第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3875-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55, No.8, August, 2006

库仑势加新环形势的相对论束缚态*

陈昌远† 孙东升 陆法林
(盐城师范学院物理系, 盐城 224002)
(2005 年 7 月 18 日收到; 2005 年 12 月 7 日收到修改稿)

在标量势等于矢量势的条件下,获得了库仑势加新环形势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态的精确解. 对于 Klein-Gordon 方程,获得了精确的能谱方程和归一化的波函数. 对于 Dirac 方程,给出了精确的能谱方程和归一化的旋量波函数.

关键词: 库仑势加新环形势, 束缚态, 精确解
PACC: 0365, 1110Q

1. 引 言

在强场势中运动的粒子必须考虑相对论效应,用相对论量子力学来处理. 零自旋粒子由 Klein-Gordon 方程描述,而 1/2 自旋粒子用 Dirac 方程描述. 在以前的工作中,人们在标量势等于矢量势的条件下,对一些中心势场和非中心势场的相对论效应做了充分的讨论, 例如 Hulthén 势[1—5]、Morse 势[6]、Wood-Saxon 势[7]、Pöschl-Teller 势[8]、$\tan^2(\pi\eta r)$ 势[9]和谐振子势[10,11]、环形振子[12]、环形非球谐振子[13]、双环形振子[14]、Hartmann 势[15,16]等.

Hartmann 势是由库仑势加上环状的平方反比势构成的,它是由 Hartmann[17] 在 1972 年研究环形分子时最先引入的. 在球坐标系中,Hartmann 势为

$$V_q = \eta\sigma^2\left(\frac{2a_0}{r} - q\eta\frac{a_0^2}{r^2\sin^2\theta}\right)\varepsilon_0, \tag{1}$$

式中,

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{Me^2}$$

是玻尔半径,

$$\varepsilon_0 = -\frac{Me^4}{2\hbar^2}$$

是氢原子的基态能量, η 和 σ 是正数,它们的值在 1 到 10 之间, q 是一个实参数. 当 $q = 0$ 和 $\eta\sigma^2 = Z$ 时, Hartmann 势就退化为库仑势. 由于这个模型势在物理学中的的重要性,在以前的工作中,人们对它的非相对论性质进行了广泛深入的研究[17—31]. 我们在最近的工作中[32],引入了一个新的环形势,它是用 $\cos^2\theta/(r\sin\theta)^2$ 代替 Hartmann 势中的 $1/(r\sin\theta)^2$,在球坐标系中,这个新的势函数表示为

$$V(r,\theta) = -\frac{\alpha}{r} + \beta\frac{\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}, \tag{2}$$

式中 α 和 β 是正的实参数. 当 $\beta = 0$ 和 $\alpha = Ze^2$ 时, (2)式就退化为库仑势. 比较(1)和(2)式可知,当 r 取某一定值时,Hartmann 势的第二项在 $\theta = \pi/2$ 时有不等于零的极小值,而(2)式的第二项则在 $\theta = \pi/2$ 时取等于零的极小值,所以二者对应不同的环形势. 文献[32]对(2)式表示的这个库仑势加新环形势的非相对论性质做了充分的讨论. 那么,这一势场的相对论性质如何呢?这一令人感兴趣的问题还未见到报道.

本文将研究粒子在库仑势加新环形势这个势场中运动时的相对论效应. 在标量势等于矢量势的条件下,我们获得了 Klein-Gordon 方程束缚态的精确能谱方程和归一化的角向波函数和径向波函数. 对于 Dirac 方程,给出了精确的束缚态能谱方程和归一化的旋量波函数.

2. Klein-Gordon 方程的束缚态

在球坐标系中,具有标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程为[1—16] ($\hbar = c = 1$)

* 盐城师范学院教授博士科研基金资助的课题.
† E-mail: yctcccy@163.net

$$[\boldsymbol{P}^2+(M+S(\boldsymbol{r}))^2]\psi(\boldsymbol{r})=[E-V(\boldsymbol{r})]^2\psi(\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{P}=-\mathrm{i}\nabla$ 是动量算符,M 是粒子的静质量,E 是粒子的总能量.当标量势等于矢量势时,即

$$S(r,\theta)=V(r,\theta)=-\frac{\alpha}{r}+\beta\frac{\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式得

$$\left[-\nabla^2+2(M+E)\left(-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\right]\psi(r,\theta,\phi)=[E^2-M^2]\psi(r,\theta,\phi). \tag{5}$$

为了对(5)式进行变量分离,与球对称势的做法类似,取

$$\psi(r,\theta,\phi)=\frac{u(r)}{r}H(\theta)\Phi(\phi). \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式并分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left\{(E^2-M^2)+\frac{2\alpha(M+E)}{r}-\frac{\lambda}{r^2}\right\}u(r)=0, \tag{7a}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{2\beta(M+E)\cos^2\theta+m^2}{\sin^2\theta}\right)H(\theta)=0, \tag{7b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\Phi(\phi)=0, \tag{7c}$$

式中 λ 和 m^2 是变量分离过程中所引入的常数.对于束缚态,方程(7a)的边界条件是 $u(0)=0$ 和 $u(\infty)=0$;方程(7b)的边界条件是 $H(0)$ 和 $H(\pi)$ 均为有限值;而方程(7c)的边界条件则是周期性边界条件 $\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$,它的解为

$$\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\qquad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{8}$$

下面我们仅需研究方程(7b)和(7a)的解.

取

$$m'=\sqrt{2\beta(M+E)+m^2},\quad \lambda+2\beta(M+E)=l'(l'+1), \tag{9}$$

并做变量代换 $x=\cos\theta$,则方程(7b)可化为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2H(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}+\left[l'(l'+1)-\frac{(m')^2}{1-x^2}\right]H(x)=0, \tag{10}$$

其边界条件是 $H|_{x=\pm1}$ 为有限值.当 l' 和 m' 取零和自然数时,(10)式退化为缔合勒让德微分方程,所以(10)式称之为广义的缔合勒让德微分方程[32,33],其解为

$$H_{l'm'}(\cos\theta)=N_{l'm'}(\sin\theta)^{m'}\times\sum_{v=0}^{[\frac{l'-m'}{2}]}\frac{(-1)^v\Gamma(2l'-2v+1)}{2^{l'}v!(l'-m'-2v)!\Gamma(l'-v+1)}\times(\cos\theta)^{l'-m'-2v}, \tag{11}$$

式中归一化常数

$$N_{l'm'}=\sqrt{\frac{(2l'+1)(l'-m')!}{2\Gamma(l'+m'+1)}},$$

l' 和 m' 的关系为

$$l'=k+m'\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

把(9)式代入(7a)式得

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left\{E^2-M^2+\frac{2\alpha(M+E)}{r}-\frac{L(L+1)}{r^2}\right\}u(r)=0, \tag{12}$$

式中,

$$L=\frac{1}{2}\left[\left(1+4[(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2})\times(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2}+1)-2\beta(M+E)]\right)^{1/2}-1\right]\quad(|m|,k=0,1,2,\cdots). \tag{13}$$

对于束缚态,$|E|<M$,所以做如下变换:

$$s=2(M^2-E^2)^{1/2},\quad \rho=sr,\quad t=\frac{2\alpha(M+E)}{s}, \tag{14}$$

则(12)式可化为无量纲方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{t}{\rho}-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\right]u(\rho)=0. \tag{15}$$

考虑到 $\rho\to0$ 和 $\rho\to\infty$ 时的边界条件,做函数代换

$$u(\rho)=\rho^{L+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho}f(\rho), \tag{16}$$

则(15)式可化为

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2f(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+(2L+2-\rho)\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}-(L+1-t)f(\rho)=0. \tag{17}$$

这是参数 $\alpha=L+1-t,\gamma=2L+2$ 的合流超几何微分方程[34,35],因而解为合流超几何函数

$$f(\rho)=\mathrm{F}(L+1-t,2L+2,\rho). \tag{18}$$

为了满足束缚态的边界条件 $u|_{\rho\to\infty}=0$,合流超几何函数必须中断为一个多项式,即要求 α 等于一个负

整数 $-n_r(n_r=0,1,2,\cdots)$，亦即

$$t=n_r+L+1=n' \qquad (n_r=0,1,2,\cdots). \tag{19}$$

将(19)式代入(14)式得束缚态总能量满足的方程为

$$\begin{aligned}2\alpha\sqrt{\frac{M+E}{M-E}} &= 2n_r+(1+4[(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2})\\&\times(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2}+1)\\&-2\beta(M+E)])^{1/2}+1\\&\qquad (n_r,|m|,k=0,1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{20}$$

相应的束缚态的径向波函数为

$$\begin{aligned}u_{n'L}(r) &= N_{n'L}\left(\frac{2\alpha(M+E)r}{n'}\right)^{L+1}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(M+E)r}{n'}}\\&\times \mathrm{F}\left(-n_r,2L+2,\frac{2\alpha(M+E)r}{n'}\right),\end{aligned} \tag{21}$$

式中 $N_{n'L}$ 是径向波函数的归一化常数．利用合流超几何函数和广义拉盖尔多项式的关系[34,35]

$$\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\mathrm{F}(-n,\alpha+1,x), \tag{22}$$

以及广义拉盖尔多项式的正交归一性和递推关系[34,35]

$$\int_0^\infty x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\mathrm{L}_m^{(\alpha)}(x)\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{mn}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}(n+1)\mathrm{L}_{n+1}^{(\alpha)}(x) &= (2n+\alpha+1-x)\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)\\&-(n+\alpha)\mathrm{L}_{n-1}^{(\alpha)}(x),\end{aligned} \tag{24}$$

得归一化常数

$$N_{n'L}=\frac{1}{n'\Gamma(2L+2)}\sqrt{\alpha(M+E)\frac{\Gamma(n_r+2L+2)}{n_r!}}. \tag{25}$$

所以归一化的束缚态径向波函数为

$$\begin{aligned}u_{n'L}(r) &= \frac{1}{n'\Gamma(2L+2)}\sqrt{\alpha(M+E)\frac{\Gamma(n_r+2L+2)}{n_r!}}\\&\times\left(\frac{2\alpha(M+E)r}{n'}\right)^{L+1}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(M+E)r}{n'}}\\&\times \mathrm{F}\left(-n_r,2L+2,\frac{2\alpha(M+E)r}{n'}\right),\end{aligned} \tag{26}$$

式中，L 由(13)式确定，而

$$\begin{aligned}n' &= n_r+\frac{1}{2}[(1+4[(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2})\\&\times(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2}+1)\\&-2\beta(M+E)])^{1/2}+1]\\&\qquad (n_r,|m|,k=0,1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{27}$$

由于 m'，l'，n' 和 L 均是粒子静质量和能量的函数，所以径向波函数的归一化常数 $N_{n'L}$ 和角向波函数的归一化常数 $N_{l'm'}$ 也是粒子静质量和能量的函数．

3. Dirac 方程的束缚态

在球坐标系中，具有标量势和矢量势的 Dirac 方程为[1—16] $(\hbar=c=1)$

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}+\beta(M+S(\boldsymbol{r}))]\psi(\boldsymbol{r})=[E-V(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r}), \tag{28}$$

式中，

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}. \tag{29}$$

这里，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 Pauli 自旋矩阵．对于中心场，当标量势等于矢量势时，人们通常采用守恒量完全集(H,K,J^2,J_z)的共同本征函数来退耦 Dirac 方程．事实上，采用二分量波函数

$$\psi(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{r})\\\chi(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}$$

也能对 Dirac 方程进行退耦，讨论 Dirac 方程的非相对论近似就是这样做的[36]．不过对于非中心场，只有采用二分量波函数才能对 Dirac 方程进行退耦．为此令

$$\psi(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{r})\\\chi(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}, \tag{30}$$

则(28)式可化为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}\chi(\boldsymbol{r})=[E-V(\boldsymbol{r})-M-S(\boldsymbol{r})]\varphi(\boldsymbol{r}), \tag{31a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{r})=[E-V(\boldsymbol{r})+M+S(\boldsymbol{r})]\chi(\boldsymbol{r}). \tag{31b}$$

当标量势 $S(\boldsymbol{r})$ 等于矢量势 $V(\boldsymbol{r})$，(31a)，(31b)式可进一步化为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}\chi(\boldsymbol{r})=[E-M-2V(\boldsymbol{r})]\varphi(\boldsymbol{r}), \tag{32a}$$

$$\chi(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}}{E+M}\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{32b}$$

将(32b)式代入(32a)式，得

$$[\boldsymbol{P}^2+2(E+M)V(\boldsymbol{r})]\varphi(\boldsymbol{r})=[E^2-M^2]\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{33}$$

到此为止，采用二分量波函数就成功地将标量势等于矢量势的 Dirac 方程退耦了．由于上述过程没有

考虑势函数的具体形式,因此这一方法对于中心场和非中心场同样适用. 把库仑势加新环形势代入(33)式后可知,(33)式可化为(5)式. 对于束缚态,Dirac 方程和 Klein-Gordon 方程的边界条件是一致的. 因此,当标量势等于矢量势时,库仑势加新环形势的 Dirac 方程束缚态的精确能谱方程为

$$
\begin{aligned}
&2\alpha\sqrt{\frac{M+E}{M-E}}\\
&=2n_r+\Big(1+4\big[\big(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2}\big)\\
&\quad\times\big(k+\sqrt{2\beta(M+E)+m^2}+1\big)\\
&\quad-2\beta(M+E)\big]\Big)^{1/2}+1\\
&\qquad(n_r,|m|,k=0,1,2,\cdots). \qquad (34)
\end{aligned}
$$

相应的归一化旋量波函数为

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r})&=A_{n'L}\begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{r})\\ \chi(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}\\
&=A_{n'L}\begin{pmatrix}I\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}}{E+M}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2\pi}r}u_{n'L}(r)H_{l'm'}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}.
\end{aligned}
\qquad (35)
$$

式中,$u_{n'L}(r)$和 $H_{l'm'}(\cos\theta)$分别由(26)和(11)式确定,而归一化常数

$$
\begin{aligned}
A_{n'L}=&\Big[1+\frac{E-M}{E+M}+\frac{2\alpha^2}{(n')^2}+\frac{4\alpha^2\beta(E+M)}{(n')^3(2L+1)}\\
&\times\Big(1-\frac{\Gamma(l'+m'+1)}{m'(l'-m')!}\Big)\Big]^{-1/2}. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

需要指出的是,与 Klein-Gordon 方程的径向波函数、角向波函数和归一化结果相似,Dirac 方程的旋量波函数的归一化常数也是粒子静质量和能量的函数.

4. 结 论

库仑势加新环形势是描述环形分子的一个新模型势,本文研究了这一模型势的束缚态的相对论性质. 在标量势等于矢量势的条件下,我们给出了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程束缚态的精确解. 结果表明,两者束缚态的能谱方程是相同的,由 Klein-Gordon 方程的归一化波函数可以构造出 Dirac 方程的归一化旋量波函数. 由于 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程分别描述的是零自旋粒子和 1/2 自旋粒子的行为,本文结果和文献[13,15,16]的结果则证明了当标量势等于矢量势时,3 种非中心势场即库仑势加新环形势、环形非球谐振子、Hartmann 势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态能谱是相同的. 对于中心场,以前人们在研究它们的非相对论效应时,当标量势等于矢量势时,总是采用守恒量的完全集(H,K,J^2,J_z)的共同本征函数来退耦 Dirac 方程,因此 Klein-Gordon 方程给出的能谱和 Dirac 方程给出的能谱是用不同量子数表示的,表面上看它们的能谱结构不同,但考虑到量子数具体数值的选取,两者的能谱结构实际上也是一致的.

当标量势等于矢量势时,中心场和非中心场的 Dirac 方程均可采用二分量的波函数来退耦,退耦后的方程与 Klein-Gordon 方程相同,因而与 Schrödinger 方程是类似的. 根据本文和文献[1—16]的结果,我们可以做出如下猜想:只要某一势场的 Schrödinger 方程的束缚态能够精确求解,那么在标量势等于矢量势时,这一势场的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态也一定能精确求解.

[1] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[2] Talukdar B, Yunus A, Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[3] Hu S Z, Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[4] Guo J Y, Meng J, Xu F X 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 602

[5] Simsek M, Egrifes H 2004 *J. Phys. A* **37** 4379

[6] Hou C F, Li Y, Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese) [侯春风、李 炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[7] Hou C F, Zhou Z X 1999 *Chin. Phys.* **8** 561

[8] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese) [陈 刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[9] Guo J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese) [郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[10] Qiang W C 2002 *Chin. Phys.* **11** 757

[11] Su R K, Ma Z Q 1986 *J. Phys. A* **19** 1739

[12] Qiang W C 2003 *Chin. Phys.* **12** 136

[13] Zhang X A, Chen K, Duan Z L 2005 *Chin. Phys.* **14** 42

[14] Lu F L, Chen C Y, Sun D S 2005 *Chin. Phys.* **14** 463

[15] Chen Z D, Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2524 (in Chinese) [陈子栋、陈 刚 2005 物理学报 **54** 2524]

[16] Chen C Y 2005 *Phys. Lett.* A **339** 283

[17] Hartmann H 1972 *Theor. Chim. Acta* **24** 201

[18] Hartmann H, Schuck R, Radtke J 1976 *Theor. Chim. Acta* **46** 1

[19] Hartmann H, Schuck D 1980 *Int. J. Quantum Chem.* **18** 125

[20] Gerry C C 1986 *Phys. Lett.* A **118** 445

[21] Kibler M, Negadi T 1984 *Int. J. Quantum Chem.* **26** 405

[22] Sökmen I 1986 *Phys*. *Lett*. A **115** 249

[23] Kibler M, Negadi T 1984 *Theor*. *Chim*. *Acta* **66** 31

[24] Blado G G 1996 *Theor*. *Chim*. *Acta* **94** 53

[25] Blado G G 1996 *Int*. *J*. *Quantum Chem*. **58** 431

[26] Qian S W, Huang B W, Wang D Y *et al* 2002 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **38** 139

[27] Vaidya A N, Boschi H 1991 *J*. *Math*. *Phys*. **31** 1951

[28] Chen C Y, Liu C L, Sun D S 2002 *Phys*. *Lett*. A **305** 341

[29] Chen C Y, Sun D Y, Liu C L 2003 *Phys*. *Lett*. A **317** 80

[30] Chen C Y, Lu F L, Sun D S 2004 *Phys*. *Lett*. A **329** 420

[31] Chen G 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 144

[32] Chen C Y, Dong S H 2005 *Phys*. *Lett*. A **335** 374

[33] Chen C Y, Hu S Z 1995 *Acta Phys*. *Sin*. **44** 9 (in Chinese) [陈昌远、胡嗣柱 1995 物理学报 **44** 9]

[34] Written Group of Mathematical Handbook 1979 *Mathematical Handbook* (Beijing: Higher Education Press) Chap 12 (in Chinese) [《数学手册》编写组 1979 数学手册(北京:高等教育出版社)第 12 章]

[35] Wang Z X, Guo D R 1979 *An Introduction to Special Function* (Beijing: Science Press) Chap 6 (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 1979 特殊函数概论(北京:科学出版社)第 6 章]

[36] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* (Vol. Ⅱ) (3rd ed) (Beijing: Science Press) Chap 11 (in Chinese) [曾谨言 2000 量子力学(卷Ⅱ)(第 3 版)(北京:科学出版社)第 11 章]

The relativistic bound states of Coulomb potential plus a new ring-shaped potential*

Chen Chang-Yuan† Sun Dong-Sheng Lu Fa-Lin

(*Department of Physics*, *Yancheng Teachers College*, *Yancheng* 224002, *China*)

(Received 18 July 2005; revised manuscript received 7 December 2005)

Abstract

The exact solutions of bound states of Klein-Gordon equation and Dirac equation with Coulomb potential plus a new ring-shaped potentials are studied on the assumption that the scalar potential is equal to the vector potential. The exact energy expressions and the normalized wave functions for Klein-Gordon equation are presented. The exact energy expressions and the normalized spinor wave functions for Dirac equation are given.

Keywords: Coulomb potential plus a new ring-shaped potentials, bound states, exact solutions

PACC: 0365, 1110Q

* Project supported by the Scientific Reserch Foundation for Professor and Doctor of Yancheng Teachers College, China.

† E-mail: yctcccy@163.net