-\frac{(2-m^2)b_1^2\alpha}{6}t\right)+C\right], \tag{49}$$

其中 $b_1(\neq 0)$，C 为任意常数. 当 $m\to 1$ 时该解也可化为钟型孤立子解.

$$u_5 = a_1 \mathrm{sn}\left[\pm\sqrt{\frac{-2a_1^2\alpha}{3m^2\beta}}\left(x-\frac{(2m^2-1)a_1^2\alpha}{3m^2}t\right)+C\right] \pm \frac{1}{m}a_1 i\,\mathrm{dn}\left[\pm\sqrt{\frac{-2a_1^2\alpha}{3m^2\beta}} \times\left(x-\frac{(2m^2-1)a_1^2\alpha}{3m^2}t\right)+C\right], \tag{50}$$

其中 $a_1(\neq 0)$，C 为任意常数，这是复标量场中的一组解.

$$u_6 = a_1 \mathrm{cn}\left[\pm\sqrt{\frac{2a_1^2\alpha}{3m^2\beta}}\left(x-\frac{(m^2+1)a_1^2\alpha}{3m^2}t\right)+C\right] \pm \frac{1}{m}a_1 \mathrm{dn}\left[\pm\sqrt{\frac{2a_1^2\alpha}{3m^2\beta}}\left(x-\frac{(m^2+1)a_1^2\alpha}{3m^2}t\right)+C\right], \tag{51}$$

其中 $a_1(\neq 0)$，C 为任意常数. 当 $m\to 1$ 时该式与 (47)式一致.

$$u_7 = a_1 \mathrm{ns}\left[\pm\sqrt{\frac{-a_1^2\alpha}{6\beta}}\left(x-\frac{(m^2+1)a_1^2\alpha}{6}t\right)+C\right], \tag{52}$$

其中 $a_1(\neq 0)$，C 为任意常数.

$$u_8 = b_1 \mathrm{cs}\left[\pm\sqrt{\frac{-b_1^2\alpha}{6\beta}}\left(x-\frac{(m^2-2)b_1^2\alpha}{6}t\right)+C\right], \tag{53}$$

其中 $b_1(\neq 0)$，C 为任意常数.

$$u_9 = a_1 \mathrm{ns}\left[\pm\sqrt{\frac{a_1^2\alpha}{3\beta}}\left(x-\frac{(m^2+4)a_1^2\alpha}{3}t\right)+C\right] \pm a_1 \mathrm{cs}\left[\pm\sqrt{\frac{a_1^2\alpha}{3\beta}}\left(x-\frac{(m^2+4)a_1^2\alpha}{3}t\right)+C\right], \tag{54}$$

其中 $a_1(\neq 0)$，C 为任意常数.

上述九类周期解中，除了 u_1 与文献[17]中的解相同之外，其余都为新求得的解.

4. 结 论

本文将行波变换下修正的双 Jacobi 椭圆函数展开法[16]推广到范围广泛的一般函数变换下进行. 应用该方法求得了一类非线性方程的新的精确周期解，当模数 $m\to 1$ 时，有些解退化为相应的孤波解. 三个例子说明一些非线性发展方程的周期解一定是行波解或它们的叠加. 同时，本文给出了非线性方程(6)的波动方程(13)的一个 Bäcklund 变换. 本文的方法具有一定的普遍性，可以用来求解更多的非线性发展方程，例如非线性 Schrödinger 方程、Kadomtsev-Petviashvili 方程、Ginzburg-Landau 方程等.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[2] Lei Y 1999 *Phys. Lett.* A **260** 55

[3] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[4] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[5] Parkes E J, Duffy B R 1997 *Phys. Lett.* A **229** 217

[6] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[7] Yan C T 1996 *Phys. Lett.* A **224** 77

[8] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **289** 69

[9] Fu Z T, Liu S K, Liu S D *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **290** 72

[10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]

[11] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10]

[12] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[13] Yan Q Y, Zhang Y F, Wei X P 2003 *Chin. Phys.* **12** 131

[14] Chen L, Xu Y, Liu Z F *et al* 2003 *Fzika* A **12** 61

[15] Lü K P, Shi Y R, Duan W S *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山等 2001 物理学报 **50** 2074]

[16] Han J H, Wu G J, Shi L M *et al* 2005 *J. Anhui Univ.* (Natural

Edition） **29** 37 [韩家骅、吴国将、史良马等 2005 安徽大学学报（自然科学版）**29** 37]

[17] Liu G T，Fan T Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 676（in Chinese）[刘官亭、范天佑 2004 物理学报 **53** 676]

[18] Liu S K，Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics*（Beijing：Peking University Press）p32 [刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程（北京：北京大学出版社）第 32 页]

[19] Han Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1481（in Chinese）[韩兆秀 2005 物理学报 **54** 1481]

Double Jacobian elliptic function expansion method under a general function transform and its applications*

Wu Guo-Jiang Han Jia-Hua Shi Liang-Ma Zhang Miao

（*School of Physics and Material Science*，*Anhui University*，*Hefei* 230039，*China*）

（Received 11 November 2005；revised manuscript received 25 April 2006）

Abstract

A modified double Jacobian elliptic function expansion method under a general function transform，which is more general than the Jacobian elliptic function expansion method under a travelling wave transform，is proposed to construct the exact solutions of nonlinear evolution equations. Some new exact periodic solutions are obtained by this method which include previous solutions，replenishing the known results of the equations.

Keywords：Jacobian elliptic function expansion method，nonlinear evolution equation，function transform，periodic solution

PACC：0340K，0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Anhui Province，China（Grant No. 01041188）and the Foundation of Classical Courses of Anhui Province，China.