第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3869-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.8,August,2006
©2006 Chin.Phys.Soc.

二非正交纯态相混合的 concurrence*

狄尧民　胡宝林　刘冬冬　颜士明

(徐州师范大学物理系,徐州　221116)

(2005 年 11 月 28 日收到;2006 年 4 月 10 日收到修改稿)

导出了两量子比特中二非正交纯态相混合的 concurrence 的明显表达式,并作了验证. 推算表明,正交情形下的 concurrence 公式可以直接推广到非正交的情形. 讨论了两纯态相混合的最大纠缠混合态和一些重要特殊情形.

关键词:量子纠缠,纯态,混合态,concurrence

PACC:0365

1. 引　　言

量子纠缠现象是量子理论最重要的特性之一. 现在量子纠缠已被认为是量子信息的重要资源被广泛应用于量子密钥分配、量子稠密编码、量子隐形传态、量子计算等领域[1]. 量子纠缠态刻画的研究已经成为量子信息基础研究的重要课题,其中纠缠的定量描述即纠缠度量占有很重要的地位.

为了计算两量子比特混合态的形成纠缠度[2,3],Wootters 等[4,5]提出了 concurrence 的概念,得到了计算两量子比特混合态形成纠缠度的一般方法. 这一计算方法被认为是在混合态纠缠度量计算方面迄今取得的最好成果之一,现 concurrence 本身也已经作为纠缠的重要量度而受到重视. 王安民[6]在此基础上推导出由两量子比特中二正交纯态相混合的 concurrence 的明显表达式. 这不仅简化了 concurrence 的计算,还能揭示两纯态相混合纠缠的一些规律. 在量子信息中常遇到非正交纯态相混合的情形,本文致力于两量子比特中二非正交纯态相混合的 concurrence 的研究.

本文先介绍 concurrence 的概念和王安民的工作. 接着推导了二非正交纯态相混合的 concurrence 的明显表达式,并作了验证. 推算表明,正交情形下的 concurrence 公式可以直接推广到非正交的情形. 讨论了两纯态相混合的最大纠缠混合态和一些重要特殊情形的 concurrence,得到了一些有意义的结果.

2. 两量子比特情形的 concurrence

现在两体纯态纠缠的度量问题已经得到了解决,部分熵纠缠度(约化密度矩阵的 von Neumann 熵)被认为两体纯态纠缠的完美量度[3]. 两体混合态纠缠的度量问题有了不少进展,但还有很多问题没有解决. 形成纠缠度是两体混合态纠缠的重要量度,它的定义为[2,3]

$$E_{\mathrm{F}}(\rho)=\min_{\{p_i,|\psi_i\rangle\}}\sum_i p_i E(\psi_i),\tag{1}$$

式中,$\{p_i,|\psi_i\rangle\}$为 ρ 的任意一种分解方式,$E(\psi_i)$为纯态的部分熵纠缠度. (1)式中求极小值是对 ρ 的所有可能的分解方式,$|\psi_i\rangle$为任意的两体归一纯态,不一定互相正交.

一般的两体混合态的形成纠缠度的计算相当困难,至今还没有普遍有效的方法. 为了计算对两量子比特混合态的形成纠缠,Wootters 等[4,5]引入了 concurrence 的概念. 对于纯态

$$|\psi\rangle=a|00\rangle+b|01\rangle+c|10\rangle+d|11\rangle,\tag{2}$$

其 concurrence 为

$$C=2|ad-bc|.\tag{3}$$

对于混合态 ρ,首先定义"自旋翻转"密度矩阵

$$\tilde{\rho}\equiv\sigma_2\otimes\sigma_2\rho^*\sigma_2\otimes\sigma_2,\tag{4}$$

式中,ρ^* 为 ρ 的复共轭,σ_2 为 Pauli 矩阵. 则 concurrence 为

* 国家自然科学基金(批准号:60433050)和徐州师范大学科研基金(批准号:03XLA04)资助的课题.

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}. \tag{5}$$

$\lambda_i^2(i=1,2,3,4)$为矩阵 $\rho\tilde{\rho}$ 按降序排列的本征值，λ_i^2 也是矩阵$\rho S\rho^* S$ 的本征值[7]. 这里

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

二量子比特混合态的形成纠缠度可以表示为

$$E_F(\rho) = H\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho)}}{2}\right), \tag{7}$$

式中

$$H(p) \equiv -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$

是 Shannon 熵函数. 形成纠缠度是 $C(\rho)$的单调函数，因此 concurrence 本身也可以作为纠缠的度量.

王安民在文献[5]中推导出由二正交纯态相混合的 concurrence 的明显表达式. 设

$$|v_1\rangle = a_1|00\rangle + b_1|01\rangle + c_1|10\rangle + d_1|11\rangle, \tag{8a}$$

$$|v_2\rangle = a_2|00\rangle + b_2|01\rangle + c_2|10\rangle + d_2|11\rangle \tag{8b}$$

为二两量子比特纯态，满足正交归一条件$\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{i,j}(i,j=1,2)$. 混合后的密度矩阵为

$$\rho = v_1|v_1\rangle\langle v_1| + v_2|v_2\rangle\langle v_2|,$$

其中 $v_1 + v_2 = 1$，则其 concurrence 为

$$C^2 = (v_1^2C_1^2 + v_2^2C_2^2) + \frac{v_1v_2}{2}|\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-|^2 - \frac{v_1v_2}{2}|(\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-)^2 - 4\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2|, \tag{9}$$

式中

$$C_i = |\mathscr{C}_i| = 2|a_id_i - b_ic_i| \quad (i=1,2,) \tag{10}$$

是纯态$|v_i\rangle$的 concurrence，

$$C_\pm = |\mathscr{C}_\pm| = |(a_1 \pm a_2)(d_1 \pm d_2) - (b_1 \pm b_2)(c_1 \pm c_2)| \tag{11}$$

是纯态$\frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle \pm |v_2\rangle)$的 concurrence. $\mathscr{C}_i$，$\mathscr{C}_\pm$ 称之为相应的复 concurrence.

3. 非正交纯态相混合的 concurrence 表达式的导出

下面推导两量子比特中二非正交纯态相混合的 concurrence 的表达式. 设有如(8)，(9)两式的两量子比特纯态，它们不正交，亦即$\langle v_1|v_2\rangle \neq 0$. 现计算它们混合后的 concurrence.

为简化计算可以选取适当的基矢量，将其中的一个纯态写成 Schmidt 分解形式，因此可以得到如下形式的两个态：

$$|v_1\rangle = \cos\varphi|00\rangle + \sin\varphi|11\rangle, \tag{12a}$$

$$|v_2\rangle = a|00\rangle + b\exp(\mathrm{i}\theta_1)|01\rangle + c\exp(\mathrm{i}\theta_2)|10\rangle + d\exp(\mathrm{i}\theta_3)|11\rangle, \tag{12b}$$

式中 a,b,c,d 以及$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\varphi$ 为实数. 混合后的密度矩阵为

$$\rho = v_1|v_1\rangle\langle v_1| + v_2|v_2\rangle\langle v_2|.$$

它与前面的形式相同，只是不再是密度矩阵 ρ 的正交分解.

现对密度矩阵 ρ 进行谱分解，也就是求 ρ 的本征值和本征函数. ρ 的两个非零本征值为

$$v_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\delta}), \tag{13}$$

式中

$$\delta = 1 - 4(1 - \langle v_1|v_2\rangle\langle v_2|v_1\rangle)v_1v_2. \tag{14}$$

与非零本征值对应的本征函数为

$$|v_\pm\rangle = N_\pm(a_\pm|00\rangle + b_\pm|01\rangle + c_\pm|10\rangle + d_\pm|11\rangle), \tag{15}$$

式中

$$a_\pm = 2(\cos\varphi\langle v_1|v_2\rangle v_1 - a(v_1 - v_2 \mp \sqrt{\delta})), \tag{16a}$$

$$b_\pm = -b(v_1 - v_2 \mp \sqrt{\delta}), \tag{16b}$$

$$c_\pm = -c(v_1 - v_2 \mp \sqrt{\delta}), \tag{16c}$$

$$d_\pm = 2(\sin\varphi\langle v_1|v_2\rangle v_1 - d\exp(\mathrm{i}\theta_3)(v_1 - v_2 \mp \sqrt{\delta})), \tag{16d}$$

归一化常数为

$$N_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\delta}(\sqrt{\delta} \pm (1 - 2(1 - |\langle v_1|v_2\rangle|^2))v_1)}}. \tag{17}$$

根据这些关系，我们可以得到 ρ 的正交分解态矢量$|v_+\rangle$，$|v_-\rangle$的复 concurrence 与非正交态矢量$|v_1\rangle$，$|v_2\rangle$的复 concurrence 之间的关系，

$$\mathscr{C}'_1 = N_+^2(4\mathscr{C}_1v_1^2\langle v_1|v_2\rangle^2 + \mathscr{C}_2(v_1 - v_2 - \sqrt{\delta})^2 - 2(\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-)v_1(v_1 - v_2 - \sqrt{\delta})\langle v_1|v_2\rangle), \tag{18a}$$

$$\mathscr{C}'_2 = N_-^2(4\mathscr{C}_1v_1^2\langle v_1|v_2\rangle^2 + \mathscr{C}_2(v_1 - v_2 + \sqrt{\delta})^2 - 2(\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-)v_1(v_1 - v_2 + \sqrt{\delta})\langle v_1|v_2\rangle), \tag{18b}$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}'_+ - \mathscr{C}'_- = N_+ N_- \big(&8\mathscr{C}_1 v_1^2 \langle v_1 | v_2\rangle^2 \\
&+ 2\mathscr{C}_2\big((v_1 - v_2)^2 - \sqrt{\delta}\big) \\
&- 2(\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-) v_1 (v_1 - v_2)\langle v_1 | v_2\rangle\big),
\end{aligned} \tag{18c}
$$

式中 $\mathscr{C}_1$，$\mathscr{C}_2$，$\mathscr{C}_1'$，$\mathscr{C}_2'$ 分别是 $|v_1\rangle$，$|v_2\rangle$，$|v_+\rangle$，$|v_-\rangle$ 的复 concurrence，$\mathscr{C}_\pm$，$\mathscr{C}'_\pm$ 分别是

$$
|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle \pm |v_2\rangle),
$$

$$
|\psi'_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_+\rangle \pm |v_-\rangle)
$$

的复 concurrence.

现有 $\rho = v_+ |v_+\rangle\langle v_+| + v_- |v_+\rangle\langle v_+|$，显然有 $v_+ + v_- = 1$，且 $\langle v_+ | v_-\rangle = 0$. 于是可用正交情形下的 concurrence 公式(10). 所以我们有

$$
C^2 = (v_+^2 C_1'^2 + v_-^2 C_2'^2) + \frac{v_+ v_-}{2}|\mathscr{C}'_+ - \mathscr{C}'_-|^2 - \frac{v_+ v_-}{2}|(\mathscr{C}'_+ - \mathscr{C}'_-)^2 - 4\mathscr{C}_1'\mathscr{C}_2'|. \tag{19}
$$

由(20)—(22)式经过繁复的计算可得

$$
(v_+^2 C_2'^2 + v_-^2 C_2'^2) + \frac{v_+ v_-}{2}|\mathscr{C}'_+ - \mathscr{C}'_-|^2 = (v_1^2 C_1^2 + v_2^2 C_2^2) + \frac{v_1 v_2}{2}|\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-|^2, \tag{20}
$$

$$
(\mathscr{C}'_+ - \mathscr{C}'_-)^2 - 4\mathscr{C}_1'\mathscr{C}_2' = 16 N_+^2 N_-^2 \delta v_1^2 [(\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-)^2 - 4\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2]\langle v_1 | v_2\rangle^2, \tag{21}
$$

$$
v_+ v_- = (1 - \langle v_1 | v_2\rangle\langle v_2 | v_1\rangle) v_1 v_2, \tag{22}
$$

$$
|(\mathscr{C}'_+ - \mathscr{C}'_-)^2 - 4\mathscr{C}_1'\mathscr{C}_2'| = \frac{|(\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-)^2 - 4\mathscr{C}_1\mathscr{C}_1|}{(1 - \langle v_1 | v_2\rangle\langle v_2 | v_1\rangle)}. \tag{23}
$$

将(24)，(26)，(27)式代入(23)式得到

$$
C^2 = (v_1^2 C_1^2 + v_2^2 C_2^2) + \frac{v_1 v_2}{2}|\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-|^2 - \frac{v_1 v_2}{2}|(\mathscr{C}_+ - \mathscr{C}_-)^2 - 4\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2|. \tag{24}
$$

(24)式即为二非正交纯态相混合的 concurrence 的解析表达式. (24)与(10)式完全一致，这说明正交情形下的 concurrence 公式可以直接推广到非正交的情形.

由于基矢的选取不会改变标积 $\langle v_1 | v_2\rangle$、纯态的 concurrence 和混合后的 concurrence，所以采用(5)，(6)两式为讨论的出发点完全具有一般性. 下面给出两个例证.

例 1　设混合态由二非正交纯态

$$
|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),
$$

$$
|v_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right)|11\rangle\right)
$$

混合而成. 计算矩阵 $\rho_{AB} S \rho_{AB}^* S$ 得到的两个非零本征值为

$$
\lambda_\pm = \frac{1}{16}\Big(8v_1^2 + 6v_1 v_2 + 2v_2^2 \pm 2\sqrt{16v_1^4 + 24v_1^2 v_2 + 4v_1^2 v_2^2 + 6v_1 v_2^3 + v_2^4}\Big).
$$

则根据(5)式可得

$$
\begin{aligned}
C^2 &= (\sqrt{\lambda_+} - \sqrt{\lambda_-})^2 \\
&= \frac{1}{4}(4v_1^2 + 3v_1 v_2 - \sqrt{13} v_1 v_2 + v_2^2).
\end{aligned}
$$

这与根据(24)式直接计算的结果相一致. 显然用明显表达式(24)进行计算要简单得多.

例 2　构成混合态的两个非正交纯态为

$$
\begin{aligned}
|v_1\rangle =& \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right)|01\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\right)|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|v_2\rangle =& \frac{1}{3}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\right)|00\rangle + \frac{2}{3}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle \\
&+ \frac{1}{3}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\right)|11\rangle.
\end{aligned}
$$

仔细的计算表明，两种方法所得结果一致. 具体结果为

$$
C'^2 = \left(\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{76}{81}v_2^2\right) + \frac{v_1 v_2}{54}(23 + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) - \frac{v_1 v_2}{54}\sqrt{4423 + 342\sqrt{2} + 148\sqrt{3} + 760\sqrt{6}}.
$$

用 Wootters[4] 的方法计算比较复杂，其中 $\rho_{AB} S \rho_{AB}^* S$ 的两个非零本征值为

$$
\begin{aligned}
\lambda_\pm =& \frac{1}{4}v_1^2 + \frac{1}{108}(23 + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) v_1 v_2 + \frac{38}{81}v_2^2 \\
&\pm \frac{1}{108}\bigg(\Big(27v_1^2 + (23 + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) v_1 v_2 \\
&+ \frac{152}{3}v_1^2\Big)^2 - (4423 + 342\sqrt{2} + 148\sqrt{3} \\
&+ 760\sqrt{6}) v_1^2 v_2^2\bigg)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

4. 关于二纯态相混合的 concurrence 的一些讨论

4.1. concurrence 的明显表达式的另一种形式

为了便于讨论，现将 concurrence 的明显表达式改写成另一形式. 为此采用幻基(magic basis)

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \tag{25a}$$

$$\Phi_2 = -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \tag{25b}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \tag{25c}$$

$$\Phi_4 = -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \tag{25d}$$

设相混合的二纯态为

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= \sum_k \mu_k \Phi_k, \\ |v_2\rangle &= \sum_k \nu_k \Phi_k. \end{aligned} \tag{26}$$

该二纯态的 concurrence 为

$$\begin{aligned} C_1 &= \left|\sum_k \mu_k^2\right|, \\ C_2 &= \left|\sum_k \nu_k^2\right|. \end{aligned} \tag{27}$$

则表达式(24)可以改写成

$$\begin{aligned} C^2 =& v_1^2 \sum_{kl} \mu_k^2 (\mu_l^*)^2 + v_2^2 \sum_{kl} \nu_k^2 (\nu_l^*)^2 \\ &+ 2 v_1 v_2 \sum_k \mu_k \nu_k \sum_l \mu_l^* \nu_l^* \\ &- 2 v_1 v_2 \Big[\Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 \\ &- \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 \\ &- \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^* \Big]^{1/2}. \end{aligned} \tag{28}$$

4.2. 两纯态相混合的最大纠缠混合态

现考虑两正交纯态相混合情形，其混合参量 v_1, v_2 一定，不失一般性，可以设 $v_1 \geqslant v_2$. 现求其最大的 concurrence. 这就要求在正交归一条件 $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$ 下求(28)式的极大值. 为此构筑拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L =& v_1^2 \sum_{kl} \mu_k^2 (\mu_l^*)^2 + v_2^2 \sum_{kl} \nu_k^2 (\nu_l^*)^2 + 2 v_1 v_2 \sum_k \mu_k \nu_k \sum_l \mu_l^* \nu_l^* \\ &- 2 v_1 v_2 \sqrt{\Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^*} \\ &- 2\eta_1 \Big(\sum_k |\mu_k|^2 - 1 \Big) - 2\eta_2 \Big(\sum_k |\nu_k|^2 - 1 \Big) - 2\eta_3 \sum_k \mu_k \nu_k^* - 2\eta_4^* \sum_k \mu_k^* \nu_k, \end{aligned} \tag{29}$$

式中，$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 为拉格朗日乘子.

求 L 对 μ_k 的偏导数并使之等于零，可得

$$\begin{aligned} \eta_1 \mu_k^* + \eta_3 \nu_k^* =& v_1^2 \mu_k \sum_l (\mu_l^*)^2 + v_1 v_2 \nu_k \sum_l \mu_l^* \nu_l^* \\ &- v_1 v_2 \frac{\Big(\nu_k \sum_k \mu_k \nu_k - \mu_k \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^*}{\sqrt{\Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^*}} \quad (\forall\, k). \end{aligned} \tag{30}$$

求 L 对 ν_k, μ_k^*, ν_k^* 的偏导数并使之等于零，可以得到与此类似的结果.

将(30)式乘以 μ_k 并对指标 k 求和，可得

$$\begin{aligned} \eta_1 =& v_1^2 \sum_k \mu_k^2 \sum_l (\mu_l^*)^2 + v_1 v_2 \sum_k \mu_k \nu_k \sum_l \mu_l^* \nu_l^* \\ &- v_1 v_2 \frac{\Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^*}{\sqrt{\Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^*}}. \end{aligned} \tag{31}$$

类似地，计算可得

$$\begin{aligned} \eta_2 =& v_2^2 \sum_k \nu_k^2 \sum_l (\nu_l^*)^2 + v_1 v_2 \sum_k \mu_k \nu_k \sum_l \mu_l^* \nu_l^* \\ &- v_1 v_2 \frac{\Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^*}{\sqrt{\Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big) \Big(\Big(\sum_k \mu_k \nu_k \Big)^2 - \sum_k \mu_k^2 \sum_l \nu_l^2 \Big)^*}}. \end{aligned} \tag{32}$$

$$\eta_3 = v_1^2 \sum_k \mu_k \nu_k \sum_l (\mu_l^*)^2 + v_1 v_2 \sum_k \nu_k^2 \sum_l \mu_l^* \nu_l^* . \tag{33}$$

$$\eta_4 = v_2^2 \sum_k \mu_k \nu_k \sum_l (\nu_l^*)^2 + v_1 v_2 \sum_k \mu_k^2 \sum_l \mu_l^* \nu_l^* . \tag{34}$$

还可以得如下关系式：

$$C^2 = \eta_1 + \eta_2 . \tag{35}$$

取 $\sum_k \mu_k^2 = \exp(\mathrm{i}\alpha)$ 和 $\sum_k \nu_k^2 = 0$，也就是取 $C_1 = 1$ 和 $C_2 = 0$，代入上述用拉格朗日乘子法求条件极值的线性方程组则全部满足．这是因为当 $C_1 = 1$ 时，$|v_1\rangle$ 用幻基展开时的系数 μ_k 有相同的相因子 $\exp(\mathrm{i}\alpha)$．不失一般性，可以取 $\alpha = 0$，即取 μ_k 为实数，则由有正交条件可得

$$\sum_k \mu_k \nu_k = \sum_k \mu_k^* \nu_k^* = \sum_k \mu_k^* \nu_k = 0 .$$

由此可得 $\eta_1 = v_1^2$，$\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$，$C = v_1$．

两正交纯态相混合情形，混合参量 v_1，v_1 一定，其最大的 concurrence 为 $v_1(\geqslant v_2)$．这一结论是与文献[8,9]中讨论的最大纠缠混合态相一致的．两量子比特的最大纠缠混合态的 concurrence 为

$$C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_3 - 2\sqrt{\lambda_2 \lambda_4}), \tag{36}$$

式中 λ_i 为密度矩阵的本征值．这里 $\lambda_1 = v_1$，$\lambda_2 = v_2$，所以 $C = v_1$．因此文献[7]中关于两正交纯态相混合的取值范围公式应该修正为

$$(v_1 C_1 - v_2 C_2)^2 \leqslant C^2 \leqslant \min(v_1^2, (v_1 C_1 + v_2 C_2)^2) . \tag{37}$$

从这里的讨论还可以看出，两纯态相混合的最大纠缠态可以是由一最大纠缠纯态与一非纠缠纯态混合而成．

4.3. 几种重要的特殊情形

1）两正交纯态相混合，其中一个为最大纠缠纯态．设 $C_1 = 1$，$\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$．如上所述，不失一般性可取 μ_k 为实数，并有

$$\sum_k \mu_k \nu_k = \sum_k \mu_k^* \nu_k^* = \sum_k \mu_k^* \nu_k = 0,$$

代入(28)式经计算可得

$$C = v_1 - v_2 C_2 . \tag{38}$$

当 $C_2 = 0$ 时，即为两个纯态相混合的最大纠缠混合态．当 $v_1 = v_2$，$C_2 = 1$ 时，$C = 0$，即两个最大纠缠纯态等权重相混合的态是可分离态．

2）两非正交的最大纠缠纯态的混合．设 $C_1 = C_2 = 1$，$\langle v_1 | v_2 \rangle \neq 0$，令 $\langle v_1 | v_2 \rangle \langle v_2 | v_1 \rangle = \cos^2\alpha$，这里 α 为态矢量 $|v_1\rangle$，$|v_2\rangle$ 的夹角，同样可以不失一般性取 μ_k，ν_k 为实数．代入(28)式经计算可得

$$C^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 (2\cos^2\alpha - 1) . \tag{39}$$

当 $\alpha = 0$ 时，$C = 1$，这时系统的状态为纯态．当 $\alpha = \pi/2$ 时，两态矢量正交，$C = v_1 - v_2$，与以上的讨论相一致．

现考虑

$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

$$|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + \exp(\mathrm{i}\theta)|11\rangle) .$$

用(24)和(39)式计算，结果都得到

$$C^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\theta .$$

这里 $\alpha = \theta/2$．

3）如下形式的特殊情形 设

$$|v_1\rangle = \sin\theta_1 |00\rangle + \cos\theta_1 |11\rangle, \tag{40a}$$

$$|v_2\rangle = \sin\theta_2 |00\rangle + \cos\theta_2 \exp(\mathrm{i}\theta) |11\rangle, \tag{40b}$$

由(24)式计算可得

$$C^2 = v_1^2 C_1^2 + v_2^2 C_2^2 + 2 v_1 v_2 \left(2\cos^2\alpha - 1 - \sqrt{(1 - C_1^2)(1 - C_2^2)}\right) . \tag{41}$$

这里 $C_1 = \sin 2\theta_1$，$C_2 = \sin 2\theta_2$，α 为态矢量 $|v_1\rangle$，$|v_2\rangle$ 的夹角

$$\cos^2\alpha = \sin^2(\theta_1 + \theta_2) - \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} . \tag{42}$$

4）其中一纯态为直积态情形．如 $C_1 = 0$，则 $C = v_1$，$C_2 = 0$，则 $C = v_2$．这一结果与态矢量 $|v_1\rangle$，$|v_2\rangle$ 正交与否无关．从这里可以看出，直积态对混合态的纠缠无贡献．可以推测，在三个纯态相混合的情形，其中有一个纯态为直积态，则(24)式仍然可以使用，只是这里 $v_1 + v_2 < 1$．具体的计算可以验证这一点，而一般的推算则相当繁复．

[1] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University)

[2] Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S *et al* 1996 *Phys*. *Rev*. A **53** 2046

[3] Popesu C, Rohrlich D 1997 *Phys*. *Rev*. A **56** R3319

[4] Wootters W K 1998 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **80** 2245

[5] Hill S, Wootters W K 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **78** 5022

[6] Wang A M 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 1907

[7] Gerjuoy E 2003 *Phys*. *Rev*. A **67** 052308

[8] Ishizaka S, Hiroshima T 2000 *Phys*. *Rev*. A **62** 22310

[9] Verstraete F, Audenaert K, Bie T D *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. A **64** 012316

Concurrence of the mixed state of two non-orthogonal pure states*

Di Yao-Min Hu Bao-Lin Liu Dong-Dong Yan Shi-Ming

(*Department of Physics*, *Xuzhou Normal University*, *Xuzhou* 221116, *China*)

(Received 28 November 2005; revised manuscript received 10 April 2006)

Abstract

In this article an obvious expression of concurrence of the mixed state of two non-orthogonal pure states in two qubits is derived. The result reveals that the expression of concurrence of the mixed state of two orthogonal states can be directly generalized to the case of the mixed state of two non-orthogonal states. Then the maximally entangled states mixed by two pure states and the concurrences in some important special cases are discussed.

Keywords: quantum entanglement, pure state, mixed state, concurrence

PACC: 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60433050) and the Science and Technology Foundation of Xuzhou Normal University, China (Grant No. 03XLA04).